

# مقدمة فى الأستاتيك الهندسية

أعداد

أ.د / عبد الله مسعد زين الدين  
أ.د / طارق كمال الدين زين العابدين  
د / احمد عبد الله الشافعى

قسم الهندسة الزراعية والنظم الحيوية  
كلية الزراعة – جامعة الإسكندرية







# مقدمة فى الأستاتيك الهندسية

أعداد

أ.د / عبد الله مسعد زين الدين  
أ.د / طارق كمال الدين زين العابدين  
د / احمد عبد الله الشافعى

قسم الهندسة الزراعية والنظم الحيوية  
كلية الزراعة – جامعة الإسكندرية





اسم الكتاب: مقدمة في الأساتيك الهندسية  
المؤلفين هيئة تدريس جامعة الاسكندرية

2015

رقم الايداع : ٢٠١٤ / ١٥٨٢٢

الترقيم الدولي ٤- ١٩٨- ٣٩٣- ٩٧٧- ٩٧٨ ISBN

الفهرسة: مقدمة في الأساتيك الهندسية - هيئة تدريس  
جامعة الاسكندرية

بستان المعرفة ٢٠١٥

٢٢٦ ص ١٧ \* ٢٤.٥

تدمك ٤- ١٩٨- ٣٩٣- ٩٧٧- ٩٧٨

أ- العنوان-

الناشر

مكتبة بستان المعرفة

ج. م. ع - كفر الدوار - الحدائق - أمام أبراج الحلواني

☎ : ٢٢٠٢٦٢٩ / ٤٥٠٤٥ &

الإسكندرية ١٢٢١١٥١٢٣٧

E-mail: bostan\_elma3rafa@yahoo.com

الطباعة و التجهيزات الفنية:

دار الجامعيين لطباعة والتجليد الإسكندرية

جميع حقوق النشر محفوظة للناشر

ولا يجوز طبع أو نشر أو تصوير أو إنتاج هذا المصنف أو أى  
جزء منه بأية صورة من الصور

بدون تصريح كتابى مسبق ومن يخالف ذلك يتعرض للمساءلة  
القانونية المنصوص عليها فى القانون المصرى

# بسم الله الرحمن الرحيم

" و قل ربى زدنى علماً "

أردت بهذا الكتاب أن يعطى ما يحتاجه طالب الهندسة الزراعية من مواضيع في الإستاتيك الهندسيه تفهده في السنة الأولى و السنوات التالية حيث أشتمل على مواضيع في الإتزان و الإحتكاك و التى تستخدم فيما يلي من دراسة المواد المتعلقة من أسس الخرسانة و الحديد و كذلك اتزان الجرار و الآلات و ما شابه ذلك .

و قد نهجت في هذا الكتاب على نهج الكتب الجامعية الأخرى من حيث كتابة المعادلات بالحروف اللاتينية حتى يسهل على الطالب متابعة الإطلاع على المراجع العلمية باللغات الأجنبية في سهولة و يسر و الكتاب يحوي عدداً وفيراً من التمارين المحولة و غير المحولة و ذلك تيسيراً على الطالب و ضماناً لفهمه .

و قد راعيت أن يكون هذا الكتاب بقدر الإمكان خالي من الأخطاء المطبعية و أن يكون تبويبه بحيث تتسلسل مواضيعه مع التدرج الطبيعي للمستوى العلمي للطالب . و لذا أرجو أن يكون هذا الكتاب بمثابة الأداة التى تسهل على الطالب الحصول على كل ما يحتاجه في دراسة الإستاتيك و في حدود ما يتطلبه طبيعة طالب الهندسة الزراعية .

و الكتاب يصلح أيضا للأخوة الزملاء المحاضرين لاستخدامه ككتاب جامعي في مجال الهندسة الزراعية .

" ربنا لا تؤاخذنا ان نسينا أو أخطأنا انك انت السميع العليم "

صدق الله العظيم

## أستاذ دكتور عبد الله زين الدين

بكالوريوس في الهندسة الزراعية - كلية الزراعة - جامعة الإسكندرية

ماجستير في الهندسة الزراعية - كلية الزراعة - جامعة الإسكندرية

دكتوراه في الهندسة الزراعية - جامعة الاسكندرية - جامعة نوكا أسكوشيا - هماليفاكس - كندا

أستاذ بقسم الهندسة الزراعية - كلية الزراعة - جامعة الإسكندرية

## دكتور : طارق كمال الدين على زين العابدين

بكالوريوس في الهندسة الزراعية - كلية الزراعة - جامعة الإسكندرية

ماجستير في الهندسة الزراعية - كلية الزراعة - جامعة الإسكندرية

دكتوراه في الهندسة الزراعية - كلية الهندسة - جامعة نوكا أسكوشيا - هماليفاكس - كندا

أستاذ مساعد بقسم الهندسة الزراعية - كلية الزراعة - جامعة الإسكندرية



# الفهرس

## الباب الأول : الكميات القياسية و المتجهة ..... ( ٧ )

مقدمة ..... ( ٧ )

الكميات القياسية و المتجهة ..... ( ٨ )

أنواع المتجهات ..... ( ١٠ )

جمع المتجهات ..... ( ١١ )

طرح المتجهات ..... ( ١٣ )

استعمال فكرة جمع المتجهات في حل بعض المسائل الهندسية ..... ( ١٤ )

ضرب كمية قياسية في كمية متجهة ..... ( ١٤ )

أمثلة توضيحية ..... ( ١٥ )

الوحدات المتجهة الأساسية ..... ( ١٩ )

تفاضل المتجه بالنسبة للزمن ..... ( ٢٠ )

الضرب الاتجاهي لمتجهين ..... ( ٢١ )

الضرب القياسي لمتجهين ..... ( ٢١ )

أمثلة محلولة ..... ( ٢٣ )

## الباب الثاني : التعاريف و القوانين الأساسية..... ( ٣٣ )

التعاريف الأولية في علم الإستاتيكا..... ( ٣٣ )

القوانين الأساسية..... ( ٣٥ )

قانون تركيب و تحليل القوى..... ( ٣٥ )

قانون التوازن..... ( ٣٦ )

نقل القوى..... ( ٣٧ )

## الباب الثالث : عمليات تركيب و تحليل القوى..... ( ٣٩ )

أولاً : عمليات تركيب القوى..... ( ٣٩ )

تركيب القوى الملتقية..... ( ٣٩ )

تركيب القوى المتفرقة..... ( ٤١ )

عزم قوة  $F$  حول نقطة الأصل  $O$ ..... ( ٤٦ )

عزم قوة  $F$  حول نقطة  $B$  احداثياتها  $(X_0, Y_0)$ ..... ( ٤٦ )

معادلة خط عمل المحصلة..... ( ٤٧ )

طرق تحليلية أخرى..... ( ٤٨ )

الازدواج..... ( ٤٩ )

ثانياً : عمليات تحليل القوى..... ( ٥٠ )

تحليل قوى  $R$  الى مركبتين في خطي عمل معلومين..... ( ٥٠ )

تحليل قوة  $R$  إلى مركبتين بمعرفة خط عمل إحداهما (١) ونقطه  $A$  على

خط عمل الأخرى..... ( ٥١ )

تحليل قوة  $R$  إلى ثلاث مركبات خطوط عملها معلوم 1, 2, 3..... ( ٥٢ )

أمثلة محلولة..... ( ٥٣ )

أمثلة على إيجاد محصلة مجموعة من القوى المتفرقة..... ( ٦٣ )

أمثلة على تحليل القوى في المستوى..... ( ٧٣ )

تمارين..... ( ٧٩ )



## الباب الرابع : اتزان الجسم و الجسم المتناسك ..... ( ٨٣ )

أولاً : اتزان الجسم ..... ( ٨٣ )

ثانياً : اتزان الجسم المتناسك ..... ( ٨٤ )

الإرتكاز البسيط ..... ( ٨٤ )

الإرتكاز المفصلي ..... ( ٨٥ )

التثبيت ..... ( ٨٦ )

ثالثاً : شروط اتزان الجسم المتناسك ..... ( ٨٦ )

رابعاً : السواند و الشدادات ..... ( ٨٨ )

أمثلة محلولة ..... ( ٩١ )

تمارين ..... ( ١٠٦ )

## الباب الخامس : اتزان مجموعة الجسيمات ..... ( ١٠٩ )

الهياكل المحملة بالمفاصل ( الجمالونات أو الشبكيات Trusses ) ..... ( ١١٠ )

أمثلة ..... ( ١١١ )

خطوات حل المسائل المتعلقة بإتزان الجسيمات ..... ( ١١٦ )

التماثل الإستاتيكي حول محور ..... ( ١٢٠ )

أمثلة محلولة ..... ( ١٢٥ )

تمارين ..... ( ١٣٢ )

## الباب السادس : اتزان مجموعة الأجسام المتناسكة ..... ( ١٣٤ )

التماثل ..... ( ١٤٠ )

المفاصل المحملة ..... ( ١٤٢ )

تمارين ..... ( ١٦٣ )

## الباب السابع : الإحتكاك ..... ( ١٦٩ )

- زاوية الإحتكاك ..... ( ١٧٠ )
- الإنزلاق و الانقلاب ..... ( ١٧٢ )
- مقاومة التدحرج ..... ( ١٧٥ )
- احتكاك المحاور ..... ( ١٧٨ )
- الإسفين ..... ( ١٧٩ )
- احتكاك الحبال و السيور ..... ( ١٨١ )
- أمثلة متنوعة ..... ( ١٨٦ )
- تمارين ..... ( ٢٠١ )

## الباب الثامن : مركز الثقل ..... ( ٢٠٥ )

- نظرية مراكز الأجزاء ..... ( ٢٠٨ )
- المستويات المركزية والتماثل ..... ( ٢٠٨ )
- بعض الأمثلة بالتكامل المباشر ..... ( ٢٠٩ )
- نظرية بابوس ..... ( ٢٢٠ )
- أمثلة محلولة ..... ( ٢٢٢ )



## الكميات القياسية والمتجهة

## ١ - مقدمة

يعتبر علم الميكانيكا أحد العلوم الفيزيائية ويقوم بدراسة حالة الأجسام من حيث السكون والحركة وذلك نتيجة تأثير قوى خارجية على تلك الأجسام والتي تغير من حالتها من سكون إلى حركه أو العكس. ولتجد التطورات التكنولوجية الحديثه فى نظرية الاستقرار ومثانة المنشآت والآلات وتصميم الصواريخ ومركبات الفضاء والتحكم الألى بها والآلات الكهربيه وأجهزتها وسلوك الجزيئات والذرات تعتمد على القواعد الأساسيه لعلم الميكانيكا.

ويعتمد علم الميكانيكا بصورة أساسيه على علم الرياضيات ولهذا تستخدم تلك المبادئ فى حل المسائل العلميه. ومن العروف أن علم الميكانيكا ينقسم إلى قسمين وهما: الديناميكا ويختص بدراسه حركة الأجسام ولذا يسمى أيضا علم الحركة. والقسم الثانى الاستاتيكا علم السكون وهو موضوع هذا الكتاب ويعرف على أنه علم يعنى بدراسة عمليات تركيب وتحليل القوى وشروط توازن هذه القوى على الأجسام كما تبحث فى توزيع القوى بين الأجسام المتصلة و طرائق الارتكاز و الإتصال و هي بذلك أساس نظريات الإنشاء الهندسي أو بمعنى آخر هو علم يقوم بدراسة الأجسام الماديه تحت تأثير القوى.

ويشمل الاتزان حالة السكون المستمر والحركة المنتظمة فى خط مستقيم أو الحركه الدورانيه المنتظمة لجسم متماسك حول محوره بشرط لا يطرأ اى تغير على حالة الجسم وتنقسم الاستاتيكا إلى استاتيكا الأجسام المتماسكة وهى موضوع الدراسة واستاتيكا الأجسام المرنة وأخيرا استاتيكا الموائع ولدراسة الاستاتيكا وجهتان متميزتان أولهما الاستاتيكا التحليلية والثانية الاستاتيكا البيانیه.

و قبل دراسة القوانين الأساسية و عرض التعاريف الأولية لعلم الإستاتيكا يجب التعرف على الكميات و كيف تقسم مع التطرق لدراسة المتجهات بعض الشئ حيث أنها تفيد في عملية تحليل وتركيب القوى .

## ٢ – الكميات القياسية والمتجهة :

ينى علم الميكانيكا على نوعين من الكميات أحدهما قياسية والأخرى اتجاهية

### أ- الكميات القياسية (Scalars) :

تعرف تلك الكميات من مقاديرها فقط أى بعدد من وحدات معينة وليس لها اتجاه فراغى ومن أمثلتها الزمن والطول والكتلة وهى تعرف أيضا على أنها كميات أساسية (fundamental quantities) والحجم والكثافة ومقدار السرعة والعجلة والطاقة وهى تعرف على أنها كميات مشتقة (derived quantities). ولكل منها وحدات (units) الخاصة التى تعبر بها الكميات وهى فى الغالب ثلاث أنظمة مبنية على أساس وحدات الكميات الأساسية وهى:

١- النظام المئوى المطلق (النظام العلمى SI)

متر – كيلو جرام – ثانية (M.K.S. system)

٢- النظام الفرنسى المطلق

سنتيمتر – جرام – ثانية (C.G.S. sytem)

٣- النظام البريطانى

قدم – باوند – ثانية (F.P.S. system)

ومن الملاحظ أن تلك الكميات لا تتضمن بطبيعتها معنى الاتجاه ويمكن تمثيل هذه الكميات على



مقياس مدرج بحيث تختص إحدى جهتيه من نقطة الأصل أو الصفر للكميات الموجبة وتختص الجهة الأخرى للكميات السالبة كما يحدث في الرسومات البيانية (شكل ١-١). أيضا تخضع تلك الكميات للعمليات الحسابية والجبرية العادية للأعداد.



شكل (١-١) . يوضح تمثيل الكميات القياسية على مقياس مدرج.

ولنذكر هنا بعض القوانين الأساسية من علم جبر الأعداد - وكلها من البديهيات الأولية - وذلك لمضاهاتها فيما بعد بمثيلاتها في جبر المتجهات:

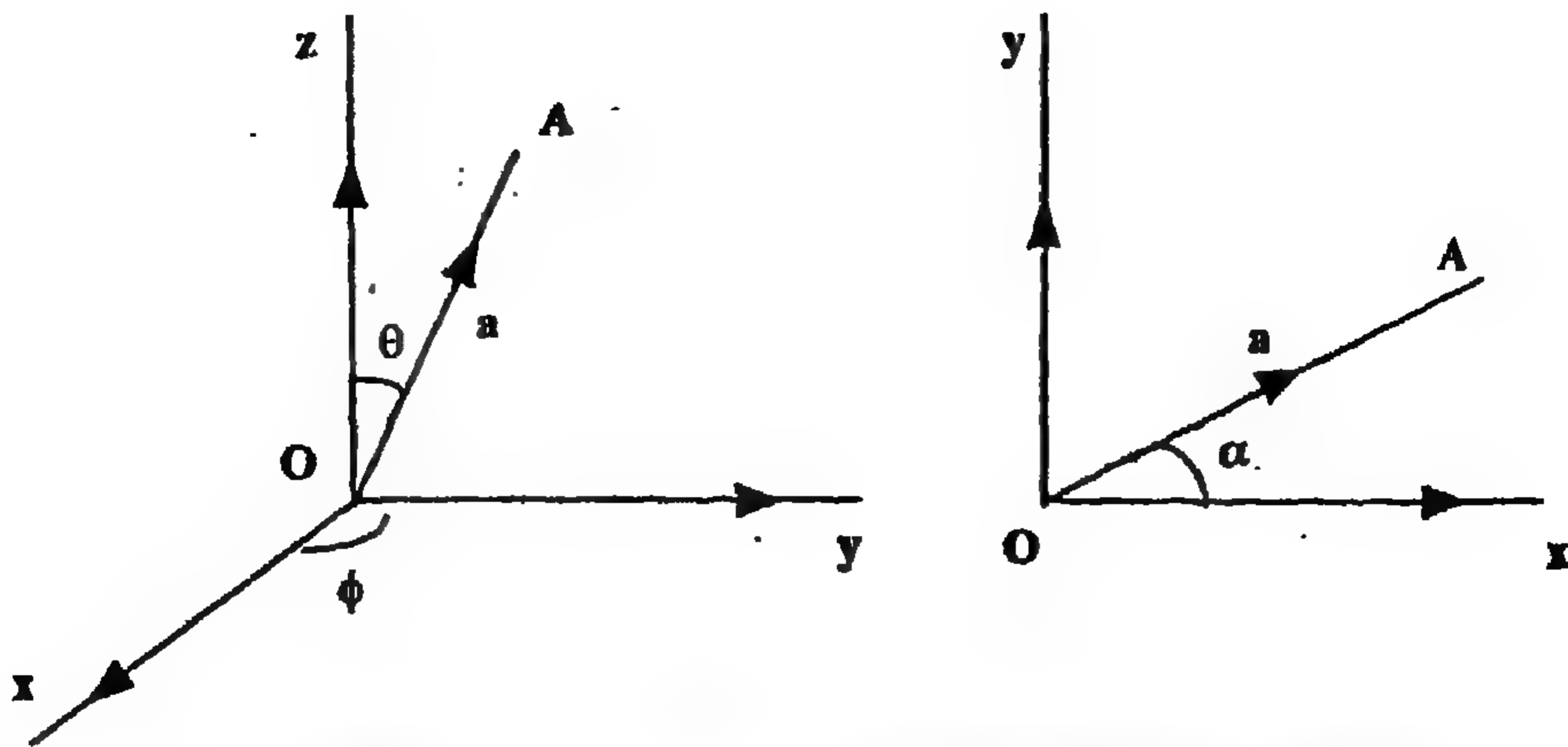
$$(I) \quad a + b = b + a \quad \text{قانون التبادل (Commutative Law)}$$

$$(II) \quad (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c \quad \text{قانون الترتيب (Associative Law)}$$

$$(III) \quad m(a + b) = ma + mb \quad \text{قانون التوزيع (Distributive Law)}$$

## ب- الكميات المتجهة (Vectors) :

تعرف الكميات المتجهة بأنها كميات لها مقدار واتجاه وهي تخضع لقانون متوازي الاضلاع الذي يبين طريقة جمعها. ومن أمثلتها الانتقال أو الأزاحة و السرعة والعجلة والقوة والعزم والدفع وكمية الحركة وكلها لا يتم التعرف عليها إلا بذكر اتجاهها. ولهذا فإن الكمية المتجهة تحدد بمقدار (Magnitude) أى بعدد من الوحدات كالتر في الثانية للسرعة أو وزن الكيلو جرام للقوة. أما الاتجاه فيحدد بزاوية ميل المتجه على محور ثابت كما في الشكل (١-٢). فإن تعين اتجاه المتجهات الواقعة في مستوى يتم بتحديد زاوية الميل ( $\alpha$ ) مع المحور الألفى ( $X +$ ) وذلك مأخوذاً ضد عقارب الساعة. أما إذا وقعت تلك المتجهات في الفراغ فيحدد اتجاهها بزاويتين ( $\theta, \phi$ ) مع المحورين ( $Z, X$ )



شكل (١-٢) تحديد اتجاه المتجهات أ- في مستوى ب- في الفراغ

ويرمز للمتجه بحرف واحد مثل  $a, b, c, \dots$  كما يرمز له بحرفين أحدهما في أول نقطة والآخر في آخر نقطة وفوقهما خط ألقى أو سهم مثل  $(\vec{AB} \text{ or } \overrightarrow{AB})$  مع مراعاة مطابقة ترتيب الحرفين لاتجاه سهم المتجه. أيضاً يرمز له بالرمز  $V$  ويمثل طوله بالمقدار  $V$  ويرسم فوقه خط مستقيم له رأس سهم يشير إلى اتجاهه. ويكتب بخط خفيف مائل (إيطالي)  $V$  معبراً عن قيمته بينما تستعمل الكتابة العاقمة في حالة الكميات المتجه

وتصنف المتجهات إلى ثلاثة أصناف هي متجهات حرة ، منزلة أو ثابتة.

### ٣ - أنواع المتجهات :

#### ١- المتجه الحر (Free vector)

وهو غير مقيد باتجاه وحيد في الفضاء ومثل ذلك الجسم المتحرك بدون دوران تعتبر حركة أى نقطة من الجسم أو إزاحتها كمتجه. ويعين المتجه الحر في المستوى كميّتان قياسيتان هما المقدار  $a$  والميل  $\alpha$  أو مركباته الأفقية  $a_x$  والرأسية  $a_y$  أما في الفراغ فتلزم لتعين المتجه الحر ثلاث كميات قياسية هي مركباته في اتجاهات المحاور الكرتيزية  $(x, y, z)$  مثلاً.



## ٢- المتجه المقيد بخط عمل (المنزلق) (Line-bound vector)

وهو المتجه الذى يتقيد باتجاه معين فى الفضاء وتتجه الكمية باتجاهه. ولهذا يجوز عند دراسة التأثير الخارجى لقوة ما على جسم صلب أن تطبق هذه القوة على أى نقطة على امتداد خط عملها دون أن يتغير تأثيرها على الجسم ككل. يلزم لتحديد تلك المتجه فى المستوى ثلاث كميات قياسية هى المقدار وتقاطع خط العمل مع محورى الأحداثيات مثلاً.

## ٣- المتجه المقيد بنقطة تأثير (الثابت) (Point-bound vector)

وهو المتجه المقيد بنقطة ثابتة فى الفضاء وعليه يشغل المتجه فى هذه الحالة موقعاً محدداً فى الفضاء ، ويحدد المستوى اربع كميات قياسية هى أحداثيات نقطة تأثير ومقدار وميل المتجه ومن أمثلتها القوة المؤثرة على جسم مرن أو مائع.

ومن المتعارف عليه أن المتجهات لها مقداراً واتجاهاً كما أنها تخضع لقانون متوازى الاضلاع عند التركيب لتلك المتجهات (جمع أو طرح)

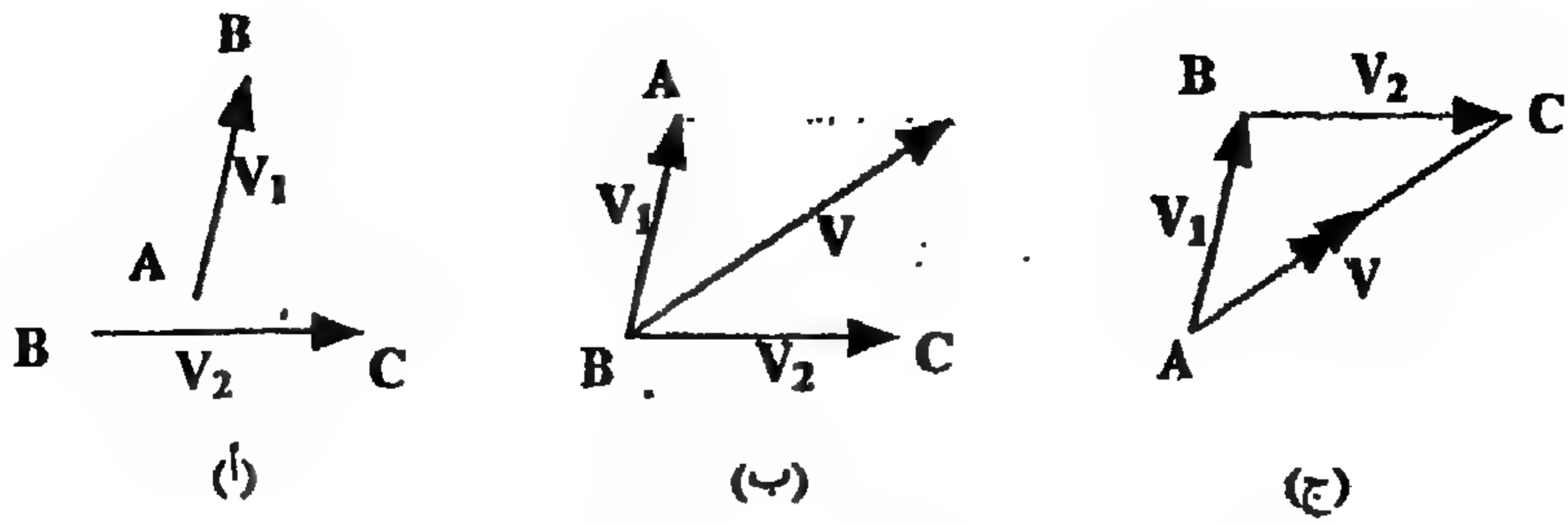
## ٤ - جمع المتجهات :

فإذا فرض أن هناك متجهين  $\overline{AB}$  وآخر  $\overline{BC}$  ويرمز لها  $V_1$  و  $V_2$  على الترتيب كما فى الشكل (١) وبمعاملة كلا من  $V_1$  و  $V_2$  على أنهما متجهين حريين فيجوز استبدالهما بالمتجه المكافئ  $V$  الذى يمثل قطر متوازى الاضلاع المكون  $V_1$  و  $V_2$  كضلعين له كما فى الشكل (١ب) ويمثل هذا التركيب أو جمع المتجهات بالمعادلة:

$$V = V_1 + V_2$$

أو

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$



الشكل (١-٣)

وهو جمع لكميات ذات اتجاه وليس جمع كميات غير متجهة وعلامة + الواردة في هذه المعادلة لاتدل على جمع جبرى وإنما على التركيب للمتجهات باعتبار المتجهين  $V_1$  و  $V_2$  حريين فيمكن جمعهما باستخدام قانون المثلث بإضافة ذيل أحدهما إلى رأس الآخر كما هو فى الشكل (١ ج) للحصول على المتجه المكافئ ولذا تبديل ترتيب جمع المتجهات لا يؤثر على حاصل الجمع وبعبارة أخرى

$$V_1 + V_2 = V_2 + V_1$$

ويمكن تصميم فكرة جمع المتجهين على أى عدد من المتجهات بما يسمى مضلع المتجهات ABCDE والممثل بالمتجهات  $V_1, V_2, V_3, V_4$  والمحصلة  $V$  حيث المعادلة

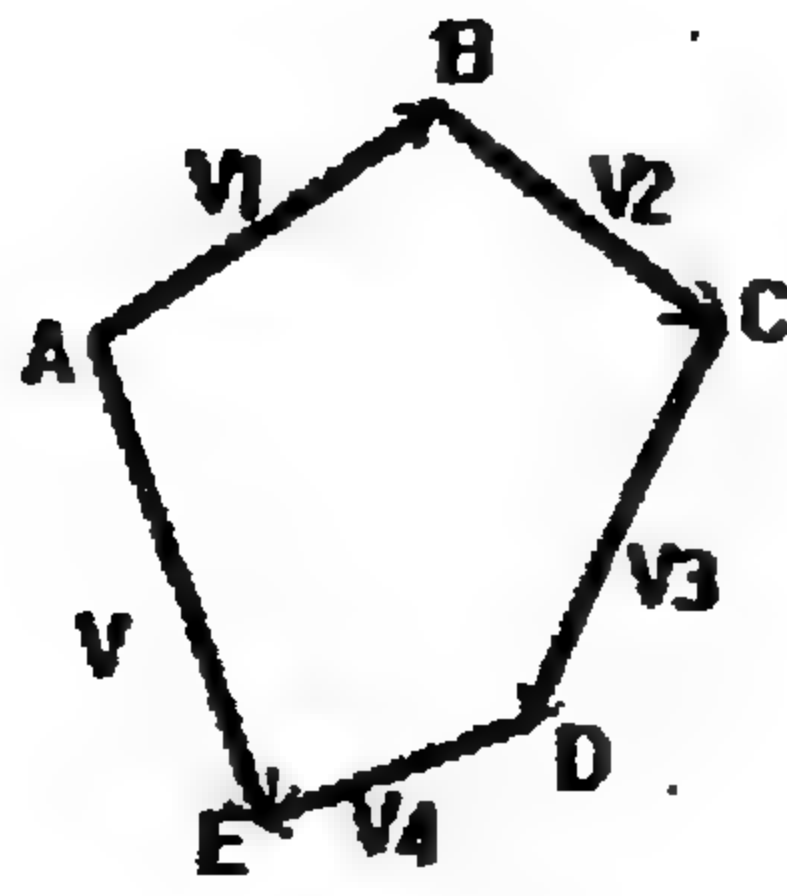
$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$$

أو

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

المعادلة تدل على أن المتجه AE أو  $V$  هو محصلة المتجهات الأربعة الأخرى على عین المعادلة ويراعى الانتقال على أضلاع المضلع فى اتجاه دائرى واحد وأن تكون المحصلة هى المتجه القابل للمضلع أى الواصل بين أول و آخر نقطه فيه شكل (١-٤)





شكل (١ - ٤)

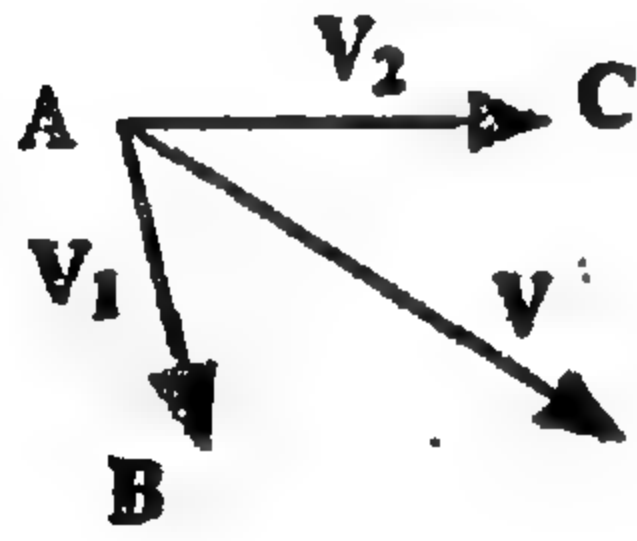
## ٥ - طرح المتجهات :

يمكن الحصول على طرح المتجهين  $V_1 - V_2$  وبسهولة وذلك بإضافة  $V_1$  إلى  $V_2$  أنظر شكل (٥-١) طبقاً لقانون متوازي الأضلاع أو قانون المثلث ويعبر عادة عن الفرق  $V$  بين المتجهين بالمعادلة  
الاتجاهية التالية

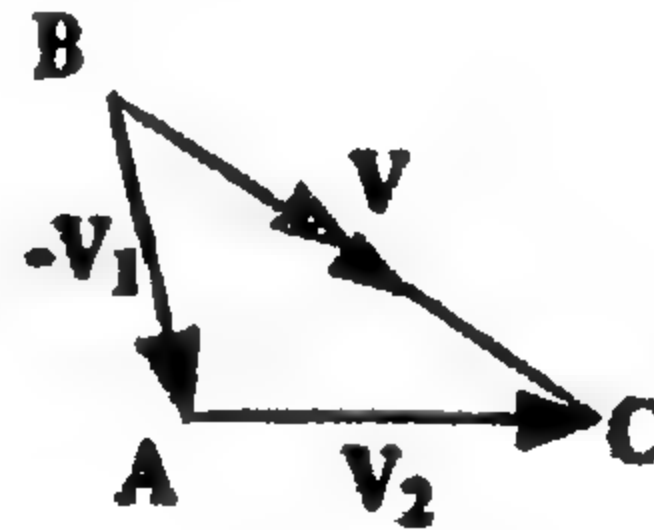
$$V = V_1 + V_2$$

حيث تعنى العلامة السالبة أمام المتجه عكس اتجاه الانتقال عليه أى عكس سهمه وبذلك يكون

$$\overline{AB} = -\overline{BA}$$



(أ)



(ب)

الشكل (٥-١)

## ٦ - استعمال فكرة جمع المتجهات في حل بعض

### المسائل الهندسية:

يمكن الاستعانة بفكرة جمع المتجهات في اثبات بعض المسائل الهندسية كمسألة وقوع ثلاث نقط على استقامة واحدة فمثلا ثلاث نقط  $A, B, C$  تقع على استقامة واحدة اذا تحققت المعادلة الاتجاهية الآتية:

$$\overline{AB} = n \cdot \overline{AC}$$

وفيها  $n$  كمية قياسية عددية، بمعنى المعادلة السابقة أن المتجهين  $\overline{AB}$  ،  $\overline{AC}$  متوازيان والنسبة بين مقدارها هي  $n$  ولما كان المتجهان مشتركين في النقطة  $A$  وجب أن يكونا على استقامة واحدة.

## ٧ - ضرب كمية قياسية في كمية متجهة :

إذا ضربت كمية متجهة  $a$  في كمية قياسية  $n$  أنتج ذلك كمية متجهة موازية للأولى مقدارها  $n$  من المرات مقدار الأولى. وكذلك قسمة المتجه  $a$  على كمية قياسية  $n$  يعطي متجها موازيا للأول مقداره

$$\frac{a}{n}$$

ويمكننا بناء على ما تقدم أن نجزم بصحة القوانين الأساسية الآتية فيما يتعلق بجمع المتجهات:

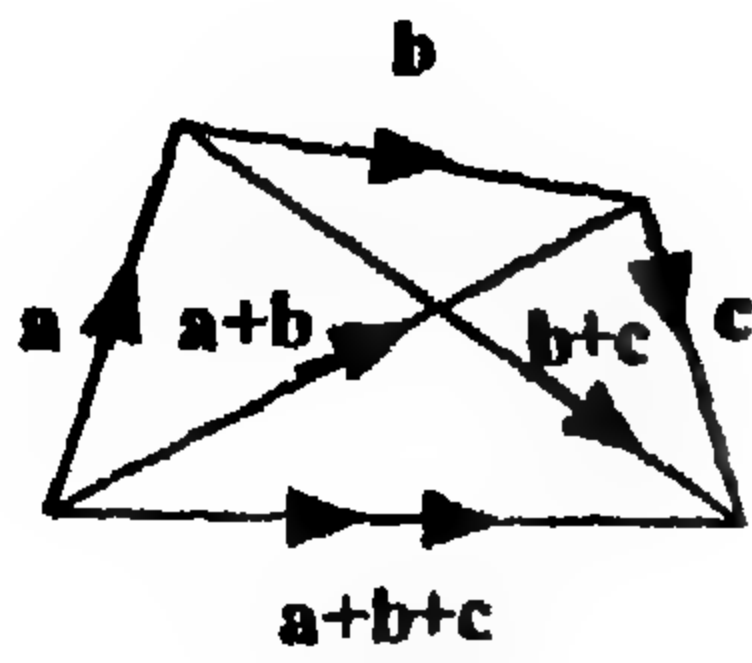
$$(I) \quad a + b = b + a$$

$$(II) \quad (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

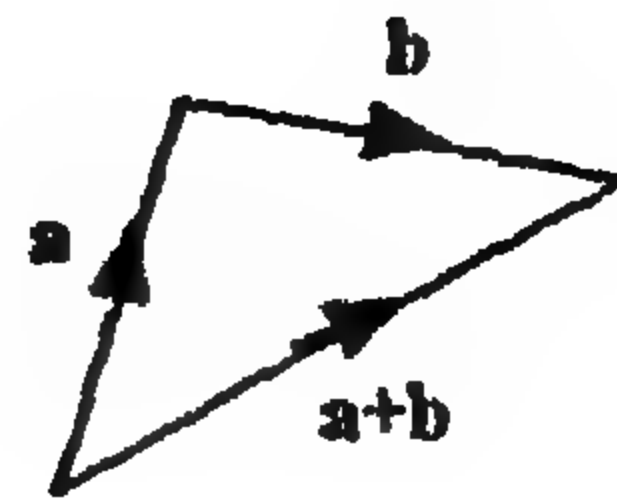
$$(III) \quad m[a + b] = ma + mb$$

والبراهين واضحة في الشكل (١-٦) ، ب ، ج

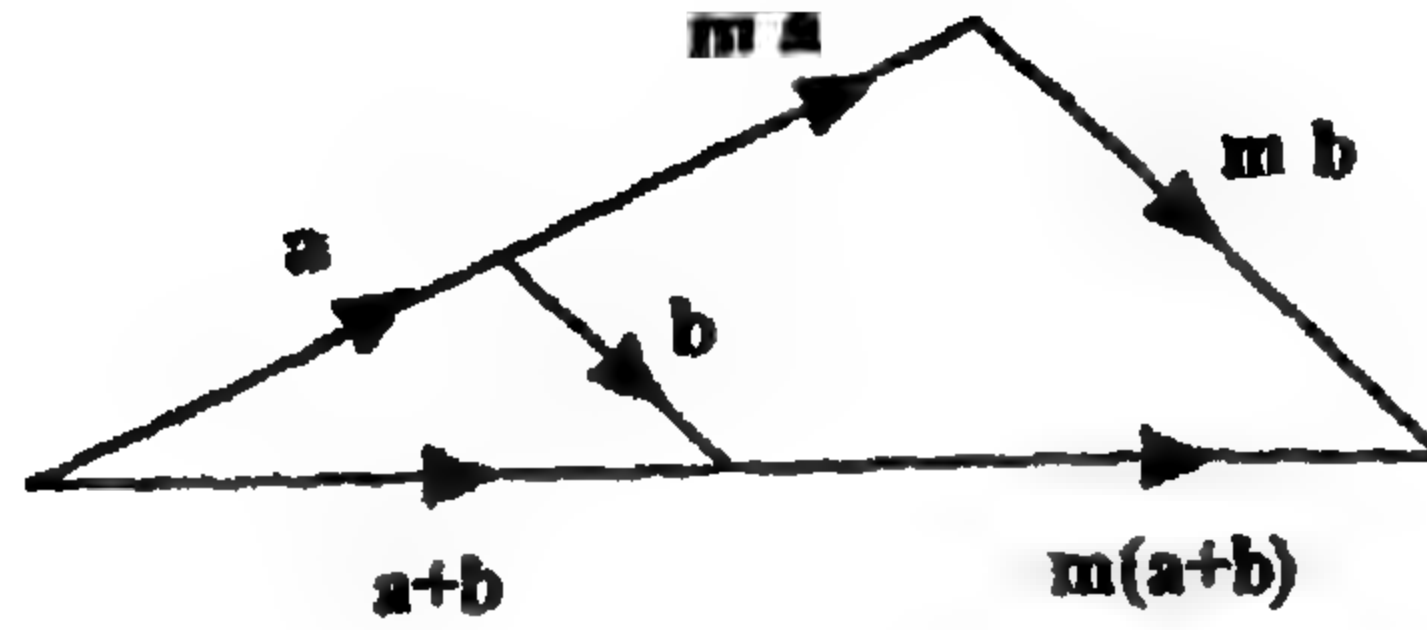
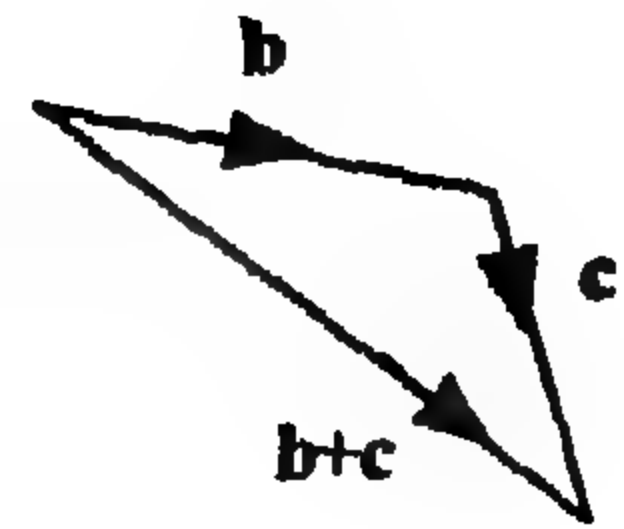




(ψ)



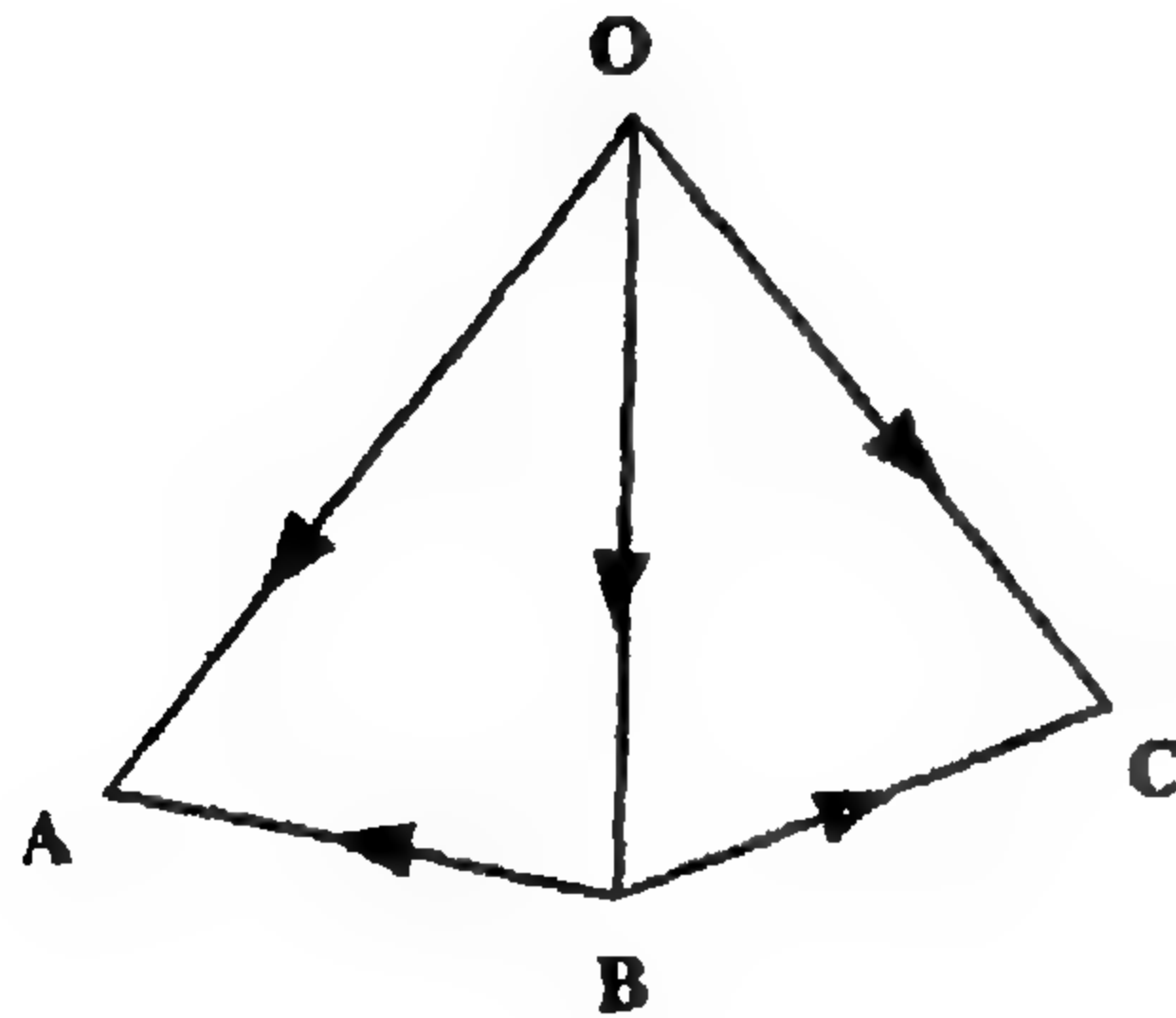
(θ)



(→)

شكل (١-٦) القوانين الأساسية في جمع المتجهات

أمثلة توضيحية:



(١) إذا تحققت المعادلتان الآتيتان

$$p \cdot OA + q \cdot OB + r \cdot OC = 0$$

$$\& p + q + r = 0$$

بالنسبة إلى المتجهات المينة بشكل

(١-٩)

فأثبت أن النقط الثلاثة  $A, B, C$  على استقامة واحدة علما بأن الكميات  $(p, q, r)$  كميات قياسية.

الحل:

$$\begin{aligned} & p \cdot \overrightarrow{OA} + q \cdot \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= p \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}) + q \cdot \overrightarrow{OB} + r \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= (p + q + r) \overrightarrow{OB} + p \cdot \overrightarrow{BA} + r \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= 0 + p \cdot \overrightarrow{BA} + r \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} = -\frac{r}{p} \cdot \overrightarrow{BC}$$

وهو الشرط اللازم لوقوع النقط الثلاثة  $(A, B, C)$  على استقامة واحدة

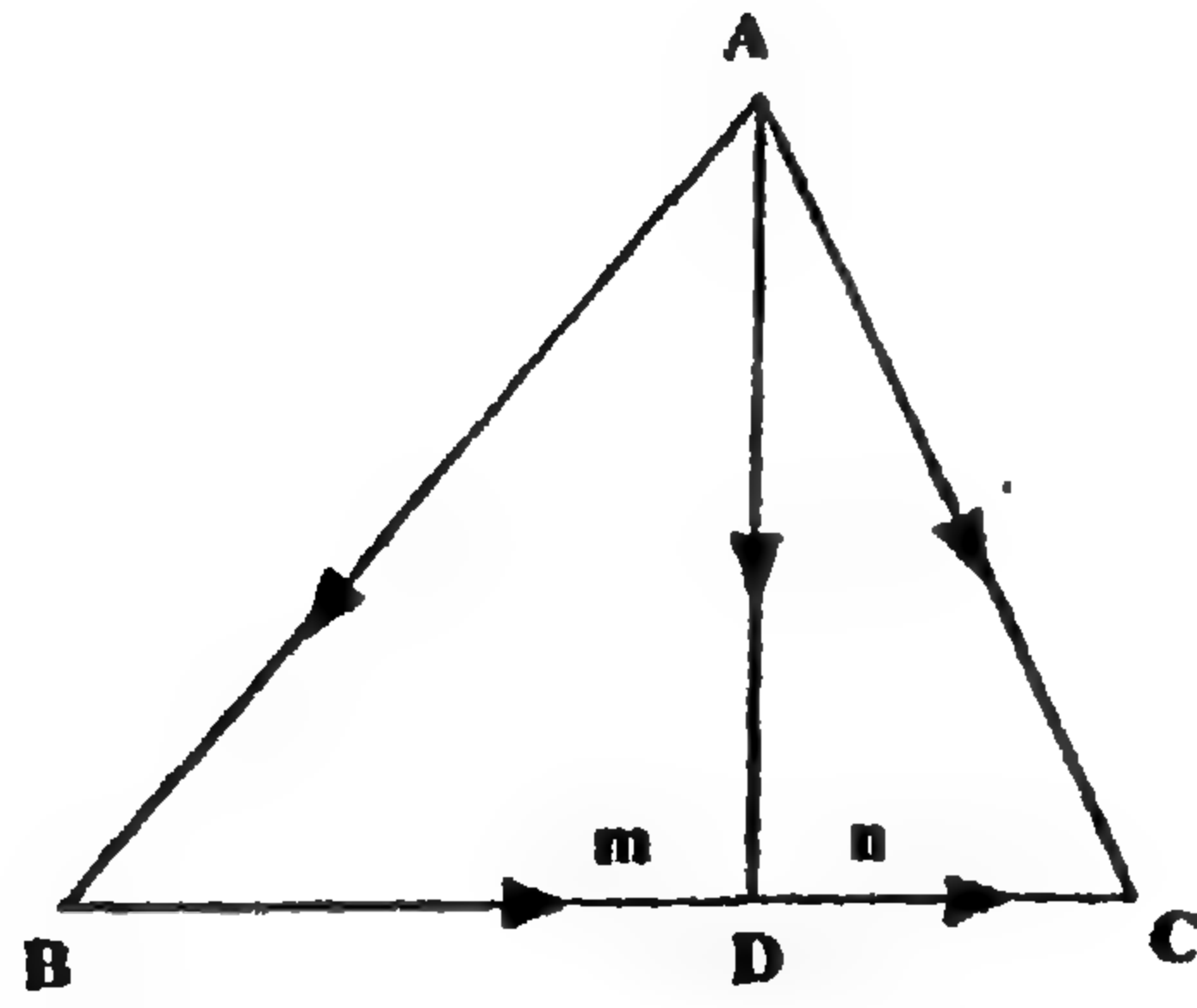
(٢) نظرية إذا قسمت قاعدة المثلث  $(A B C)$  في نقطة  $D$  بنسبة  $\frac{m}{n}$  فأثبت أن

$$m \cdot \overrightarrow{AC} + n \cdot \overrightarrow{AB} = (m + n) \overrightarrow{AD}$$

الحل

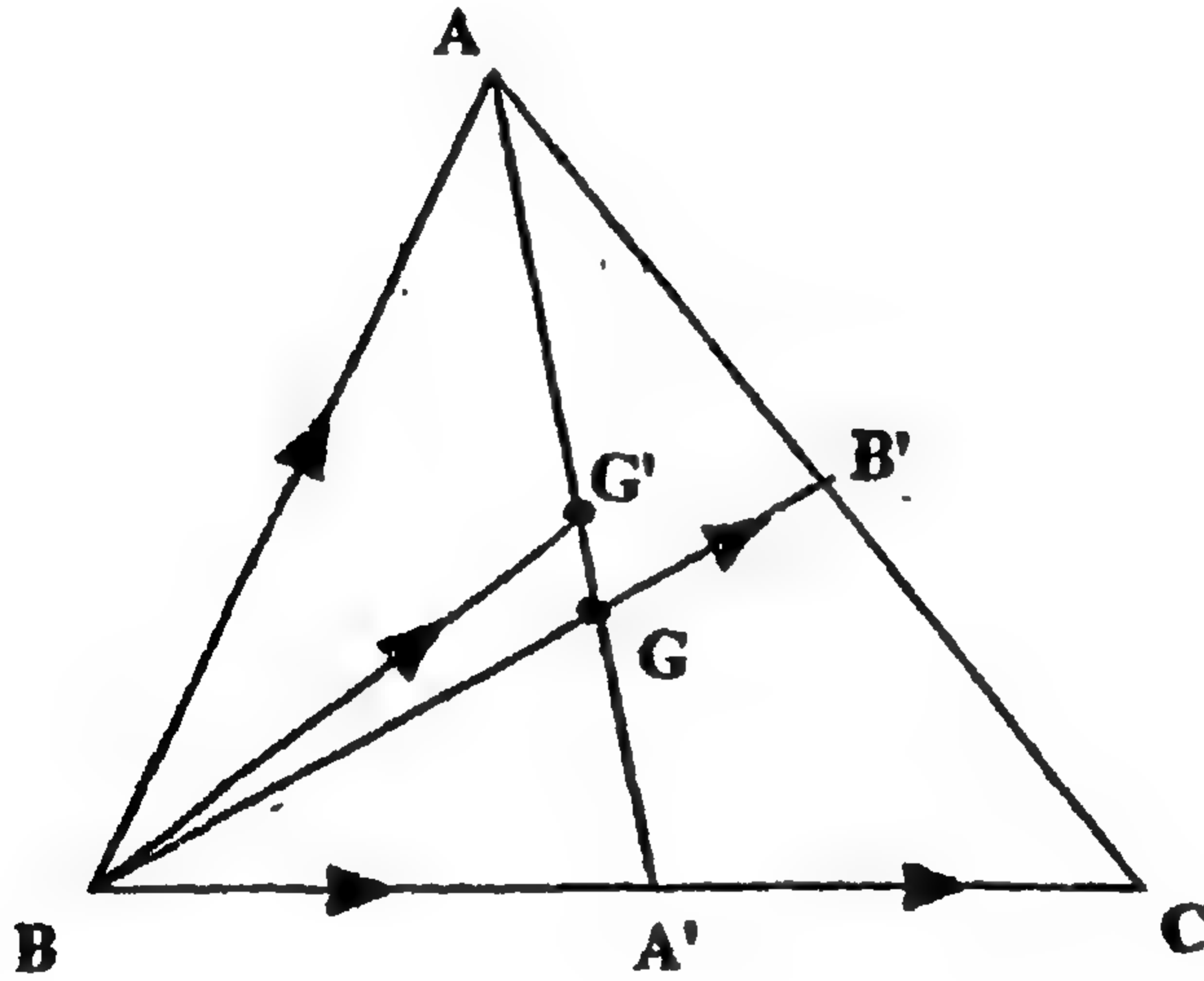
$$\begin{aligned} & m \cdot \overrightarrow{AC} + n \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= m \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + n \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \\ &= (m + n) \overrightarrow{AD} + (m \cdot \overrightarrow{DC} + n \cdot \overrightarrow{DB}) \\ &= (m + n) \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$





والقوس الأخرى تختلِف بسبب تقسيم القاعدة بالنسبة  $\frac{m}{n}$

(٣) أثبت أن المستقيمات المتوسطة في المثلث تتلاقى في نقطة واحدة تقسم كلا منها بنسبة ١ : ٢ .



الحل:

نفرض أن  $AA'$  ،  $BB'$  مستقيمان متوسطان في المثلث  $A B C$  تلتقيان في  $G$ . إن لم تقسم  $G$  المستقيم  $AA'$  بالنسبة ١ : ٢ نفرض أن أخرى  $G'$  تقسمه بنسبة ١ : ٢ .

يُطبق نتيجة النظرية (٢) على كل من المثلثين  $AA'B$  ،  $ABC$  على الترتيب نحصل على:

$$1.\overline{BA} + 2.\overline{BA'} = (1+2).\overline{BG'}$$

$$1.\overline{BA} + 1.\overline{BC} = (1+1).\overline{BB'}$$

ومن المعادلة الأولى

$$\overline{BA} + \overline{BC} = 3.\overline{BG'}$$

ومن المعادلة الثانية

$$\overline{BA} + \overline{BC} = 2.\overline{BB'}$$

$$\therefore 3.\overline{BG'} = 2.\overline{BB'}$$

$$\therefore \overline{BB'} = \frac{3}{2}\overline{BG'}$$

وهذه تعني انطباق المتجه  $\overline{BB'}$  على المتجه  $\overline{BG'}$  وأن مقدار الأول يساوي مرة ونصف مقدار الآخر وعليه فالنقطة  $G'$  تقع على  $G$  وتنقسم  $AA'$  بنسبة ١ : ٢

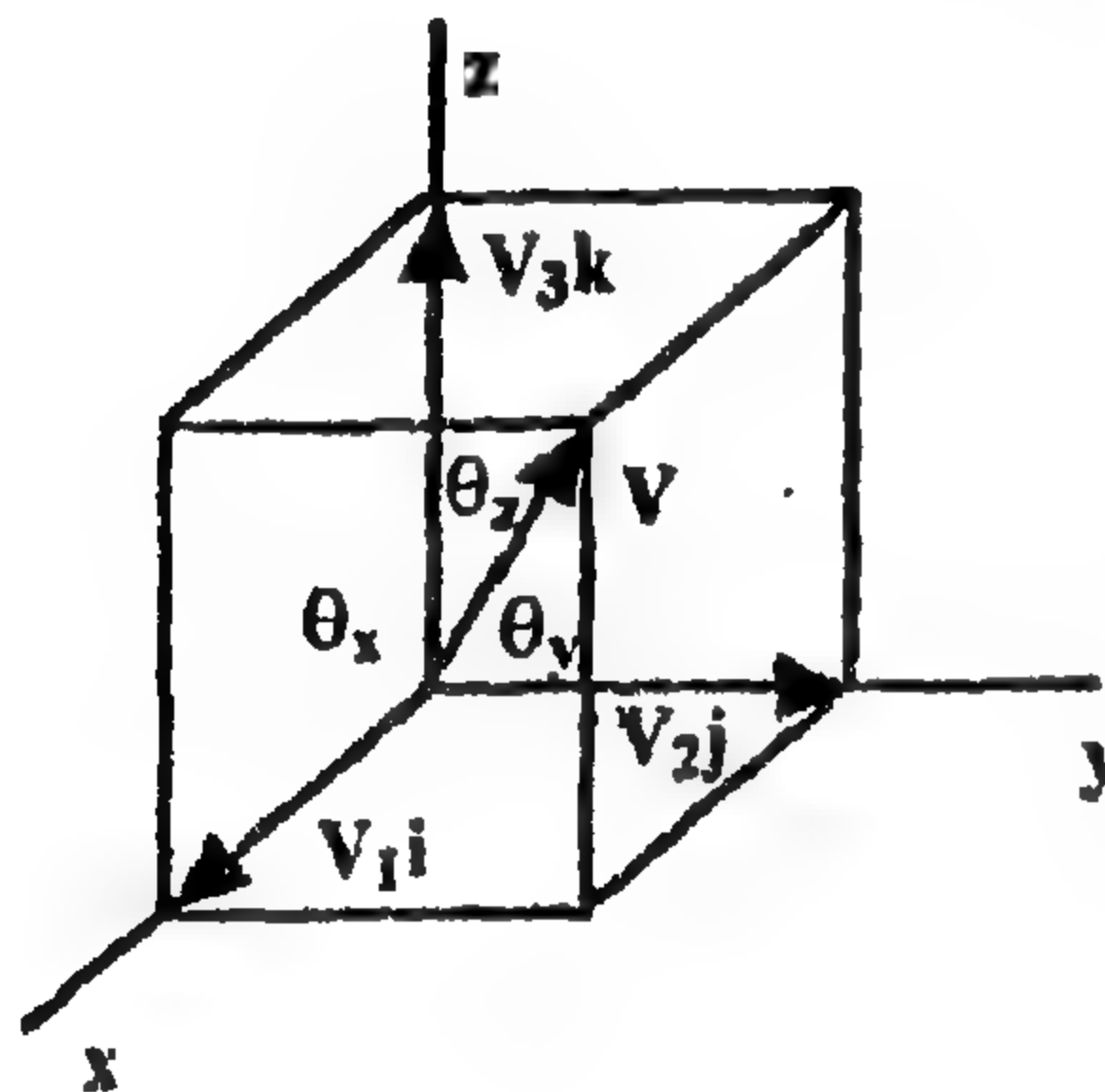
ويمكن التعميم على المستقيم المتوسط الثالث  $\overline{CC'}$  وهذا يثبت المطلوب.



## ٨ - الوحدات المتجهة الأساسية (i,j,k) :

هي وحدات منطبقة على المحاور الكارتيذية المتعامدة (x,y,z) بحيث تنطبق الوحدة المتجهة i على المحور x وفي اتجاهه الموجب والوحدة المتجهة j تقع على المحور y وفي اتجاهه الموجب و الوحدة المتجهة k على المحور z وفي اتجاهه الموجب وتخضع اتجاهات المحاور (x,y,z) وأيضا الوحدات المتجهة (i,j,k) لقاعدة البرمجة اليمنية أى أن الانتقال من المحور (+x) الى المحور (+y) يحدث انتقالاً للبرمجة اليمنية الموازيه لمحور z فى الاتجاه الموجب له

وإذا كان لدينا متجه V له مركبات ثلاث (V<sub>1</sub>, V<sub>2</sub>, V<sub>3</sub>) فى اتجاه المحاور الكارتيذية (x,y,z) على الترتيب فإنه من الممكن التعبير عن المتجه V بالمعادلة الاتجاهية الآتية



$$V = V_1 i + V_2 j + V_3 k$$

ولها المقادير الثلاث (V<sub>1</sub>, V<sub>2</sub>, V<sub>3</sub>) كميات قياسية وتعنى بالمعادلة أن المتجه V هو محصلة متجهات ثلاثة V<sub>1</sub> i فى الاتجاه x , V<sub>2</sub> j فى الاتجاه y , V<sub>3</sub> k فى الاتجاه z وهذه طريقه يسيره للتعبير عن المتجه بدلالة مركباته القياسية

وإذا استعملت الاتجاهات l, m, n بدلالة جيب تمام الاتجاهات ينتج

$$l = \cos \theta_x, \quad m = \cos \theta_y, \quad n = \cos \theta_z$$

وتكتب المركبات المتجه كما يلى

$$V_x = lV, \quad V_y = mV, \quad V_z = nV$$

حيث أن

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

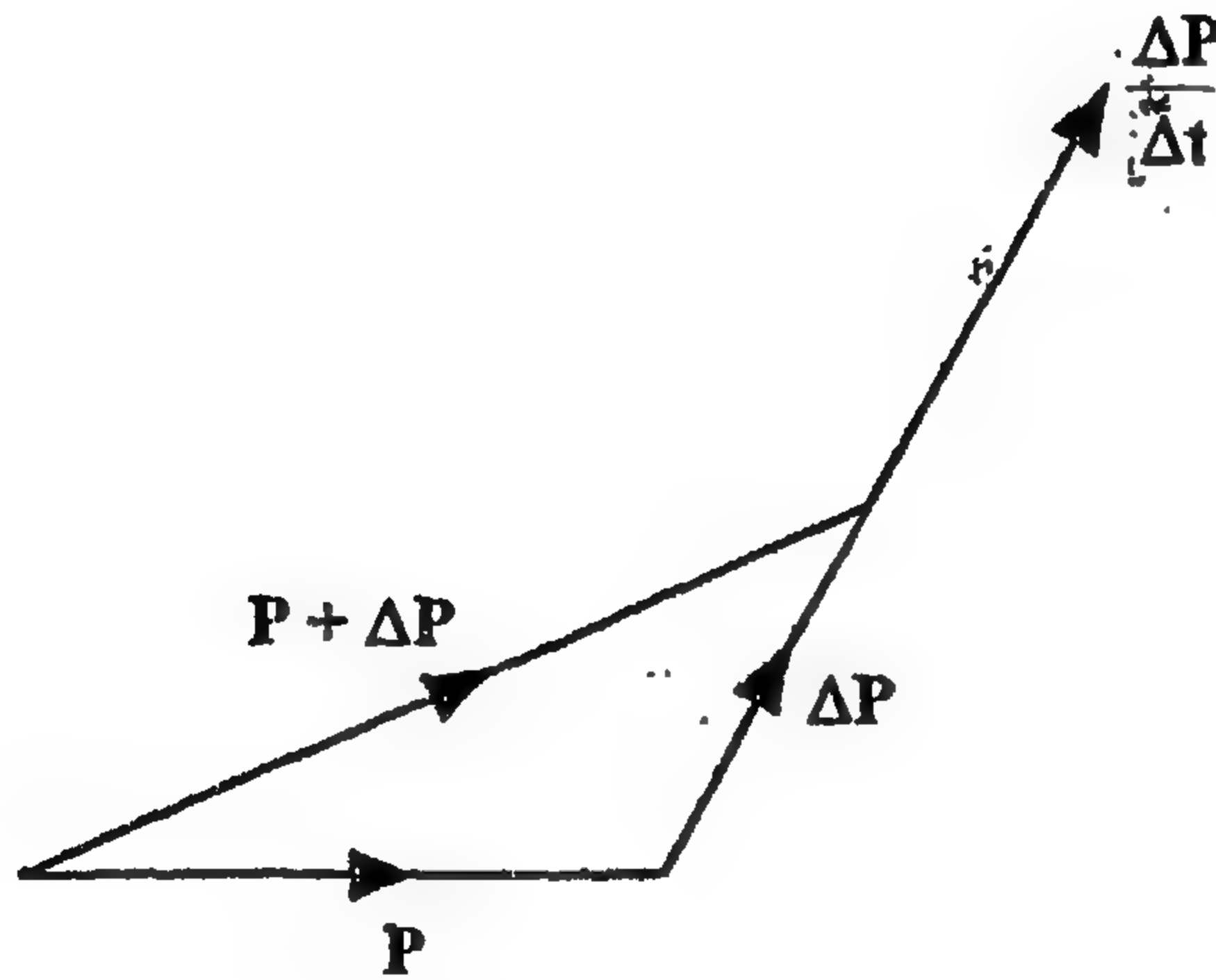
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

## ٩ - تفاضل المتجه بالنسبة للزمن

إذا أعطى المتجه المتغير  $R$  كدالة في الزمن  $t$  (وهو كمية قياسية) أمكن مفاضلة دالة المتجه بالنسبة إلى الزمن كما تفاضل الدوال العادية نظراً لأن قسمة كمية متجهة  $\Delta P$  على كمية قياسية  $\Delta t$  لن يغير من اتجاه المتجه  $\Delta P$  بل من مقداره فقط (شكل ١ - ١٢).

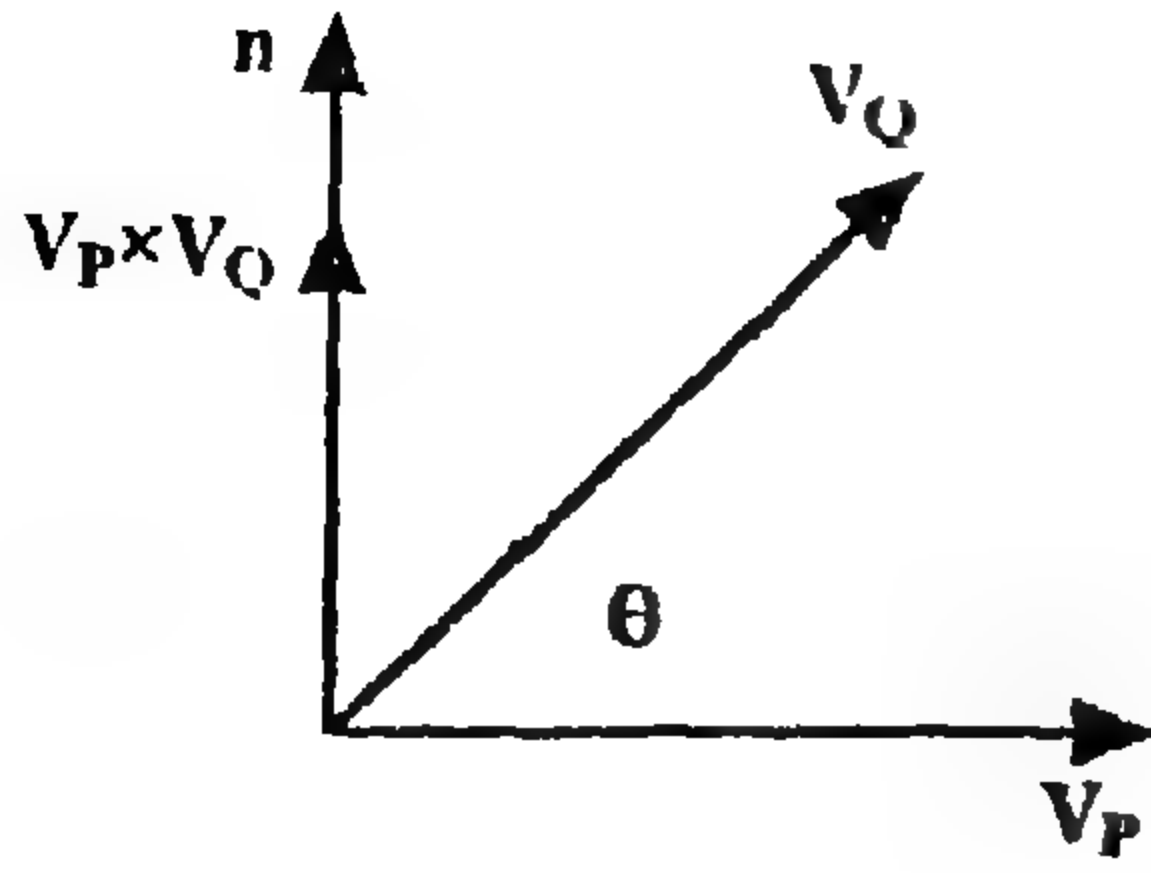
وبأخذ نهاية المقدار  $\frac{\Delta P}{\Delta t}$  عندما تقرب  $\Delta t$  من الصفر نحصل على العامل التفاضلي  $\frac{dP}{dt}$  وهي

كمية متجهة



وتسري القواعد الأساسية لتفاضل الدوال القياسية على تفاضل الدوال المتجهة إلى متغير قياسي:

## ١٠ - الضرب الاتجاهي لمتجهين :



حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين  $V_P$  ،  $V_Q$  بمتجه ثابت عمودي على كل من المتجهين و مقداره يساوي مقدار  $V_P$  في مقدار  $V_Q$  في جيب الزاوية بينهما . و يرمز لحاصل الضرب الاتجاهي بالرمز  $(V_P \times V_Q)$  أي أن

$$(V_P \times V_Q) = V_P V_Q \sin \theta n$$

فيها  $n$  وحدة متجه عمودي على المتجهين تؤلف معهما

ثلاثيا يمينا كما في الشكل و بناء على هذا فان قانون التبادل لايسري على الضرب الاتجاهي لتنبه ترتيب المتجهين يغير مهم النتيجة .

$$(V_P \times V_Q) = -(V_Q \times V_P)$$

و تبعا لتعريف حاصل الضرب الاتجاهي، لمتجهين يمكن كتابة النتائج الآتية لضرب الوحدات المتجهة الرئيسيه ضرب اتجاهياً

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k , j \times k = i , k \times i = j$$

## ١١ - الضرب القياسي لمتجهين :

يعرف حاصل الضرب القياسي لمتجهين  $V_P$  ،  $V_Q$  بأنه الكمية القياسية الناتجة من ضرب مقدار الأولى في مقدار الثانية في جيب تمام الزاوية بينهما . أو بعبارة أخرى حاصل ضرب أحدهما في مسقط الآخر عليه . و يرمز لحاصل الضرب بالرمز  $V_P \cdot V_Q$

$$V_P \cdot V_Q = V_P \cdot V_Q \cos \theta$$



و يطبق الضرب القياسي لتجهين في تعريف الشغل فإن الشغل المبذول لقوة  $F$  انتقلت نقطة تأثيرها انتقال صغير  $\Delta S$  بحاصل ضرب مقدار القوة  $F$  في مقدار  $\Delta S$  في جيب تمام الزاوية بينهما و يكون الشغل الصغير  $\Delta W$

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} \cos \theta$$

و من هنا يتضح تطبيق قانون التبادل و التوزيع على الصورتين

$$\begin{aligned} \vec{V}_P \cdot \vec{V}_Q &= \vec{V}_Q \cdot \vec{V}_P \\ \vec{V}_P (\vec{V}_Q + \vec{R}) &= \vec{V}_P \cdot \vec{V}_Q + \vec{V}_P \cdot \vec{R} \end{aligned}$$

و المعادلة الأخيرة المعبرة عن قانون التوزيع ليست إلا صورة لقانون الإسقاط . فمسقط محصلة  $\vec{V}_Q$  على  $\vec{V}_P$  يساوي مجموع مسقطي  $\vec{V}_Q$  على  $\vec{V}_P$  ،  $\vec{R}$  على  $\vec{V}_P$  ،  $\vec{R}$  على  $\vec{V}_P$  .

و للحصول على ناتج الضرب القياسي لتجهين  $\vec{V}_P$  ،  $\vec{V}_Q$  بدلالة مركباتهما تتبع طريقة الوحدات المتجهة الأساسية  $i, j, k$  السابق شرحها من قبل و يمكن التعبير عن المتجهين  $\vec{V}_P$  ،  $\vec{V}_Q$  بدلالة مركباتهما و الوحدات المتجهة الأساسية على الوجه الآتي :

$$\begin{aligned} \vec{V}_P &= V_{P_1} \vec{i} + V_{P_2} \vec{j} + V_{P_3} \vec{k} \\ \vec{V}_Q &= V_{Q_1} \vec{i} + V_{Q_2} \vec{j} + V_{Q_3} \vec{k} \end{aligned}$$

و فيها  $(V_{P_1}, V_{P_2}, V_{P_3})$  هي مركبات المتجه  $\vec{V}_P$  في اتجاهات المحاور الكارتيزية المتعامدة  $(x, y, z)$  و كذلك بالنسبة إلى  $\vec{V}_Q$  . و تبعاً لتعريف حاصل الضرب القياسي لتجهين يمكن كتابة النتائج الآتية لضرب الوحدات المتجهة الأساسية ضرب قياسي :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

## أمثلة محلولة

مثال ١ :

أوجد تحليليا محصلة متجهات

$$\underline{a} \equiv (10, 30^\circ), \underline{b} \equiv (30, 60^\circ), \underline{c} \equiv (10, 210^\circ)$$

الحل

بكتابة كل متجه بدلالة مركبتيه

$$a_x = 10 \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}, \quad a_y = 10 \sin 30^\circ = 5$$

$$b_x = 30 \cos 60^\circ = 15, \quad b_y = 30 \sin 60^\circ = 15\sqrt{3}$$

$$c_x = 10 \cos 210^\circ = -5\sqrt{3}, \quad c_y = 10 \sin 210^\circ = -5$$

$$\underline{a} = 5\sqrt{3} \mathbf{i} + 5 \mathbf{j}$$

$$\underline{b} = 15 \mathbf{i} + 15\sqrt{3} \mathbf{j}$$

$$\underline{c} = -5\sqrt{3} \mathbf{i} - 5 \mathbf{j}$$

$$\underline{R} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$$

$$= (5\sqrt{3} + 15 - 5\sqrt{3}) \mathbf{i} + (5 + 15\sqrt{3} - 5) \mathbf{j}$$

$$= 15 \mathbf{i} + 15\sqrt{3} \mathbf{j}$$

$$\therefore |\underline{R}| = \sqrt{(15)^2 + (15\sqrt{3})^2} = 30$$

$$\tan \theta = \sqrt{3} \therefore \theta = 60^\circ, \underline{R} \equiv (30, 60^\circ)$$

مثال (٢)

$$\underline{a} = -3 \mathbf{i} - 2 \mathbf{j}, \quad \underline{b} = 2 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}, \quad \underline{c} = \sqrt{3} \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

إذا كان

أوجد المتجه  $R = 2\underline{a} + 3\underline{b} - 5\underline{c}$

الحل

$$\begin{aligned} R &= +2(-3i - 2j) + 3(2i + 3j) - 5(\sqrt{3}j + j) \\ &= -5\sqrt{3}i + 0j \end{aligned}$$

$$\therefore R = \sqrt{(-5\sqrt{3})^2 + 0} = 5\sqrt{3}$$

$$\tan \theta = \frac{0}{-5\sqrt{3}} = 0 \quad \therefore \theta = 180^\circ$$

$$\therefore R \equiv (5\sqrt{3}, 180^\circ)$$

مثال (٣) اذا كان

$$\underline{a} = 2i + 5j + 8k$$

$$\underline{b} = 2i + 1j + 2k$$

$$\underline{c} = -i - 2j + 2k$$

أوجد  $R$  حيث  $R = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$

الحل:

$$\begin{aligned} R &= (2 + 2 - 1)i + (5 + 1 - 2)j + (8 + 2 + 2)k \\ &= 3i + 4j + 12k \end{aligned}$$

$$\therefore R = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (12)^2} = 13$$

$$\cos \alpha_R = \frac{3}{13}, \cos \beta_R = \frac{4}{13}, \cos \gamma_R = \frac{12}{13}$$



#### مثال (٤)

إذا كان

$$\underline{r}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\underline{r}_2 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$\underline{r}_3 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{R} = 2\underline{r}_1 - 3\underline{r}_2 - 5\underline{r}_3 \quad \text{أوجد المتجه}$$

الحل

$$\mathbf{R} = 2(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 3(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) - 5(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

$$\therefore \mathbf{R} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

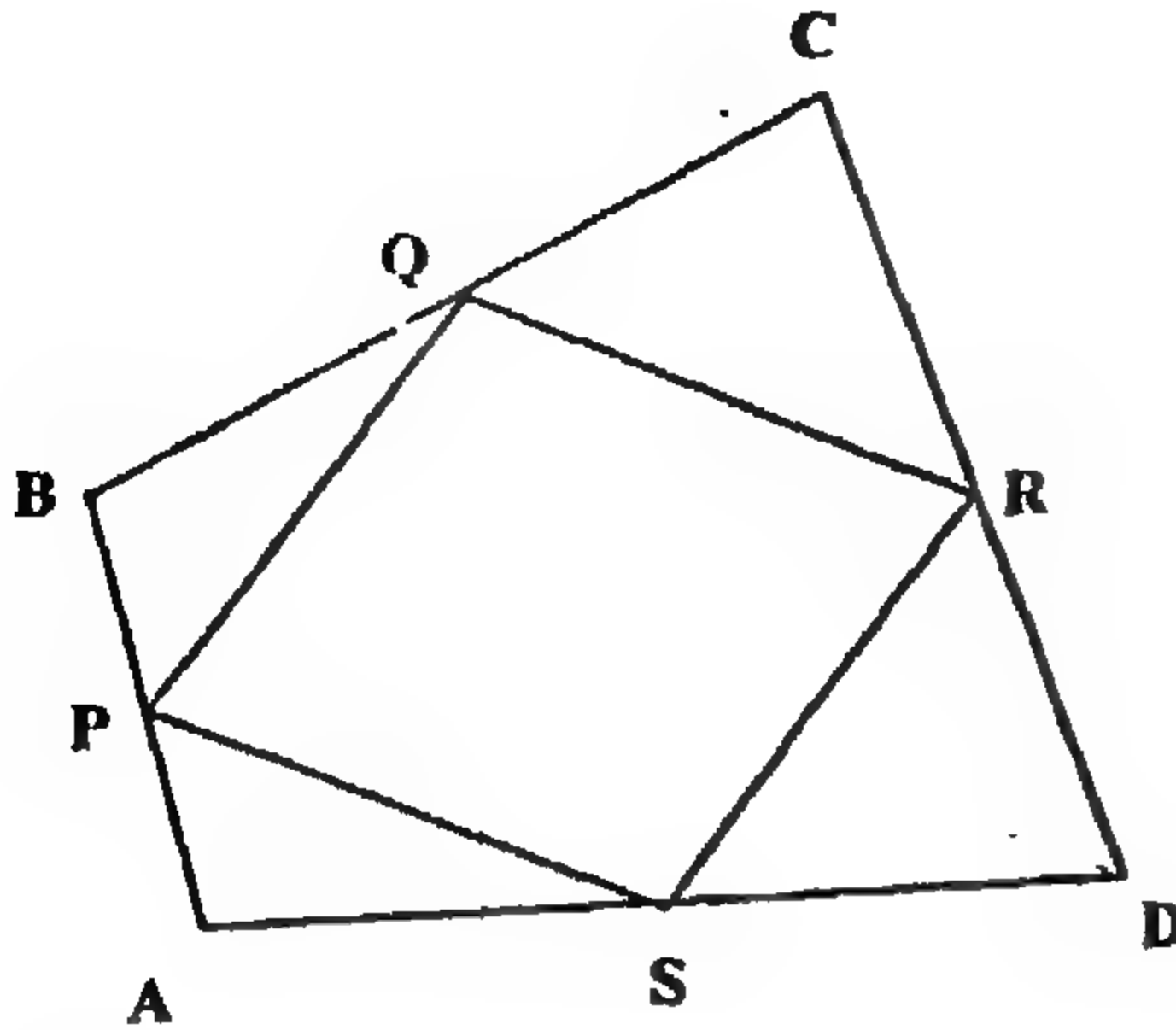
$$R = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{30}$$

$$\cos \alpha_R = \frac{5}{\sqrt{30}}, \quad \cos \beta_R = \frac{-2}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma_R = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

#### مثال (٥)

اثبت أنه إذا وصلت نقط متصفات الأضلاع المتجاورة لأي شكل رباعي بخطوط مستقيمة ..  
فإن الشكل الرباعي الناتج يكون متوازي أضلاع.

الحل:



ليكن الشكل الرباعي المعطى  
ABCD بنقط منتصفات الأضلاع  
التجاورة هي P , Q , R , S كما  
بالشكل بالنظر إلى الشكل يتج  
الآتي

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \frac{1}{2} \vec{AC} \\ &= \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC}) \dots \dots \dots (1)\end{aligned}$$

وبالمثل

$$\vec{QR} = \frac{1}{2} (\vec{BC} + \vec{CD}) \dots \dots \dots (2)$$

$$\vec{RS} = \frac{1}{2} (\vec{CD} + \vec{DA}) \dots \dots \dots (3)$$

$$\vec{SP} = \frac{1}{2} (\vec{DA} + \vec{AB}) \dots \dots \dots (4)$$

بجمع المعادلتين (١) ، (٣) ثم المعادلتين (٢) ، (٤) مع مراعاة أنه  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$

$$\vec{PQ} + \vec{RS} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}) = \vec{0}$$

$$\vec{QR} + \vec{SP} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}) = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{PQ} = -\vec{RS} , \vec{QR} = -\vec{SP}$$

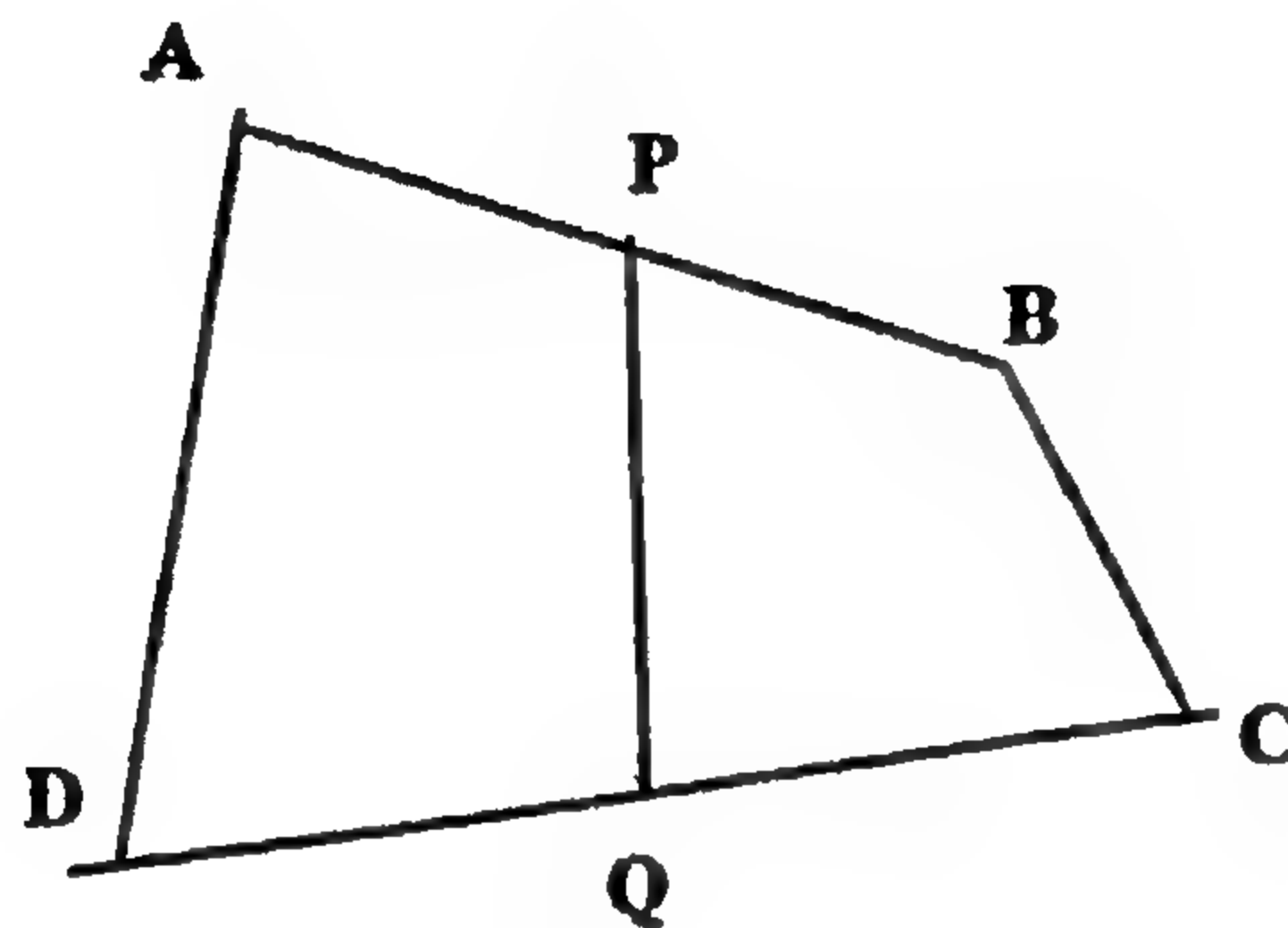
$$\vec{PQ} = \vec{SR} , \vec{QR} = \vec{PS}$$

أو

وهذا يعني أنه في الشكل الرباعي PQRS كل ضلعين متقابلين متساويين ومتوازيين أي أن متوازي أضلاع.

مثال (٦)

في الشكل الرباعي ABCD .. إذا كانت نقطة P هي نقطة منتصف AB ونقطة Q هي منتصف CD .. أثبت أن  $\vec{AD} + \vec{BC} = 2\vec{PQ}$



الحل

واضح من الشكل أنه

$$\vec{AD} = \vec{AQ} + \vec{QD}$$

$$\vec{BC} = \vec{BQ} + \vec{QC}$$

وبالجمع ينتج أن

$$\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{AQ} + \vec{BQ} + \vec{QD} + \vec{QC}$$

حيث أنه Q هي منتصف DC



$$\therefore \vec{QD} = -\vec{QC}$$

$$\therefore \vec{AD} + \vec{BC} = \vec{AQ} + \vec{BQ}$$

وحيث أن P هي منتصف AB

$$\therefore \vec{AQ} + \vec{BQ} = 2\vec{PQ}$$

وهذا يعني أنه

$$\vec{AD} + \vec{BC} = 2\vec{PQ}$$

وهو المطلوب اثباته

مثال (٧)

أوجد قيمة  $\mu$  لكي يكون المتجهان الآتيان متعامدين

$$\underline{a} = 2\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\underline{b} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mu\mathbf{k}$$

الحل

بما أن شرط تعامد المتجهين هو

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$$

وهذا يعني أن

$$2(4) + (\mu)(-2) + (1)(-2\mu) = 0$$

$$8 - 2\mu - 2\mu = 0$$

ومنها  $\mu = 2$

## مثال (٨)

بين أن المتجهات

$$\underline{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\underline{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\underline{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

تكون مثلثا قائم الزاوية

الحل



المتجهات  $a, b, c$  ستكون مثلثا اذا كان

أحد المتجهات هو مجموع المتجهين الآخرين



أو مجموع المتجهات الثلاثة = صفر

بالمجاورة سنجد أن

$$\underline{a} = \underline{b} + \underline{c}$$

∴ المتجهات ستكون مثلثا .. ولإثبات أنه قائم الزاوية نحسب حاصل الضرب القياسي

للمتجهات متى متى ينتج أن

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (3)(1) + (-2)(-3) + (1)(5) \neq 0$$

$$\underline{b} \cdot \underline{c} = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(-4) \neq 0$$

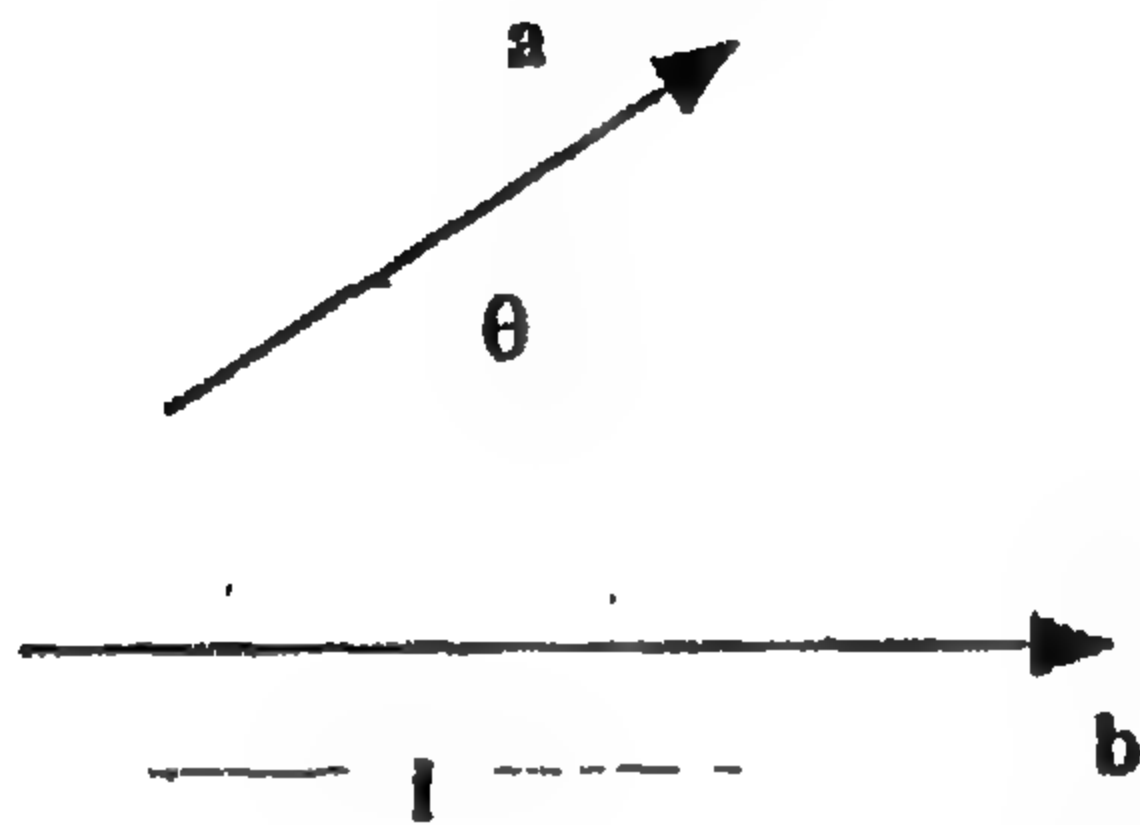
$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = (2)(3) + (1)(-2) + (-4)(1) = 0$$

∴ في المثلث الناتج يكون المتجه  $\mathbf{a}$  عموديا على المتجه  $\mathbf{c}$  أي أن المتجهات المعطاة تكون مثلثا قائم الزاوية.

## تطبيقات لحاصل الضرب القياسي لمتجهين

ولحاصل الضرب القياسي لمتجهين تطبيقات عديدة نذكر منها

### (أ) إيجاد مسقط متجه $\mathbf{a}$ على آخر $\mathbf{b}$



نفرض أن مسقط  $\mathbf{a}$  على  $\mathbf{b}$  هو  $l$  حيث

$$l = a \cos \theta$$

$$= a \cdot 1 \cos \theta$$

$$\therefore l = a \cdot b$$

وهذا يعني أن طول مسقط المتجه  $\mathbf{a}$  على المتجه  $\mathbf{b}$

يقدر بحاصل الضرب القياسي للمتجه  $\mathbf{a}$  في متجه الوحدة  $\mathbf{b}$  للمتجه  $\mathbf{b}$

مثال (٩)

أوجد مسقط المتجه

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

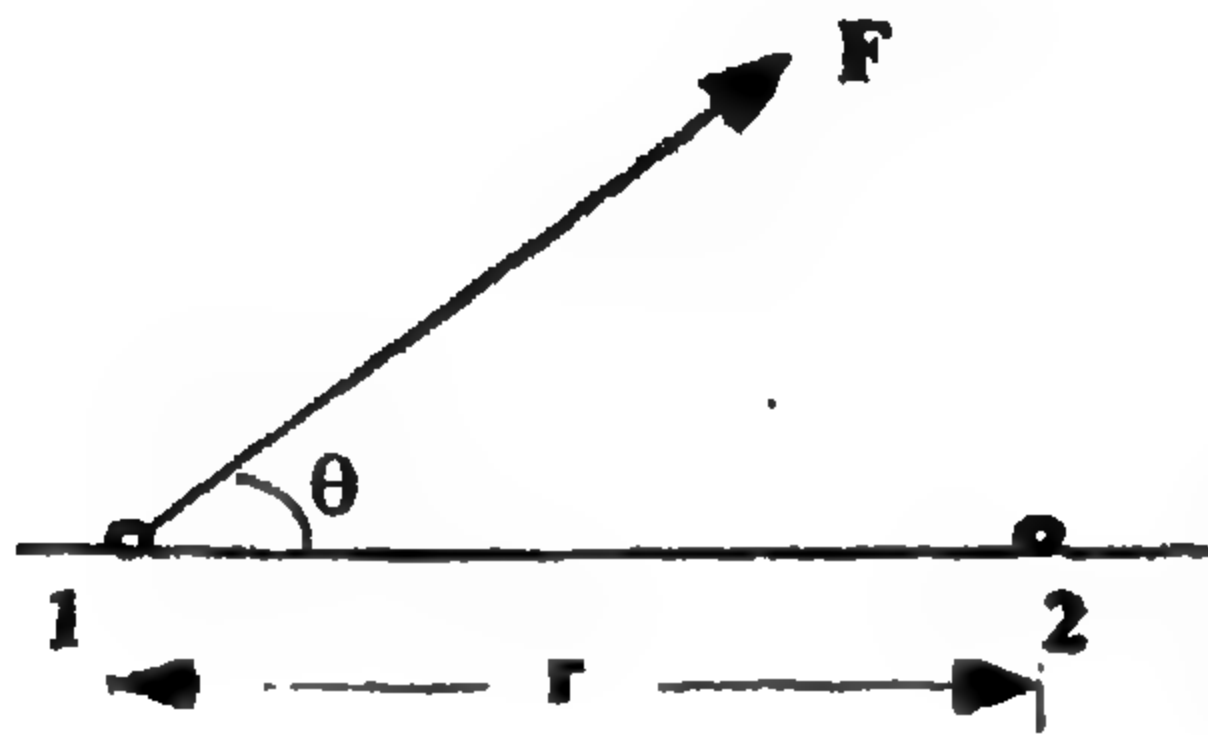
$$\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \quad \text{على المتجه}$$



$$I = \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \frac{\underline{b}}{b}$$

$$= (i - 2j + k) \cdot \left( \frac{4i - 4j + k}{\sqrt{16 + 16 + 49}} \right)$$

$$= (1)\left(\frac{4}{9}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{9}\right) + (1)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{19}{9}$$



### شغل قوة $\underline{F}$ بين موضعين

معروف أنه للقوة الثابتة المقدار  $\underline{F}$  المؤثرة على

نقطة مادية يكون الشغل المبذول به  $\underline{F}$  لتحريك النقطة

بين موضعين هو (1)، (2) البعد بينهما  $r$  هو

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= F r \cos \theta \\ &= F \cdot r \end{aligned}$$

مثال (١٥)

أوجد الشغل المبذول بالقيمة

$$\underline{F} = 2i - j - k$$

لتحريك جسم على طول المتجه  $r = 3i + 2j - 5k$

الحل

$$W = \underline{F} \cdot \underline{r}$$

$$= (2 \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + 5 \mathbf{k})$$

$$= (2)(3) + (-1)(2) + (-1)(-5)$$

$$= 9 \text{ N.m}$$

ويتضح من هذا المثال أن شغل قوة  $F$  مركباتها  $F_x$  ،  $F_y$  ،  $F_z$  تنقل نقطة تأثيرها انتقالاً صغيراً  $r$  مركباته  $x, y, z$  مساوي المجموع الجبري لشغل مركبات القوة .. ويعني ذلك أن

$$W = F_x \cdot x + F_y \cdot y + F_z \cdot z$$

# التعاريف و القوانين الأساسية

كما سبق لنا أن علم الاستاتيكا هو علم دراسة الأجسام المادية تحت تأثير الإتران من حيث سكون مستمر أو حركة منتظمة في خط مستقيم و أيضا الحركة الدورانية المنتظمة لجسم متماسك حول محور حر و لذا يجب التعرف على أسس علم الاستاتيكا و التي تشمل بعض التعاريف و القوانين الأساسية .

## ١ - التعاريف الأولية في علم الإستاتيكا:

- أ - الجسم: هو جسم تضاءلت أبعاده بحيث يمكن تمثيله بنقطة هندسية.
- ب - الجسم المتماسك: هو الجسم الذي يمكن إهمال ما يطرأ على شكله من تغيرات في دراسته المعنيه ، وبذلك تعتبر أبعاده وحجمه ثابتة ؛ ويمثل بشكل هندسي ثابت.
- ج - الجسم المرن: وهو الجسم الذي تتناسب التغيرات المستحدثه فيه والعوامل المؤثره (القوه) وفقا لقانون هوك (Hook) للتوسع في دراسة الأجسام المرنة موكل إلى نظريات المرونه . (Theoru of Elasticity)
- د - الجسم المانع المثالي: ويفترض فيه إنعدام المقاومه للقوى المماسه للأسطح الداخليه والخارجيه ( قوى القص وقوى الشد السطحي ) ، ولذا فهو لا يتخذ شكل معين فتتبع العلاقة بين الضغط والحجم قانون بويل ( Boyel ) ، او قانون شارل ( Charles ) حسب الأطوال .

هـ - الانتشار المتقطع والانتشار المتواصل: إستاتيكا لأنه يمكن اعتبار الأجسام مجموعات من الجسيمات وعندئذ تستعمل علامة  $\Sigma$  ( Sigma ) للدلالة على مجموع عدد منها.

فيعبّر عن مجموع عدد من الجسيمات  $m_i$  يكتب:

$$\sum_{i=1}^n m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$$

أما الجسم المتواصل الانتشار فيعبّر عن جزء متاهي في الصفر منه برمز التفاضل (dm) ولتجميعه برمز التكامل (dm) ، وصورة الانتشار المتواصل هي المستعمله في الأجسام المرنة والأجسام المائعة.

والانتشار المتواصل نوعين ؛ إما متجانس ( Homogeneity ) وذلك إذا كانت الكثافة للانتشار ثابتة ، وآخر غير متجانس ( Non-Homogeneous أو Heterogeneous ) في حالة عدم توافر تلك الخاصية.

والأجسام ولقنا لثبوت صفات التكوين الجزيئي في الإتجاهات المختلفة من عدمه تنقسم إلى متماثلة التكوين ( Isotropic ) وغير متماثلة التكوين ( Non-Isotropic ) ، فمثلا الخشب تختلف صفاته في إتجاه الألياف عنها في الإتجاه العمودي على الألياف فهو غير متماثل التكوين.

و - القوة: هي العامل الرئيسي في الإستاتيكا ويمكن تعريفها بأنها المدرك الحسي من نوع الشد أو الضغط الذي يعمل على تغيير حالة الحركة أو السكون للأجسام ما لم يتوازن أو يتلاشى تأثيره بفعل عوامل أخرى من نوعه وهي إما مركزة أو موزعة على الأجسام بانتظام.

وتمثل رياضيا باتجاهات ذات خطوط عمل محده Sliding vectors. أو Line-bound vectors ؛ وذلك للدلالة على إمكان نقلها على خط العمل نفسه دون تغيير في تأثيرها على الجسم المتماثل ، وقد خصصنا بابا على عمليات تركيب وتحليل الاتجاهات المعينه بخط عمل سواء بالطريقة البيانية Graphical Method أو الطرق التحليلية Analytical Methods .



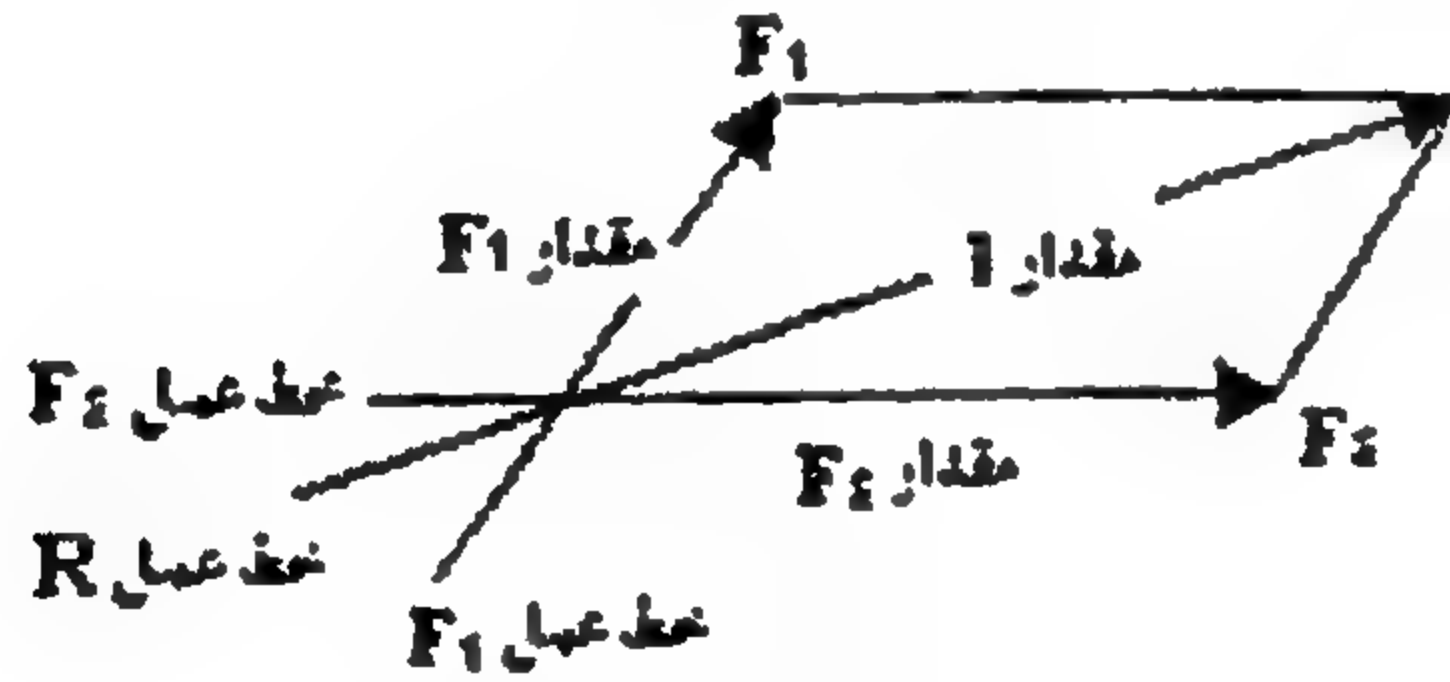
ويمكن قياس مقدار القوة بما تحدثه من إستطاله في زنبرك معاير ومقارنة مقادير القوى المختلفة على هذا الأساس.

ز - الكتلة: هي الصفة الميكانيكية للأجسام المادية التي تعبر عن خاصية القصور الذاتي ( Inertia ) ، أي مقاومة التغير في الحركة. وليست لها أهمية تذكر في الإستاتيكا العادية عن أنها صفة رقمية للأجسام تتناسب مع أوزانها في المكان الواحد على سطح الأرض . ولكنها تلعب الدور الرئيسي في الديناميكا عموما وفي إستاتيكا المتحركات.

## ٢ - القوانين الأساسية:

### أ - قانون تركيب وتحليل القوى:

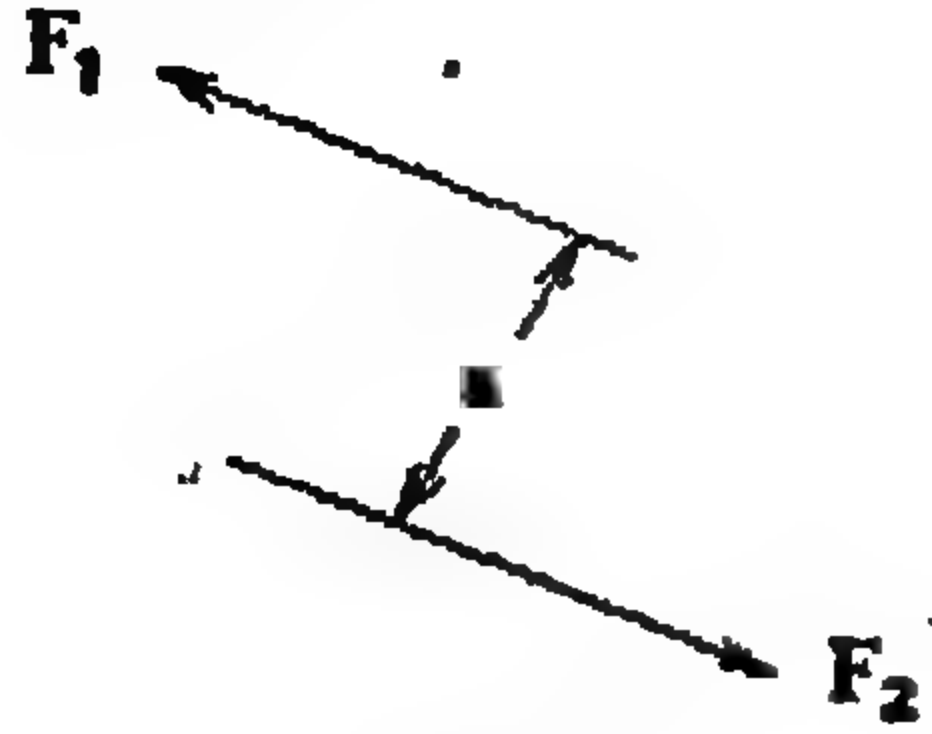
ويعرف بقانون متوازي الأضلاع للقوى وينص على أنه إذا أثرت قوتان على جسم أو على جسم متماسك فإن تأثيرهما يعادل تأثير قوة واحدة تسمى المحصلة ( Resultant ) تعمل على قطر متوازي الأضلاع المكون من القوتين كما في الشكل (٢-١) ، و يلاحظ ألتقاء خطوط العمل في نقطة واحدة وأن الإتجاهات تنبعث من هذه النقطة والعكس صحيح أي أن R يمكن إستبدالها بالقوتين  $F_1$  و  $F_2$ .



شكل (٢-١)

وهناك قانون عام في التركيب والتحليل (أو التجميع) ( General Law of Sperposition ) وينص على أن تأثير المركب لمجموعه من القوى تعمل في وقت واحد يعادل المجموع الإتجاهي للتأثيرات الفردية الناتجة عن كل من القوى على حده.

وهذا يعني أنه إذا ركبنا مجموعة من القوى إلى المحصلة  $R_1$  وركبنا مجموعة أخرى  $R_2$  وكانت  $R_1 = R_2$  وعلى نفس خط العمل فيقال أن المجموعتين متكافئتان أي أن تأثيرهما واحد على الجسم المتماثل مهما اختلفت تفاصيل كل من المجموعتين.



شكل (٢-٢)

أما إذا كانتا قوتين متوازيتين متساويتين في المقدار متضادتين في الاتجاه فتفشل نظرية أو عملية التركيب وينتج ما يسمى بالازدواج ، وتأثيره دوراني على الجسم المتماثل لذا يسمى عزم الدوران (

Moment) ويرمز له بسهم دائري  $M$  مع إظهار اتجاه الدوران ويقدر بحاصل ضرب إحدى القوتين في الذراع العمودي  $M = F \cdot a$  شكل (٢-٢) .

ويتكافأ ازدواجان إذا كانا في مستويين متوازيين وكان لهما نفس المقدار (حاصل الضرب) ونفس الاتجاه الدوراني ويتم تركيب العزوم الدورانية في مستوى واحد بجمع مقاديرها جبرياً.

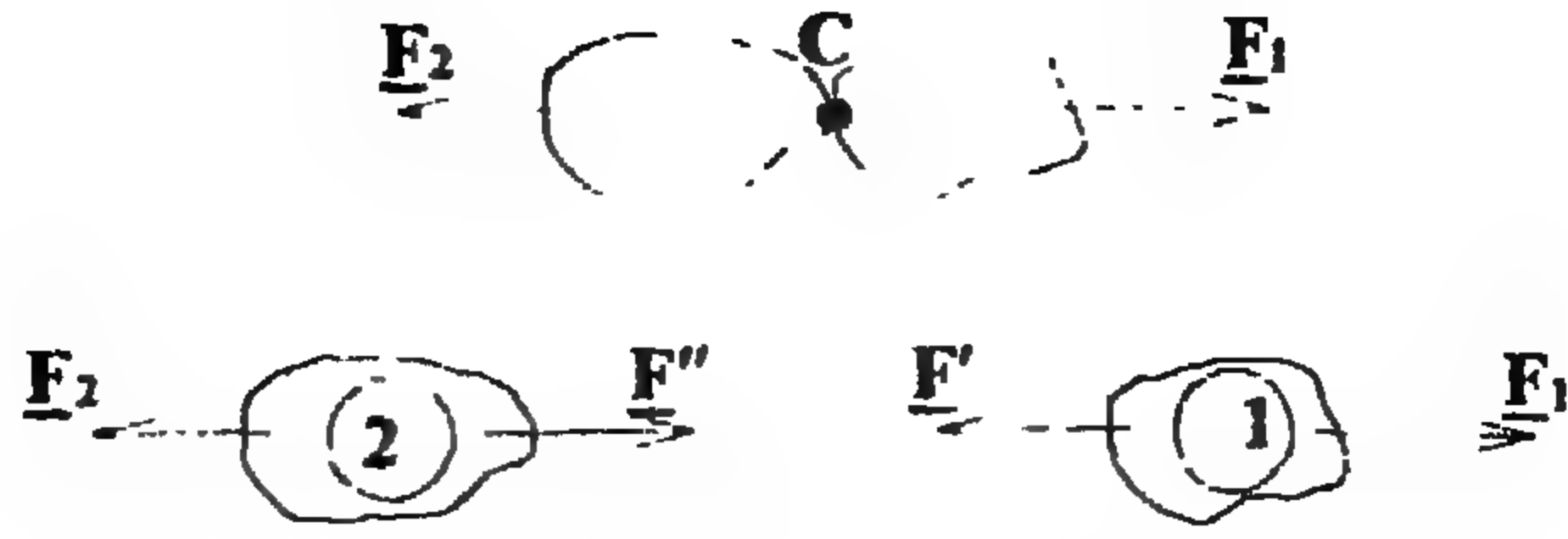
### ب - قانون التوازن:

ويعني أن الجسم المتماثل يظل على حالته من حركة أو سكون إذا تلاشت محصلة القوى المؤثرة عليه وعلى الأخص إذا أثرت فيه قوتان متساويتان ومتضادتان في الاتجاه على خط واحد أو إذا أثر فيه عزم دوران متساويان في المقدار ومتضادان في الاتجاه كما في الشكل (٢-٣) .



شكل (٢-٣)

ولاستتاج قانون رد الفعل لجسمين مثلاً متلاصقين أو جزئين من جسم متماثل مفصولين بسطح وهي كما في الشكل (٢-٤) .

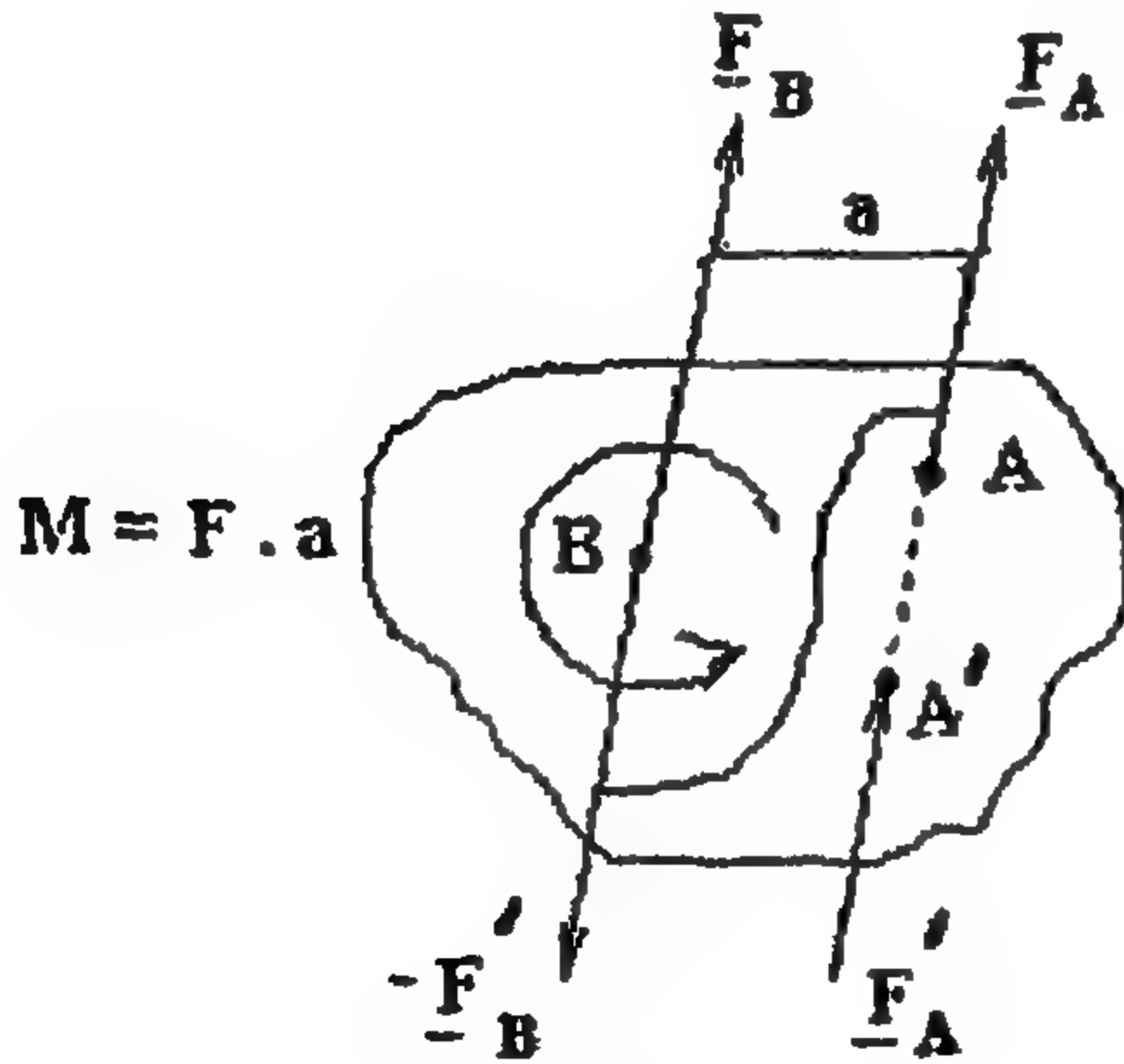


شكل (٢-٤)

$$\begin{aligned} F_2 + F'' &= 0 & F_1 + F' + F'' + F_2 &= 0 \\ F_1 + F' &= 0 & F'' &= -F' \\ F'' + F' &= 0 \\ F_1 + F_2 &= 0 \end{aligned}$$

وبذلك فإن القوى ( الفعل )  $F'$  المؤثرة على الجسم (١) عند نقطة التلامس ، تساوي القوة (رد الفعل)  $F''$  المؤثرة على الجسم (٢) في نفس النقطة كما في شكل (٢-٤).

ويعبر هذا القانون عن أن القوى في الطبيعة تظهر إزدواجها بحيث يكون لكل فعل رد فعل مساوي له في المقدار ومضاد له في الاتجاه . كما يعبر عن توازن القوى الداخلية بجسم متماسك بحيث لا تغير من حالة حركته أو سكونه ، ولابد من تواجد قوى خارجية لإحداث التغيير.



### ٣ - نقل القوى:

إذا أثرت قوة  $F_A$  على جسم متماسك في نقطة A فإنه في الإمكان نقلها كما نشاء على خط العمل نفسه المار بنقطة A ( إلى نقطة A' ) دون أدنى تغيير في التأثير وذلك مع الإحتفاظ بالمقدار بطبيعة الحال.

شكل (٢-٥)

$$F_A = F'_A$$

ولإيجاد ما يسفر عنه نقل القوة بنفس المقدار من A إلى B نتصور قوتين متساويتين ومتضادتين في B على خط عمل موازي للقوة  $F_A$  وكل منهما مساوي لها من حيث المقدار.

هاتان القوتان يتلاشى تأثيرهما على الجسم المتماصك فيتبين على الفور أن  $F_A$  تعادل أو تكافئ  $F_B$  مضافا إليها الأزواج المكون من  $F_A$  ،  $F_B$  كما في الشكل (٥ - ٢)

والنتيجة هي أنه إذا نقلت قوة ما موازية لنفسها من خط عمل إلى خط عمل آخر فإنه يلزم إضافة عزم دوران يساوي حاصل ضرب القوة في المسافة العمودية على خطي العمل مع مراعاة اتجاه الدوران شكل (٥-٢).

$$F_A = F_B \quad , M = F \cdot a$$

# عمليات تركيب وتحليل القوى

## أولاً: عمليات تركيب القوى:

### ١ - تركيب القوى الملتقيه:

إتزان أي جسيم بإعتباره نقطه ماديّه فإن القوى المؤثره عليه تلتقي جميعا في تلك النقطه. ولما كانت محصله أي قوتين تمر بنقطه تلاقيهما تبعا لقاعده متوازي أضلاع القوى فإن محصله مجموعته من القوى الملتقيه تمر بنقطه تلاقيهما و بهذا يبقى لحسابها فقط تعيين مقدار وميل المحصله ، وللدراسه الإستاتيكيه هناك طريقتان متميزتان:-

### أ- الإستاتيكا البيانيه:

وهي تعتمد على الرسم والتخطيط بمقياس رسم مناسب ، ويعنى المهندسون بدراسة وتطوير هذا النوع من الإستاتيكا ويرجع الفضل إليهم في ابتكار الكثير من طرقها وتطبيقاتها في هندسة الإنشاءات.

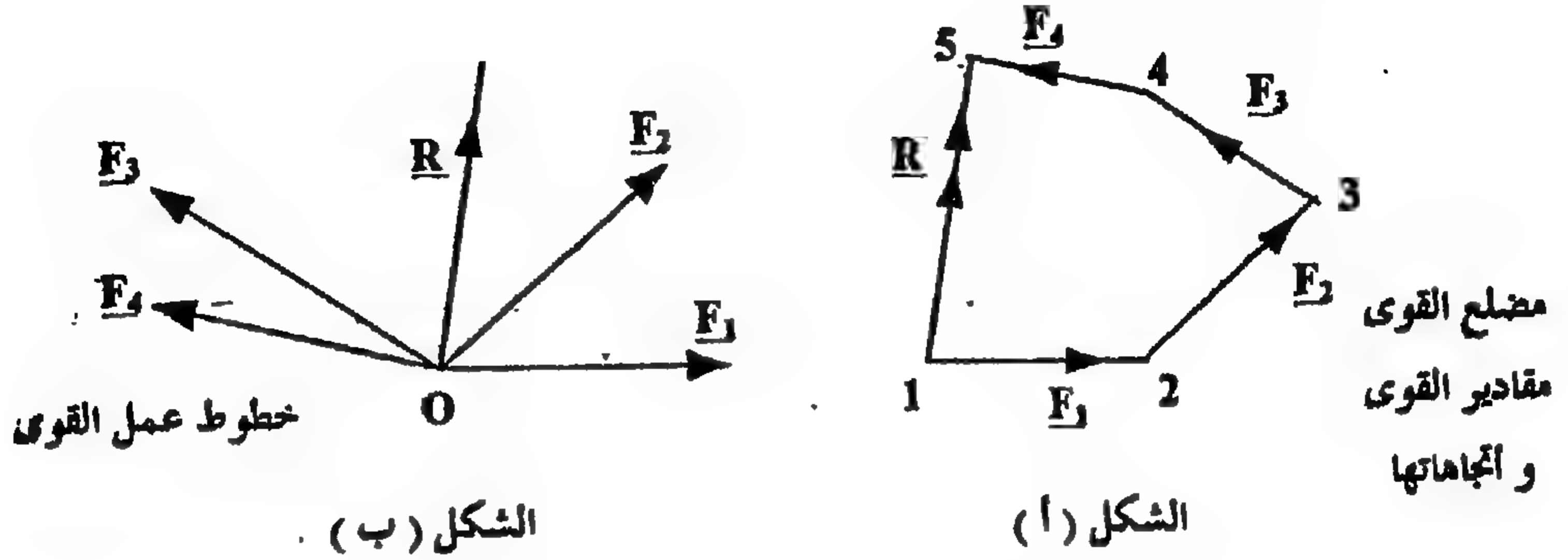
### ب - الإستاتيكا التحليليه:

وهي تعتمد على التحليل والحساب ، ومن تبع كلا الطريقتين فيما يلي.



## أ - الطريقة البيانية:

في حالة تركيب مجموعه من القوى  $(F_1, F_2, F_3, F_4)$  كما في الشكل ( ١-٣ . ب )  
نرسم مضلع متجهات القوى بمقياس رسم مناسب ونصل نقطة البدايه بنقطة النهايه فنحصل على  
المحصلة  $R$  مقداراً واتجهاً.



شكل ( ١ - ٣ )

في حالة وقوع نقطة البدايه على نقطة النهايه قيل أن المضلع مقفل وتلاشى في هذه الحالة  
محصلة القوى  $R$  وهو شرط إتران هذه القوى ، وعلى هذا فالشرط البياني لتلاشي محصلة مجموعه  
من القوى الملتقيه هو أن يكون مضلع القوى مقفلاً.

## ب - الطريقة التحليليه:

وتبنى على تحليل القوى في إتجاهين ، الأفقي والرأسي ثم جمع المركبات في كل إتجاه  
على حده جمعاً جبرياً ثم إعادة التركيب للحصول على المحصلة.

بفرض أن القوى  $F_1, F_2, F_3$  وزوايا ميلها على الأفقي  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  على  
الترتيب فإن المحصلة في الإتجاه الأفقي تكون  $R_x$  تساوي مجموع المركبات الأفقيه للقوى  
المعطاه:

والمحصلة في الاتجاه الرأسي  $R_y$  تساوي مجموع المركبات الرأسية للقوى المعطاة:

$$\therefore R_y = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_3 \sin \alpha_3 + \dots \quad (2)$$

وتعتبر المعادلتان ١ ، ٢ معبرتان عن أن مسقط المحصلة  $R$  على كل من المحورين  $x$  ،  $y$  يساوي مجموع المساقط الفردية ، وعلى ذلك فإننا نستطيع أن نحصل على مقدار المحصلة  $R$  وميلها على الأفقي  $\theta$  بجمع مركبتها جمعاً إيجابياً.

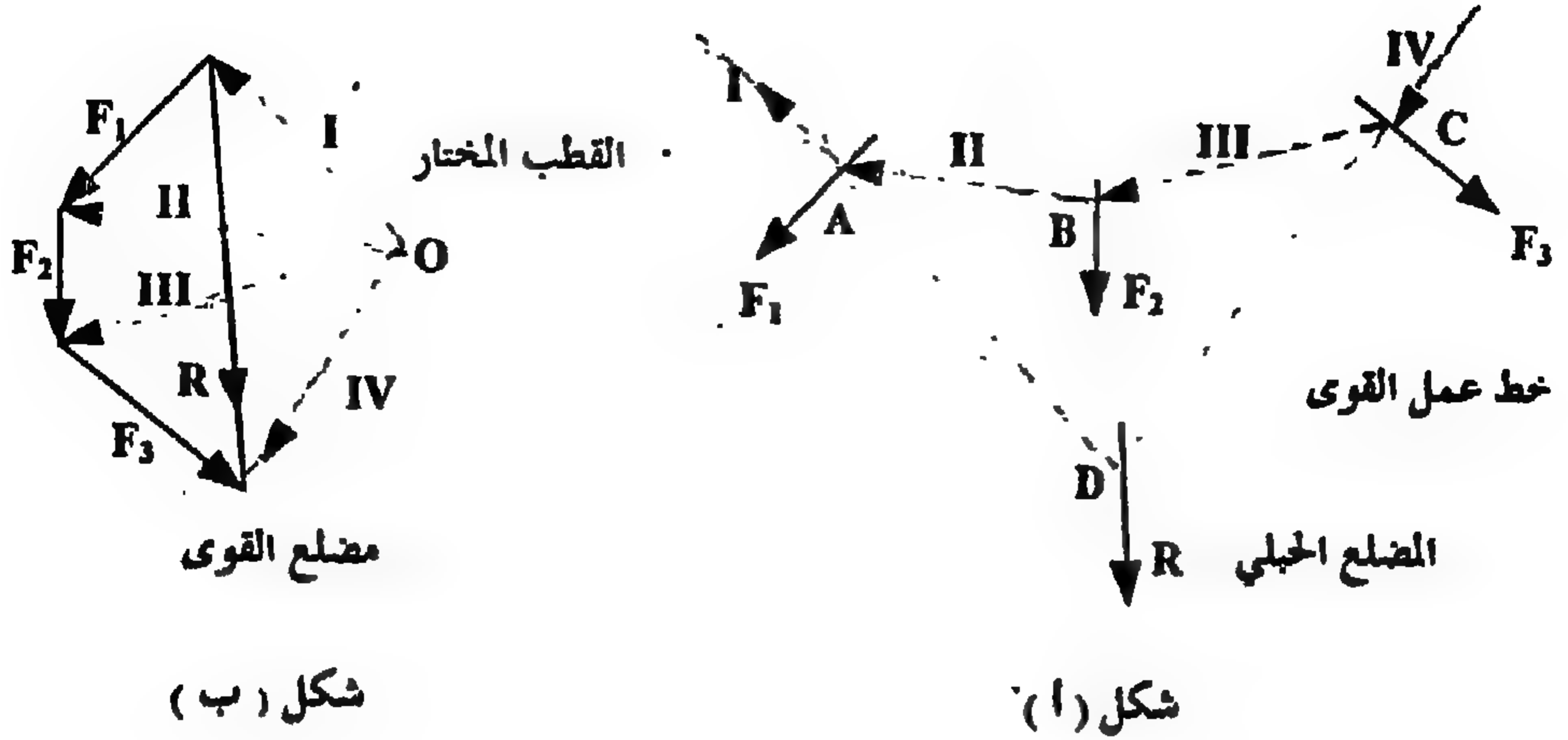
$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (3)$$

$$\tan \theta = R_y / R_x \quad (4)$$

وخط عملها الحقيقي يمر بملتقى القوى المعطاة وعندما تكون:  $R_x = 0$  ،  $R_y = 0$  فبمعنى تلاشي محصلة القوى الملتقية.

## ٢ - تركيب القوى المتفرقة:

في حالة القوى المتفرقة والمؤثرة على جسم متماسك فإن مقدار وميل المحصلة  $R$  يتم الحصول عليها بالطريقة البيانية أو التحليلية بنفس الطريقة والخطوات للبند السابق لحالة القوى الملتقية مع العلم أن خط عمل المحصلة في حالة القوى المتفرقة مجهولاً لعدم وجود نقطة لقاء مشتركة تمر بها المحصلة كحالة القوى الملتقية وهو ما سنبينه فيما يلي بالطريقتين المتبعين.



شكل ( ٢ - ٣ )

لإيجاد المحصلة  $R$  مقداراً واتجهاً وخط عمل للقوى  $F_1, F_2, F_3$  المنفرقة يتم رسم مقلع القوى شكل ( ٢ - ٣ ب ) ثم يتم إختيار قطب المقلع  $O$  ونصل رؤوس القوى بتلك النقطة  $O$  فنحصل على القوى المساعدة  $I, II, III, IV$  يختار خط عمل مناسب للقوى المساعدة  $I$  يقطع خط عمل  $F_1$  في نقطة  $A$  للحصول على بدايه على المقلع الحبلي شكل ( ٢ - ٣ أ ) ، وبما أن  $(II = F_1 + I)$  فإن خط عمل  $II$  يرسم موازياً لها من  $A$  فيقطع  $F_2$  في  $B$  ، وكذلك  $(III = F_2 + II)$  ويرسم خط عمل  $III$  من  $B$  موازياً لها فيقطع  $F_3$  ، وهكذا نوجد خط عمل القوى المساعدة الأخيرة .  $IV$  ويسمى المقلع المكون من خطوط العمل  $I, II, III, IV$  في شكل ( ٢ - ٣ أ ) بالمقلع الحبلي.

$$\therefore IV = I + F_1 + F_2 + F_3 \dots \dots \dots (5)$$

$$\therefore IV - I = F_1 + F_2 + F_3 \dots \dots \dots (6)$$

أي أن مجموعة القوى المعطاه  $F_1, F_2, F_3$  تكافئ القوتين  $I, IV$  المثلتين بالضلعين الأول والأخير في المقلع الحبلي . وعلى هذا فإن المحصلة تمر بنقطة  $D$  في المقلع الحبلي ونقطة تلاقي الضلعين الأول والأخير. نرسم من  $D$  موازياً للمحصلة  $R$  فنحصل على خط عمل هذه المحصلة.

نلاحظ في الشكل ( ٢-٣ ) العلاقات الهندسية الآتية بين شكل مضلع القوى وشكل خطوط العمل فكل مستقيم في الشكل الأول يناظره مستقيم موازي في الشكل الثاني كما أن كل مثلث في الأول يناظره ثلاثة مستقيمات متلاقية في نقطة في الثاني ، والأصل في هذا التناظر هو أن محصل أي قوتين يجب أن تمر بنقطة تلاقيهما.

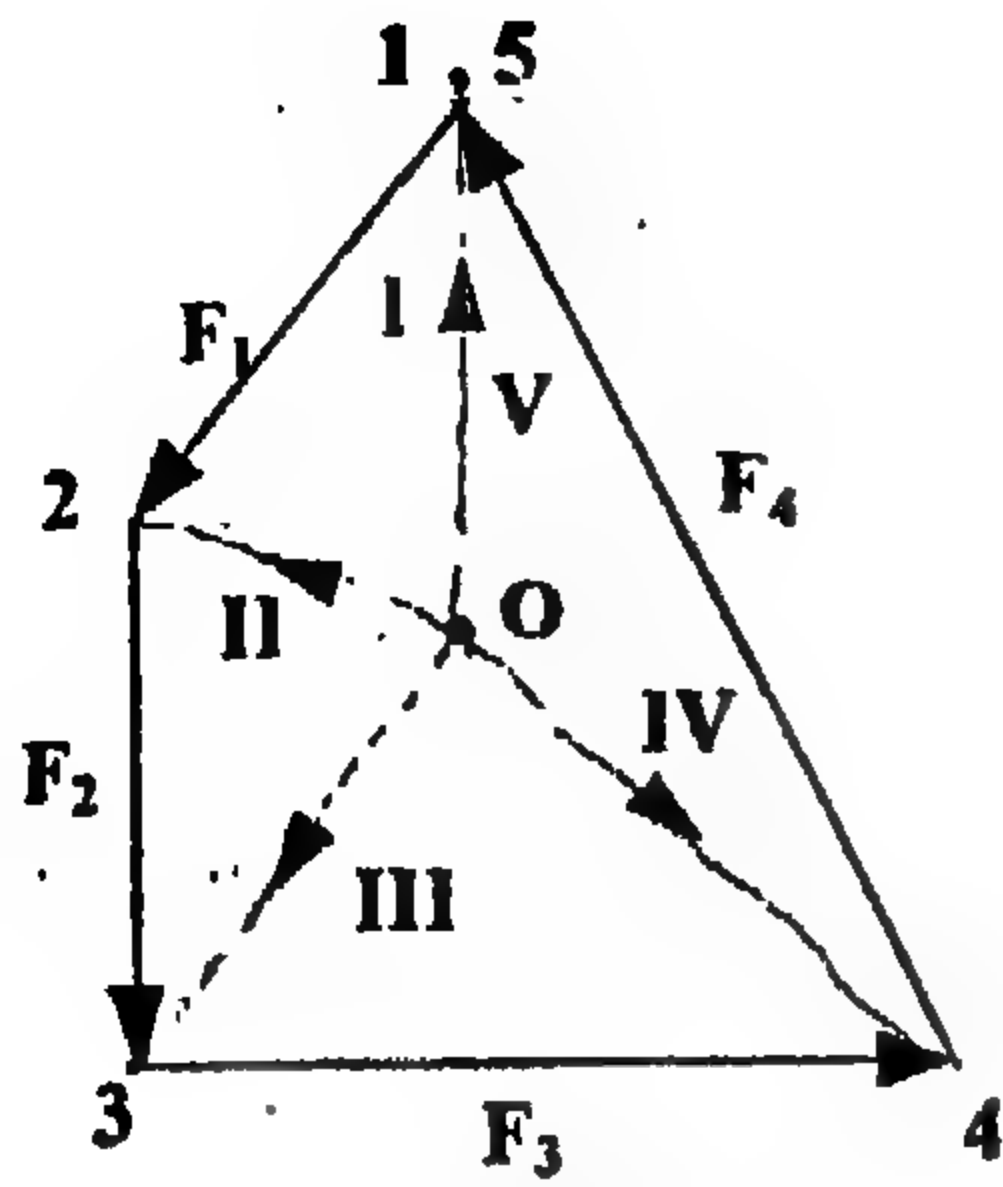
وتسمى عملية تركيب القوى بعملية الإختزال ، وقد تسفر هذه العملية عن أحد الإحتمالات الثلاثة الآتية للنتيجة.

### أ - مضلع القوى المفتوح:

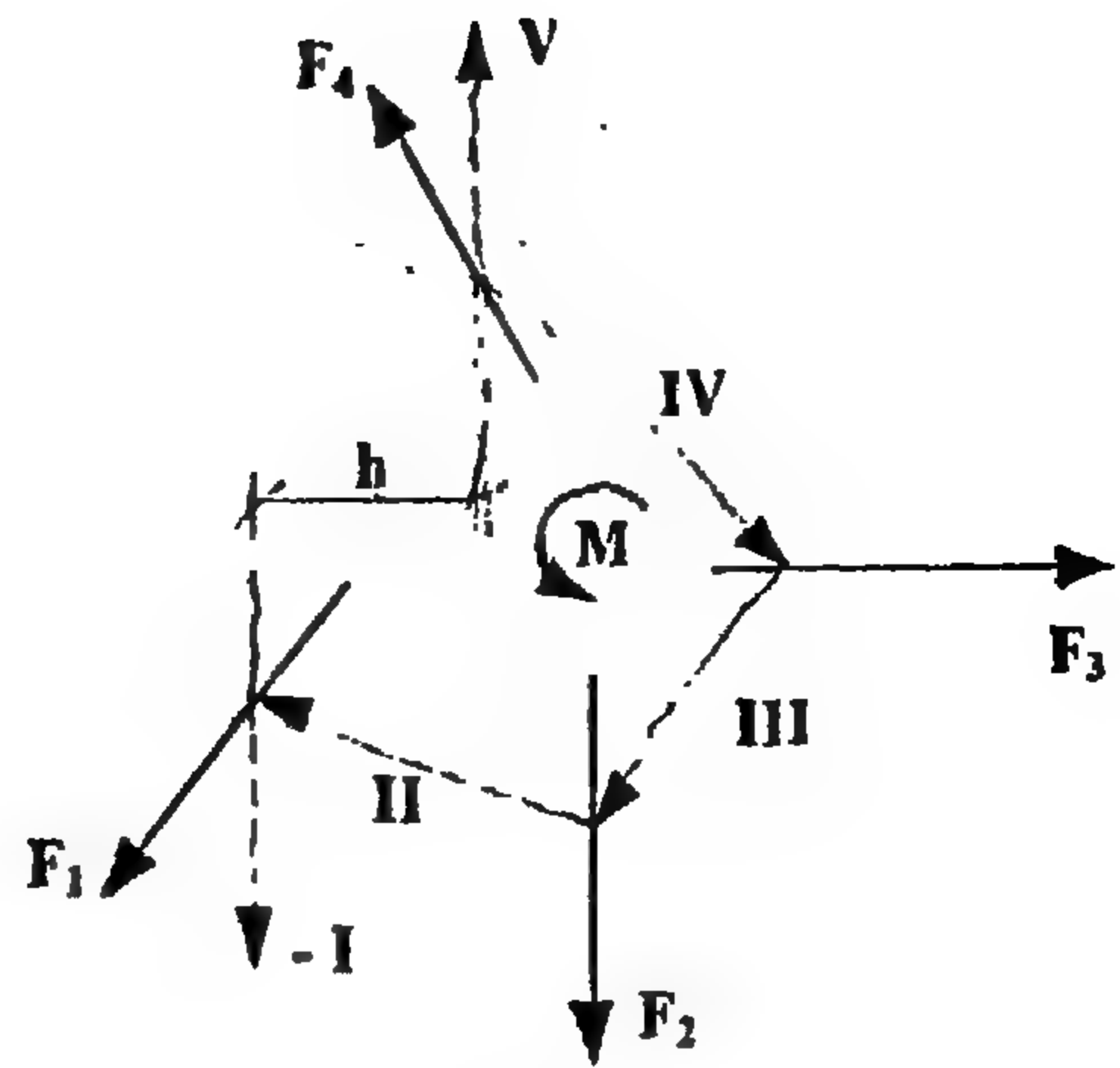
يعني أنه لمجموعه من القوى محصله ذات مقدار واتجاه ويحدد خط عملها بواسطة المضلع الحلي وأن عملية الإختزال تفضي إلى قوة المحصله.

### ب - مضلع القوى مقفل والمضلع الحلي مفتوح:

بوقوع نقطة البدايه على نقطة النهايه في مضلع القوى كانت المحصله صفرا ، والشعاعان I , V الأول والأخير إنطبقا في مضلع القوى شكل ( ٣-٣ ، أ ، ب ) مكونين مضلع حلي مفتوح ، وجعلا الضلعين الأول والأخير فيه I , V متوازيين. وهما بمثابة قوتين متوازيتين ومتساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه وتكافئان مجموعة القوى المعطاه تبعاً للمعادله (6).



مضلع القوى مغلق



المضلع الحبل مفتوح

شكل ( ٣ - ٣ )

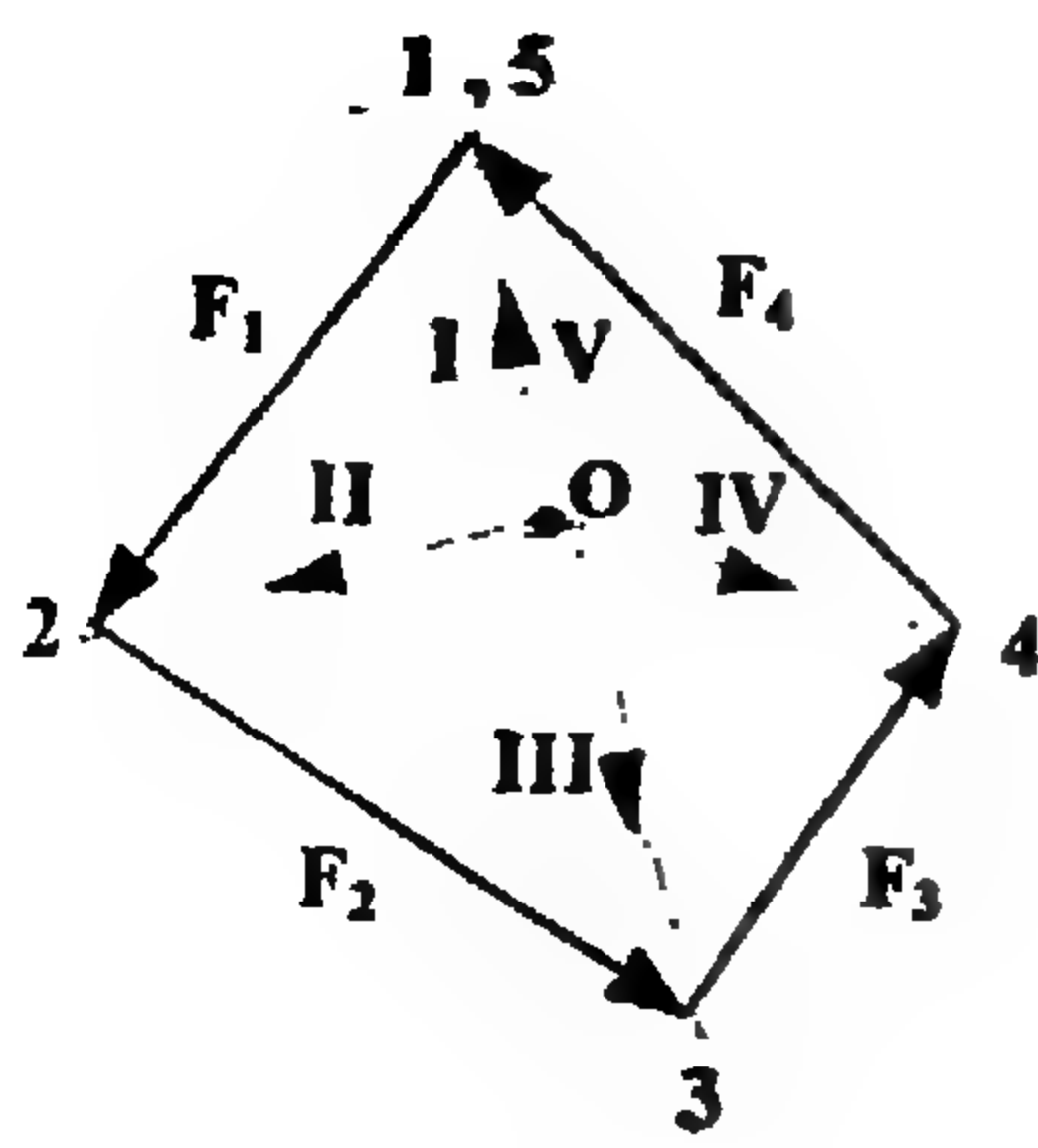
ولذا فإن المحصلة عبارة عن عزم ازدواج يقدر بحاصل ضرب مقدار القوة  $V$  بمقاسه من مضلع القوى في المسافة العمودية  $h$  بين  $V$  و  $I$  مقاسه من المضلع الحبل مع مراعاة مقياس الرسم لكل من الشكلين.

$$M = |V| \times h$$

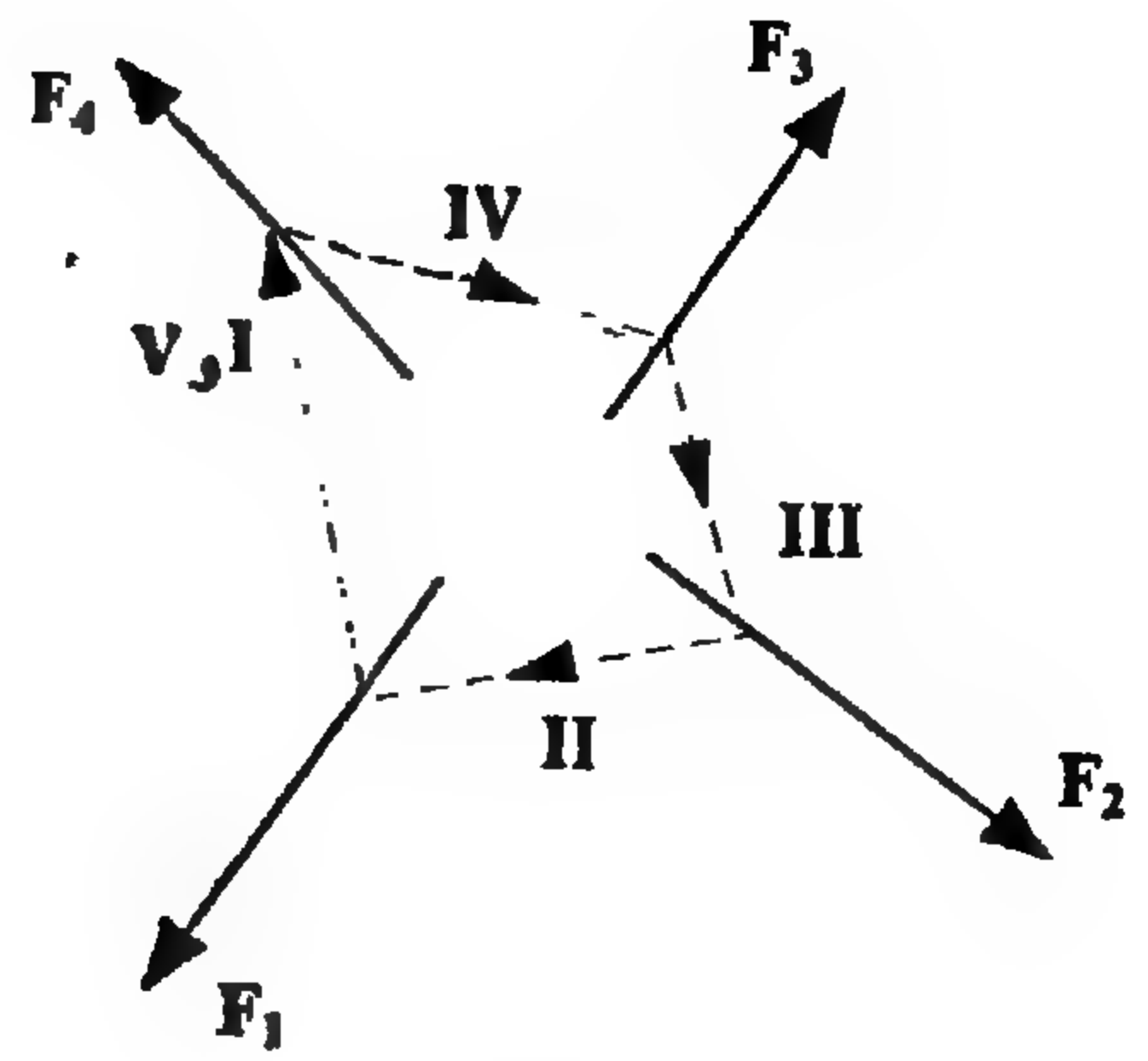
ج - مضلع القوى مغلق والمضلع الحبل مغلق:

إذا كان وضع القوى الأخيرة والأولى  $V$  و  $I$  في المضلع الحبل مغلقاً على استقامته واحده فإن المحصلة تتلشى نظراً لأن القوتان متساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه وهما تكافئان مجموعة القوى المعطاه تبعاً للمعادلة (6) أي أن المجموعه متلاشيه . شكل ( ٣ - ٤ )





مضلع القوى مقفل



المضلع الحبلي مقفل

شكل (٣-٤)

### الخلاصة:

- ١ ( مجموعة القوى المتفرقة تكون محصلتها قوة مفردة وعلامة ذلك مضلع القوى مفتوحاً .
- ٢ ( مجموعة القوى المتفرقة تكون محصلتها ازدواجاً ، وعلامة ذلك مضلع القوى مقفلاً والمضلع الحبلي مفتوحاً .
- ٣ ( مجموعة القوى المتفرقة تكون محصلتها متلاشيـه وعلامة ذلك مضلع القوى والمضلع الحبلي مقفلاً وهي حالة التوازن التي تحقق إتزان للجسم المتماـسك .

### ب - الطريقة التحليلية:

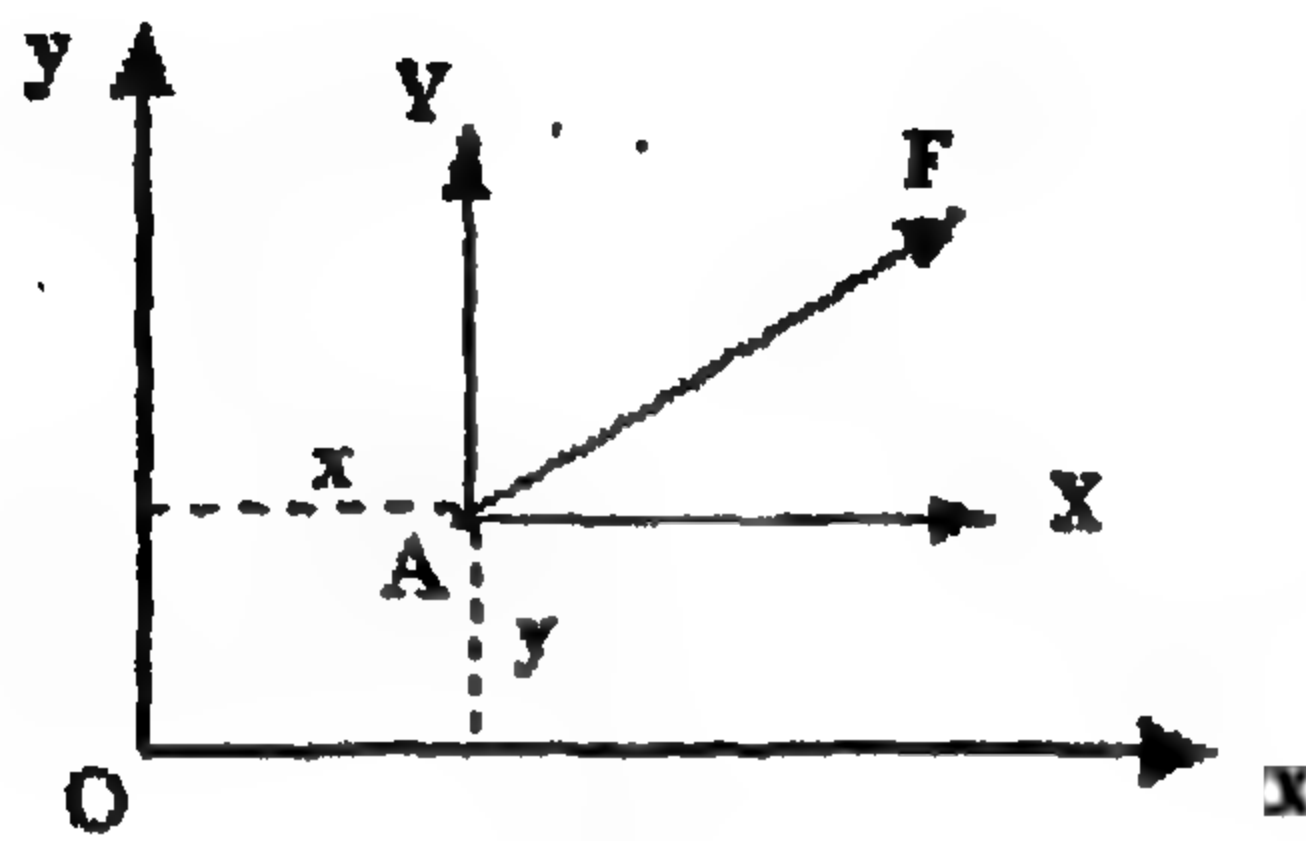
يتعين مقدار وميل المحصلة للقوى المتفرقة بالمعادلتين:

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad , \quad \tan \theta = R_y / R_x$$

أما خط عملها فيتعين بقانون العزوم والذي ينص على أن " مجموع عزوم مجموعه من القوى حول أي نقطة يساوي عزم محصلتها حول نفس النقطة " ، وذلك لأن المحصلة تكافئ مجموعة القوى في قدرتها على إحداث الدوران.

## عزم قوة F حول نقطة الأصل O :

بفرض أن مركبتي القوة في اتجاهي المحورين الأفقي والرأسي هما  $(X, Y)$  ونقطة تأثير القوة A إحداثياتها هي  $(x, y)$  وهي نقطة عامة على القوة نظراً لأن التواء المؤثره على جسم متماسك متجه مقيد بخط عمل فقط وتستطيع الإنزلاق على الخط شكل (٥-٣).



شكل (٥-٣)

تبعاً لنظرية العزوم  
يمكن أخذ العزم  
للمركبتين حول O بدلاً  
من عزم القوة F ذاتها  
للحصول على  $M_o$ .

$$M_o = x \cdot Y - y \cdot X$$

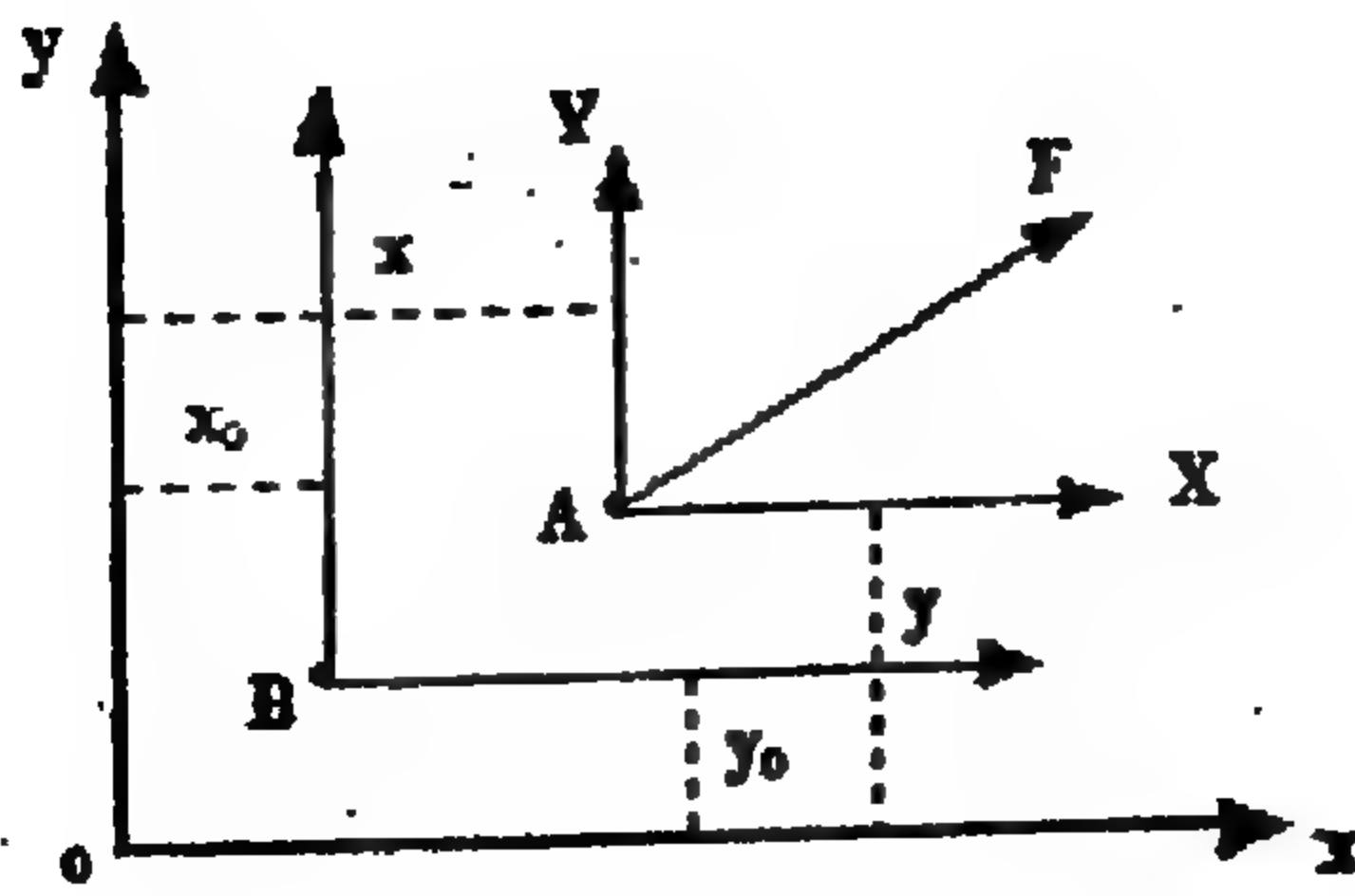
ويمكن وصفها على  
صوره محدده على النحو التالي:

$$M_o = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{احداثي نقطة تأثير القوة} \\ \leftarrow \text{مركبتي القوة} \end{matrix} \quad (7)$$

حيث يكون الصف الأول عبارة عن إحداثي نقطة تأثير القوة والصف الثاني ممثل لمركبة القوة.

## عزم القوة F حول نقطة B إحداثياتها $(x_o, y_o)$ :

حيث أن العزم المطلوب  $M_B$  تعطيه المحدده.



شكل (٦-٣)

$$M_B = \begin{vmatrix} (x - x_0) & (y - y_0) \\ X & Y \end{vmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

حيث أن  $(x, y)$  إحداثي نقطة التأثير،  $(X, Y)$  مركبتي القوة.

معادلة خط عمل المحصلة :

و بتجميع عزوم القوى حول نقطة الأصل  $O$  بالطريقة السابقة و يرمز لهذا المجموع العددي بالرمز  $M_0$ . ثم بأخذ عزم المحصلة حول  $O$  نحصل على:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ R_x & R_y \end{vmatrix} = x \cdot R_y - y \cdot R_x$$

حيث  $(R_x, R_y)$  مركبتا المحصلة في الاتجاه الأفقي والرأسي المعطى بالمعادلتين ، (1)  
(2) و  $(x, y)$  هما إحداثيا نقطة عامه على خط عمل المحصلة وعلى هذا فإن:

$$M_0 = x \cdot R_y - y \cdot R_x$$

والمعادلة تمثل خطا مستقيما وهو خط عمل المحصلة وأن ال  $M_0$ ،  $R_y$ ،  $R_x$  هي عباره عن قيم عددية نتجت من عمليات التحليل الأفقي والرأسي وأخذ العزوم حول  $O$ .

و يمكن أن تؤدي عملية الإختزال إلى إحدى النتائج الآتية:

- ١- وجود محصلة فردية  $R$  وذلك لعدم تلاشي مركبتها  $R_x, R_y$  أو إحداهما على الأقل .
- ٢ - المحصلة عباره عن إزدواج وبشرط لذلك:

$$R_x = 0, R_y = 0, \sum M_o \neq 0$$

٣- المحصلة متلاشيه وبشرط لذلك:

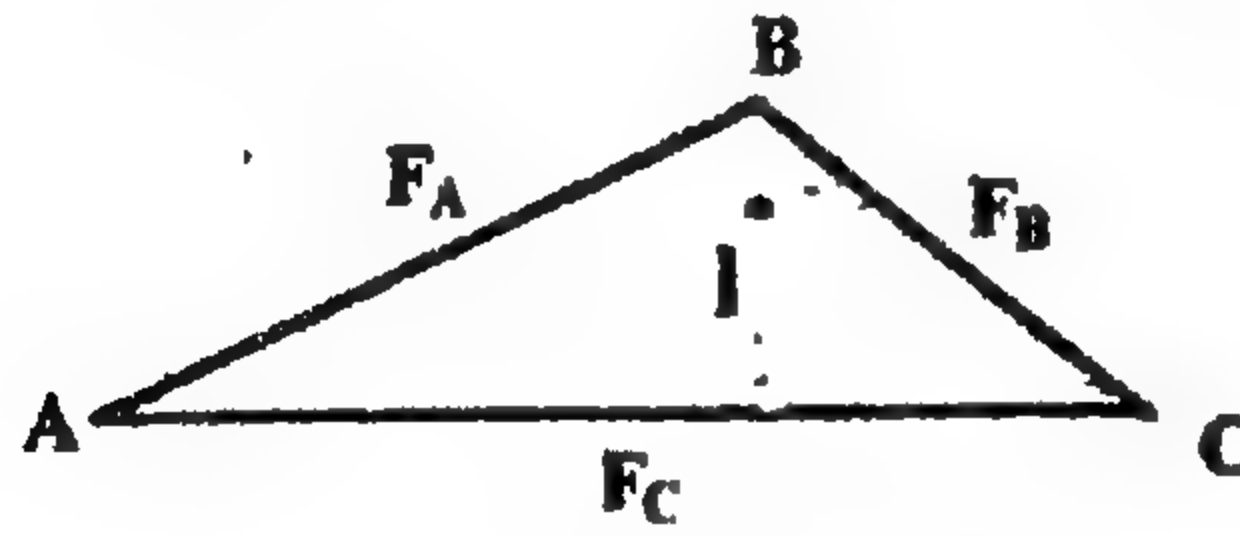
$$R_x = 0, R_y = 0, \sum M_o = 0$$

والحاله الأخيره هي حاله توازن القوى المؤثره على الجسم المتماثل. وبلاحظ أن عمليه إيجاد المحصله عباره عن تكوين معادلات تحليليه في ٣ مجاهيل وهي الكميات القياسيه التي تحدد فيها خط عمل . فلتحديد R يلزم معرفه مقدار R وميلها  $\theta$  وتقاطعها مع أحد المحورين مثلا.

### ج - طرق تحليليه أخرى:

بدلا من الإسقاط على المحورين وأخذ العزوم حول نقطه كما تم في الطريقه السابقه يمكن الإسقاط على محور واحد وليكن x مثلا ثم إيجاد العزوم حول نقطتين معلومتين B,A وبذلك نحصل على ثلاث معادلات تحدد R مقدارا واتجاها وموضعا غير أنه يلزم إختيار B,A بحيث لا يكون الخط AB عموديا على x وذلك لتلافي الحاله التي قد تصادف بتواجد R على الخط AB فتلاشي العزوم حول كل من B,A ، وإذا كان AB عموديا على x تتلاشى أيضا مركبة R على x وبذلك لا نستطيع إيجاد R .

أيضا يمكن تحديد R بأخذ العزوم حول ثلاث نط A,B,C ليست على إستقامه واحده وذلك لكي لا نعجز عن إيجاد R إذا أخذنا النقط الثلاث بالصدفه على خط عملها كما في الشكل ( ٣-٧ ).



شكل ( ٣ - ٧ )

$$\begin{aligned} M_o &= F_A \cdot I \\ M_o &= F_B \cdot I \\ M_o &= F_C \cdot I \\ \therefore F_A \cdot I &= F_B \cdot I = F_C \cdot I \end{aligned}$$

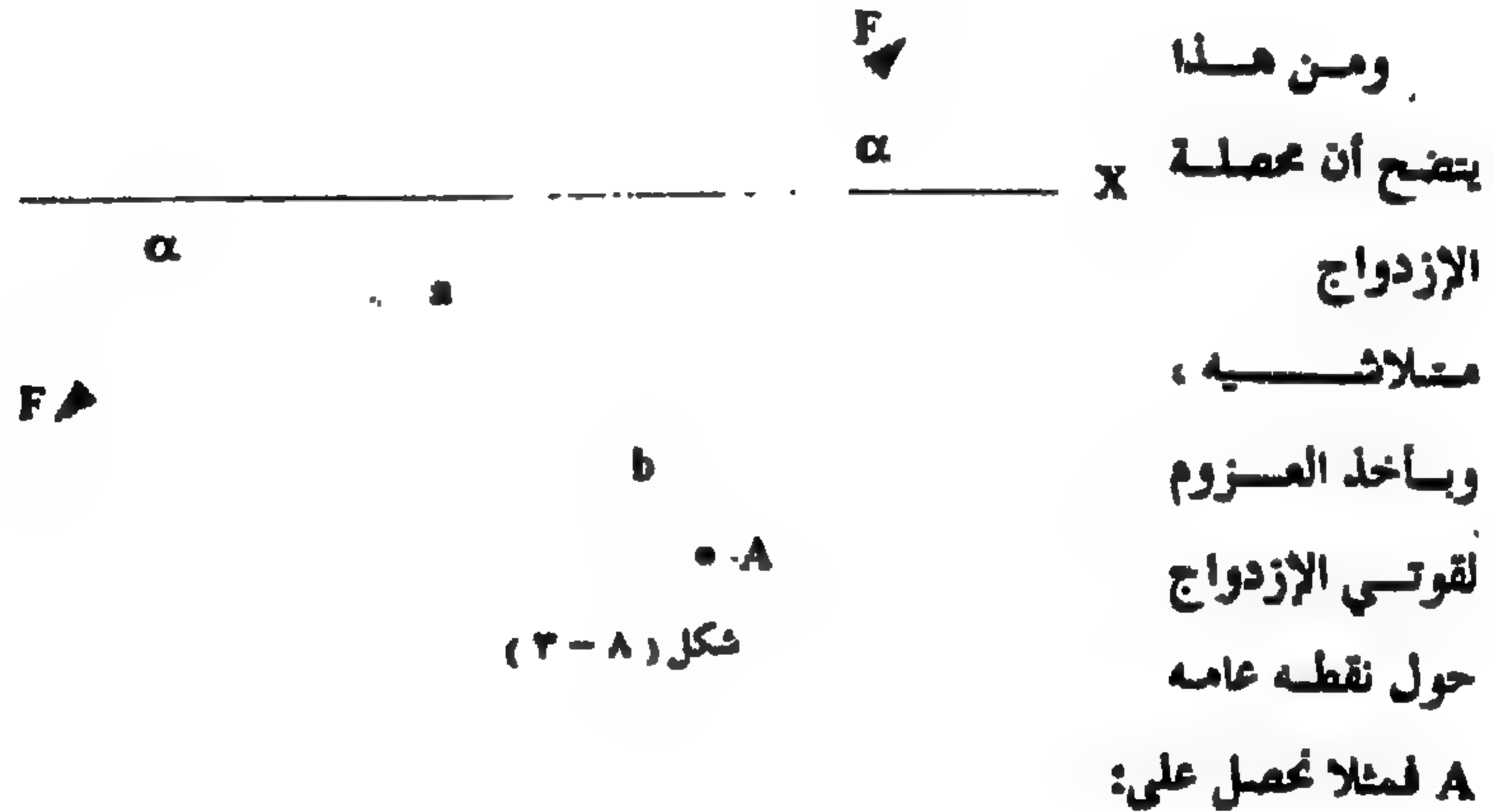
والاختيار بين طريقه وأخرى يتوقف على المسأله المطلوب حلها وحسن الاختيار للأقطاب لأخذ العزوم والمحاور للإسقاط بحيث تنشأ المعادلات السهله والبسيطه الحل من الناحيه الجبريه.

مع ملاحظة أنه إذا كانت محصلة المجموعه عبارة عن إزدواج أو عزم دوران فإن العزم يظهر ثابت حول مختلف الأقطاب أما إذا تلاشت المحصله فيتلاشى العزم بطبيعة الحال حول جميع الأقطاب.

### ٣ - الإزدواج :

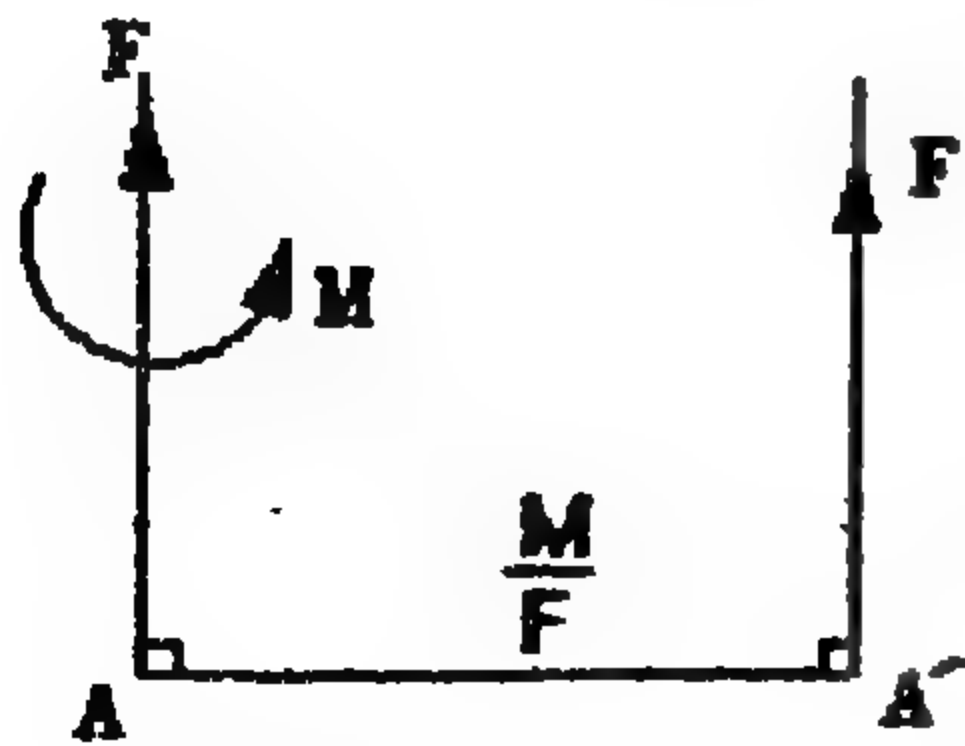
هو قوتان متوازيتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه ، وبالتحليل في الاتجاه الأفقي والرأسي نحصل على:

$$\left. \begin{array}{l} R_x = F \cos \alpha - F \cos \alpha = 0 \\ R_y = F \sin \alpha - F \sin \alpha = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (10)$$



$$M_A = F \cdot (a + b) - F \cdot b = F \cdot a = \text{constant} \dots\dots\dots (11)$$

ومن أهم خواص الإزدواج هو قدرته على إحداث الدوران ولذلك سوف نمثل الإزدواج بسهم دائري يكتب على عزمه الثابت الإزدواجات الواقعه في مستوى واحد تجمع عزومها جمعا جبريا للحصول على إزدواج محصل لها.



شكل (٣-٩)

يعطى جمع قوة  $F_A$  وإزدواج  $M$  شكل (٣-٩) قوة موازيه ومساويه للأولى  $F_A$  وعلى بعد منها

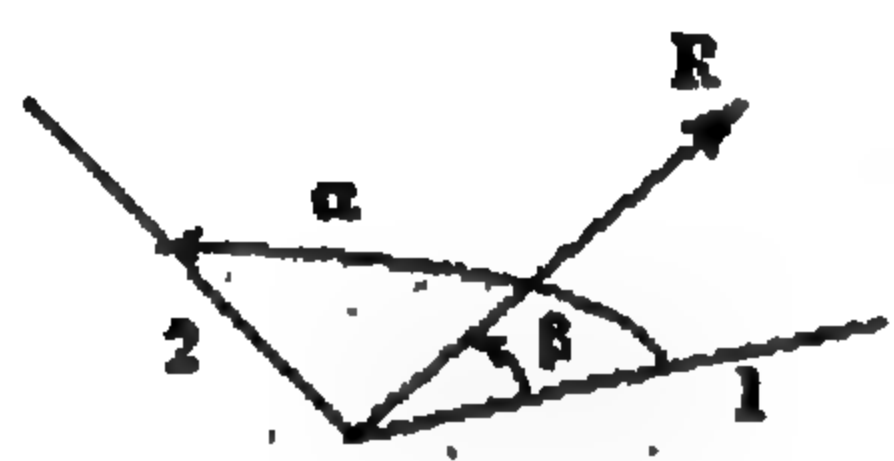


يساوي خارج قسمة عزم الإزدواج على مقدار القوة. وذلك واضح من أن تحليل المجموعه الماره بنقطة  $A'$  يعطي نفس الشئ كتحليل المجموعه الماره بنقطة  $A$  كما أن عزوم كلى المجموعتين حول نقطة ما مثل  $A'$  يعطي نفس الشئ.

## ثانياً: عمليات تحليل القوى:

### ٤- تحليل قوة $R$ إلى مركبتين في خطي عمل معلومين (١) ، (٢):

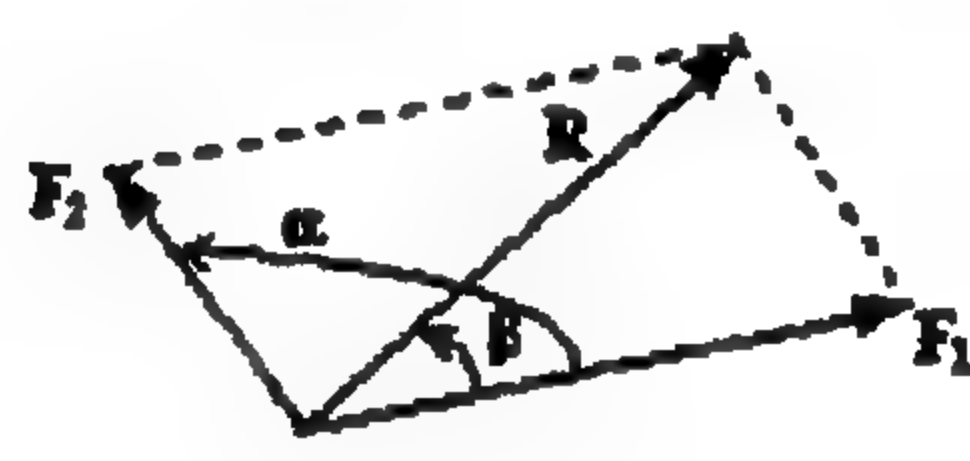
#### أ- الطريقة البيانية:



(ج)



(ب)



(أ)

شكل (٣-١٠)

إنشاء متوازي أضلاع قوى يحتوي على  $R$  قطريه والقوتين ١ ، ٢ ضلعيه متجاوري شكل (٣-١٠ ج) يتعين مقدار  $F_1, F_2$  كما يمكن الحصول عليها برسم مثلث القوى كما في الشكل (٣-١٠ ب).

#### ب - الطريقة التحليلية:

بالتحليل في اتجاه ١ والعمودي عليه نحصل على:

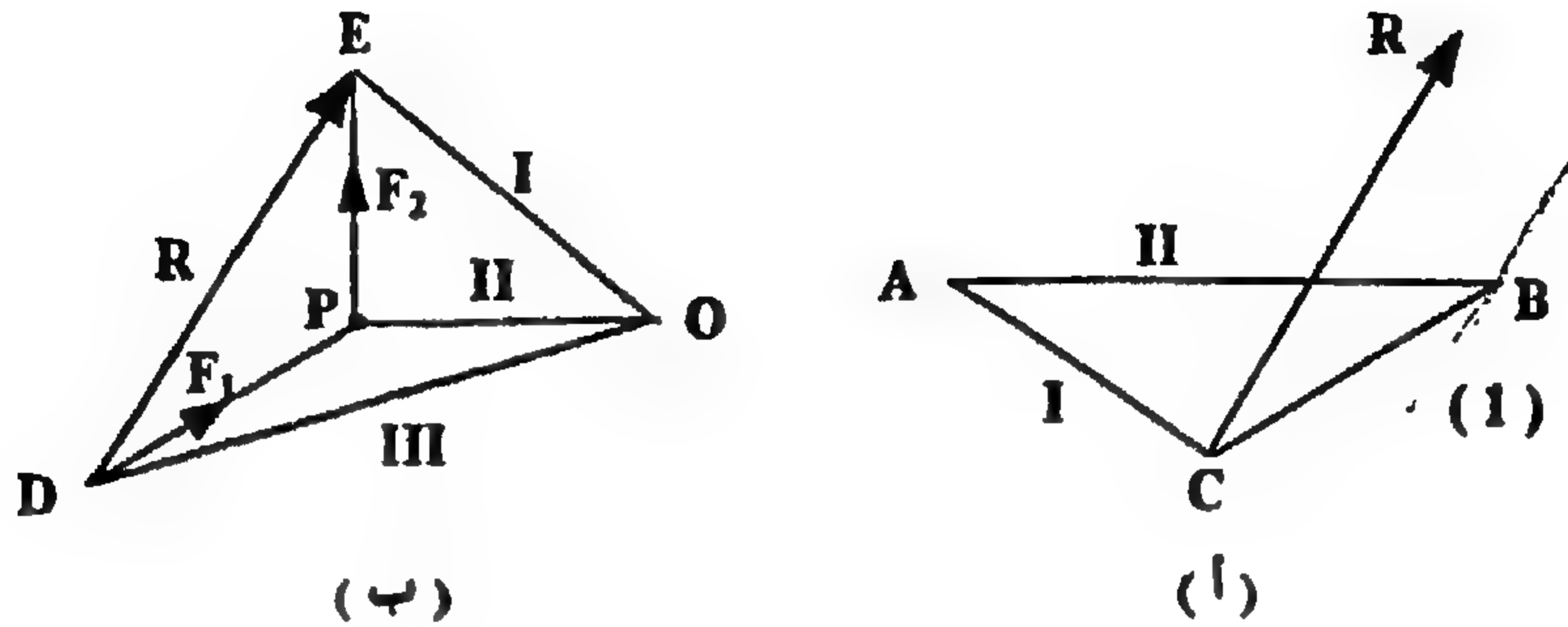
$$\left. \begin{aligned} F_1 + F_2 \cos \alpha &= R \cos \beta \\ F_2 \sin \alpha &= R \sin \beta \end{aligned} \right\}$$

هنا معادلتان في مجهولين  $F_1, F_2$  يعطي حلها الجبري ليمتقي المجهولين ، وبشرط إمكان التحليل في هذه الحالة الظاء خطي العمل ١ ، ٢ والقوة  $R$  في نقطة واحدة شكل (٣-١٠).

٥ - تحليل قوه R إلى مركبتين بمعرفة خط عمل إحداهما (١) ونقطه A

على خط عمل الأخرى:

أ - الطريقة البيانية:



شكل (١١-٣)

نختار نقطه B على (١) وأي نقطه C على R فنحصل على مثلث ABC أضلاعه I,II,III كما في الشكل (١١-٣) نرسم بمقياس رسم مناسب شكل (١١-٣ ب) ، ونرسم من طرفيها موازيين للخطين I,III فيلتقيان في O . ثم من O نرسم موازيا للخط (1) ومن D موازيا للخط I فيلتقيان في P ، وبذلك نحصل على:

$$F_1 = DP , F_2 = PE$$

ولتحليل R إلى  $F_1$  ،  $F_2$  فهي عملية عكس الأجراء المتبع في تركيب القوى  $F_1$  ،  $F_2$  إلى محصلتها R بطريقة المضلع الجبلي ، ويستعان بالعلاقات المتبادله بين مضلع القوى والمضلع الجبلي في ضبط الإجراء.

ب - الطريقة التحليلية:

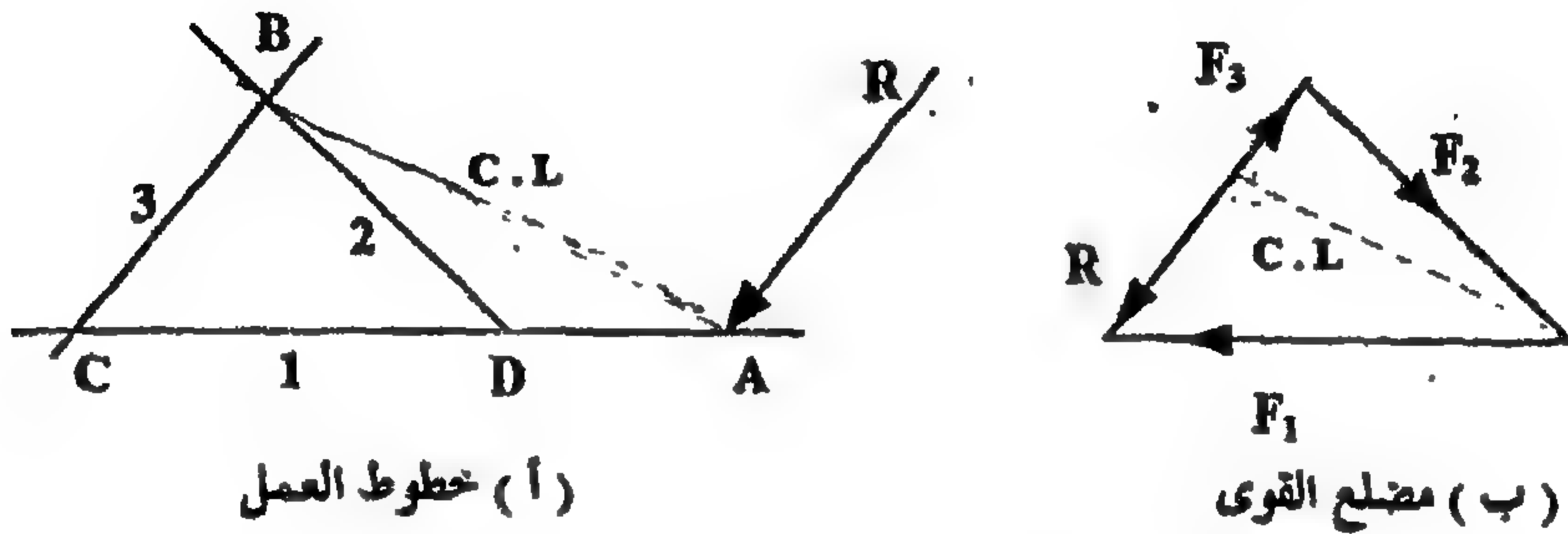
بأخذ العزوم حول A تعين المركبه  $F_1$  المطابقه للخط المعلوم (١) ثم بالتحليل في اتجاه هذا الخط والعمودي عليه نحصل على مركبة القوه الثانيه  $F_2$ .

## ٦ - تحليل قوه R إلى ثلاث مركبات خطوط عملها معلومه 1 , 2 , 3

شكل (١٢-٣):

طريقة كولمان: ( Colmann )

إذا كانت A هي نقطه تلاقي R فباخذ خطوط العمل وليكن ( 1 ) و B نقطه تلاقي الآخرين ( 2 ) , ( 3 ) نصل AB فيسمى خط كولمان ( CL ) شكل ( ١٢-٣ ) .



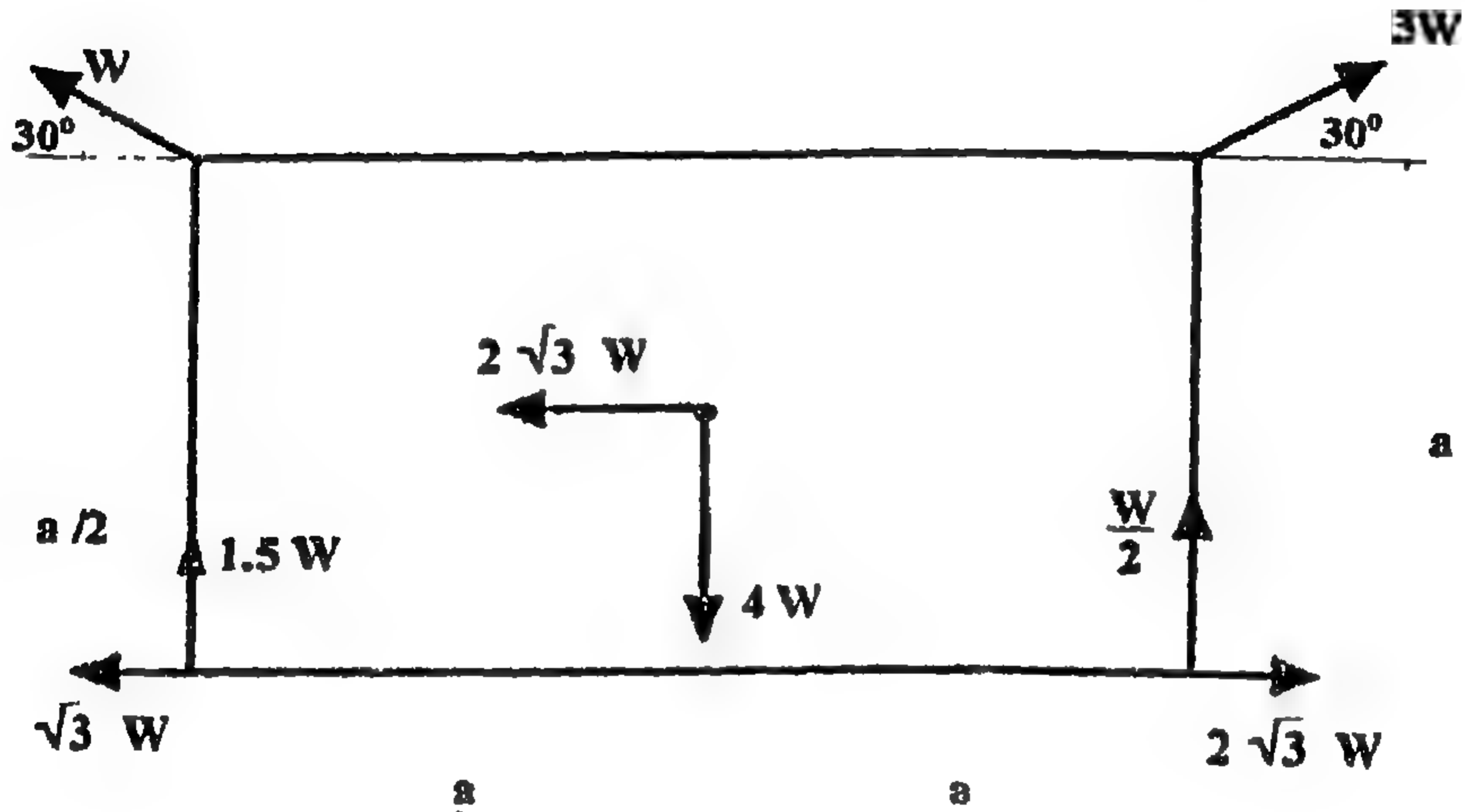
شكل ( ١٢ - ٣ )

والطريقة هي أن نحلل R إلى مركبتين  $F_1$  على ( 1 ) و  $F'$  على AB بمثلث قوى كما في الشكل ( ١٢-٣ ب ) ثم نحلل المركبة  $F'$  الواقعة على الخط AB إلى مركبتين  $F_2$  و  $F_3$  في الخطين 2 , 3 وذلك بمثلث قوى آخر مجاور المثلث الأول في الشكل ( ١٢-٣ ب ) ، وبذلك نحصل على المركبات الثلاثة المطلوبه  $F_1$  ,  $F_2$  ,  $F_3$  . وبطبيعة الحال يتعذر الحل إذا كانت خطوط العمل متلاقية في نقطه واحده أو متوازيه .

## أمثلة محلولة

مثال ١:

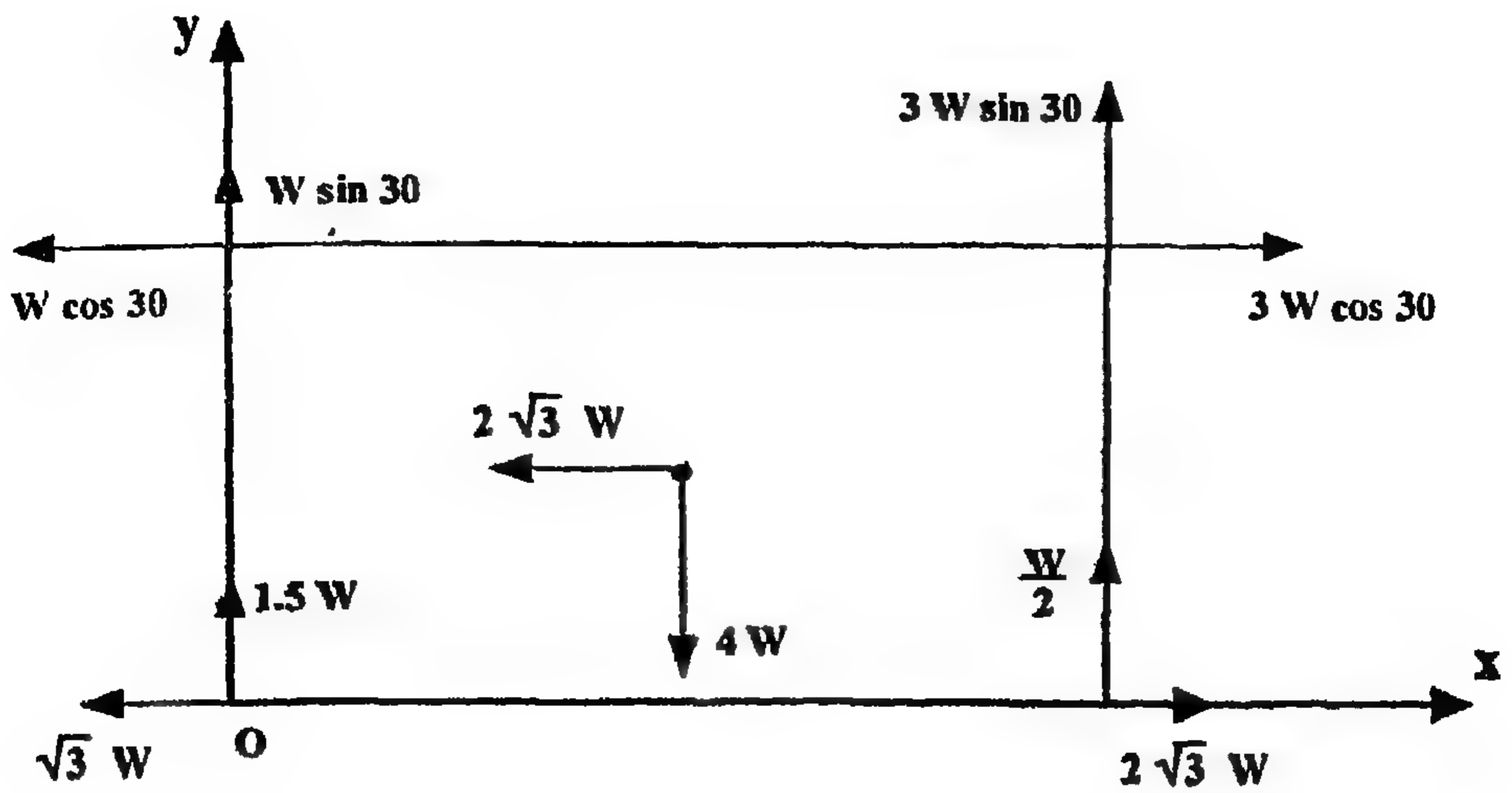
صفحة مستطيلة طولها  $2a$  وعرضها  $a$  تؤثر عليها القوى الموضحة في الشكل ، بين بالطريقة التحليلية أن الصفحة في حالة إتزان.



الحل:

١ - نرسم الشكل مرة أخرى مع وضع المحاورين  $x, y$  وتحليل كل القوى المائلة مع عدم مراعاة مقياس الرسم كما في الشكل .

٢ - نكتب ثلاث معادلات للإتزان التي يجب أن تتحقق.



$$\Sigma x = 0$$

$$3W \cos 30 + 2\sqrt{3}W - W \cos 30 - 2\sqrt{3}W - \sqrt{3}W = 0$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}W + \frac{4\sqrt{3}}{2}W - \frac{\sqrt{3}}{2}W - \frac{4\sqrt{3}}{2}W - \frac{2\sqrt{3}}{2}W = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\Sigma y = 0$$

$$3W \sin 30 + W \sin 30 + \frac{W}{2} - 4W + 1.5W = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\Sigma M_o = 0$$

$$3W \sin 30 \cdot 2a + W \cos 30 \cdot a + 2\sqrt{3}W \cdot \frac{a}{2} + \frac{W}{2} \cdot 2a - 3W \cos 30 \cdot a - 4W \cdot a = 0$$

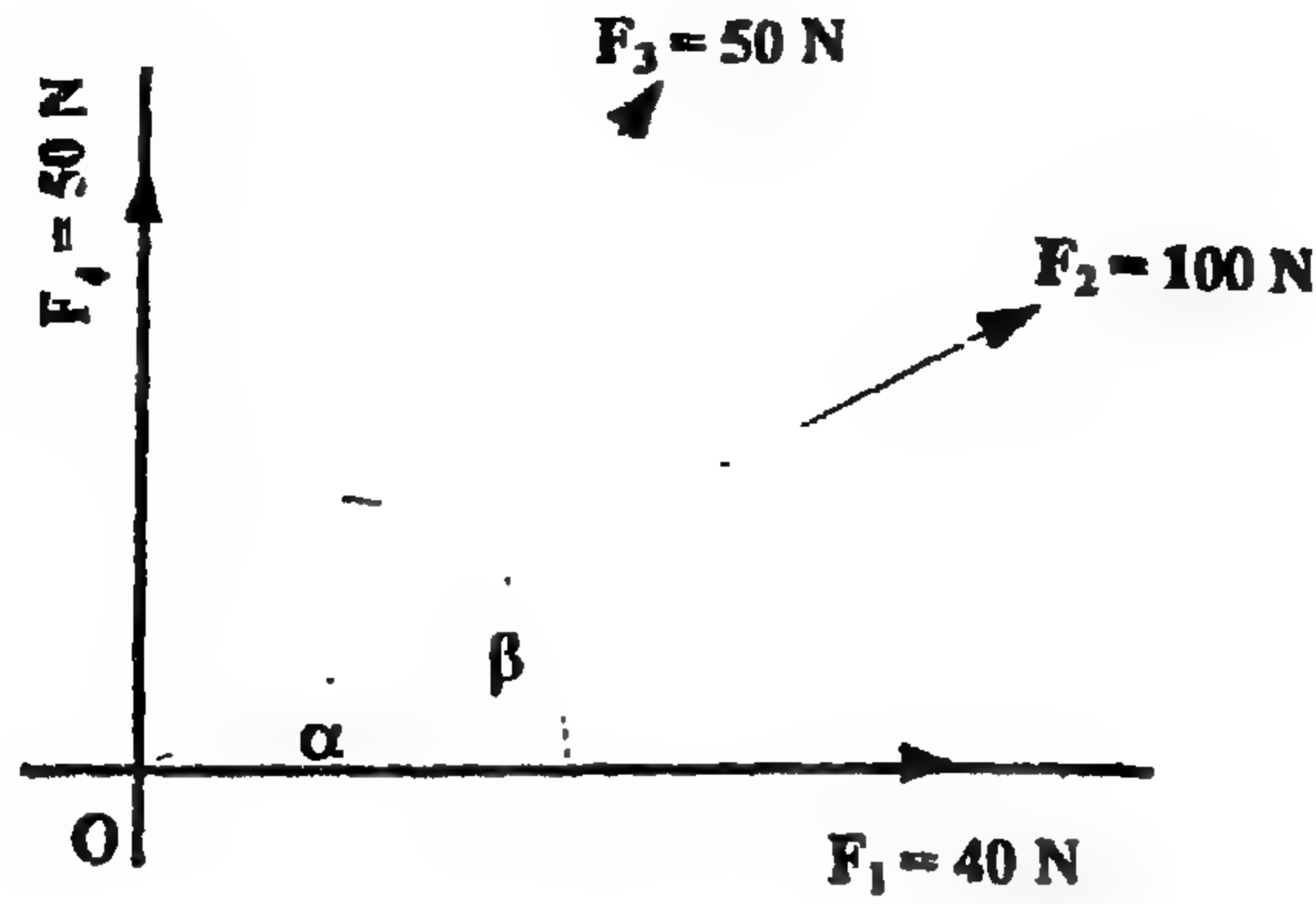
$$3W \cdot a + \frac{\sqrt{3}}{2}W \cdot a + \sqrt{3}W \cdot a + W \cdot a - \frac{3\sqrt{3}}{2}W \cdot a - 4W \cdot a = 0 \dots\dots\dots (3)$$

المعادلات 1, 2, 3 تعطي شروط كافيته لتحقيق الإتزان.



## مثال ٢ :

أوجد محصلة القوى المتلاقية تحليلياً و بيانياً في الشكل المبين :



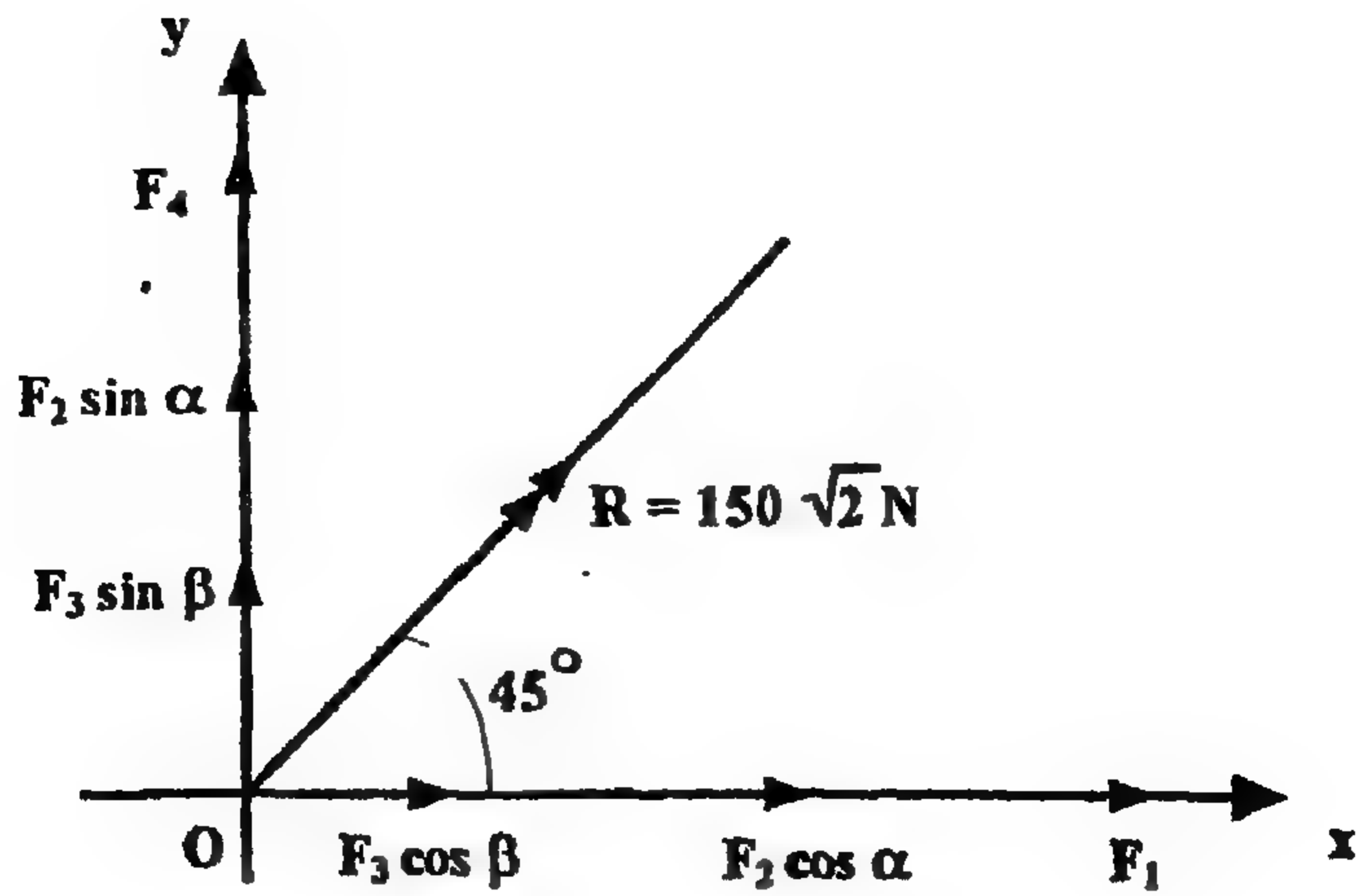
مع ملاحظة أن:



الحل:

أولاً تحليلياً :

نختار محورين متعامدين كما بالرسم  $(x, y)$ .



$$\therefore R_x = \sum F_x$$

حيث المحصلة في الاتجاه الأفقي  $R_x$  هي مجموع القوى في هذا الاتجاه.

$$\begin{aligned} R_x &= 40 + 100\left(\frac{4}{5}\right) + 50\left(\frac{3}{5}\right) \\ &= 150 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\therefore R_y = \sum F_y$$

حيث المحصلة في الاتجاه الرأسي  $R_y$  هي مجموع القوى في هذا الاتجاه.

$$\begin{aligned} R_y &= 50 + 100\left(\frac{3}{5}\right) + 50\left(\frac{4}{5}\right) \\ &= 150 \text{ N} \end{aligned}$$

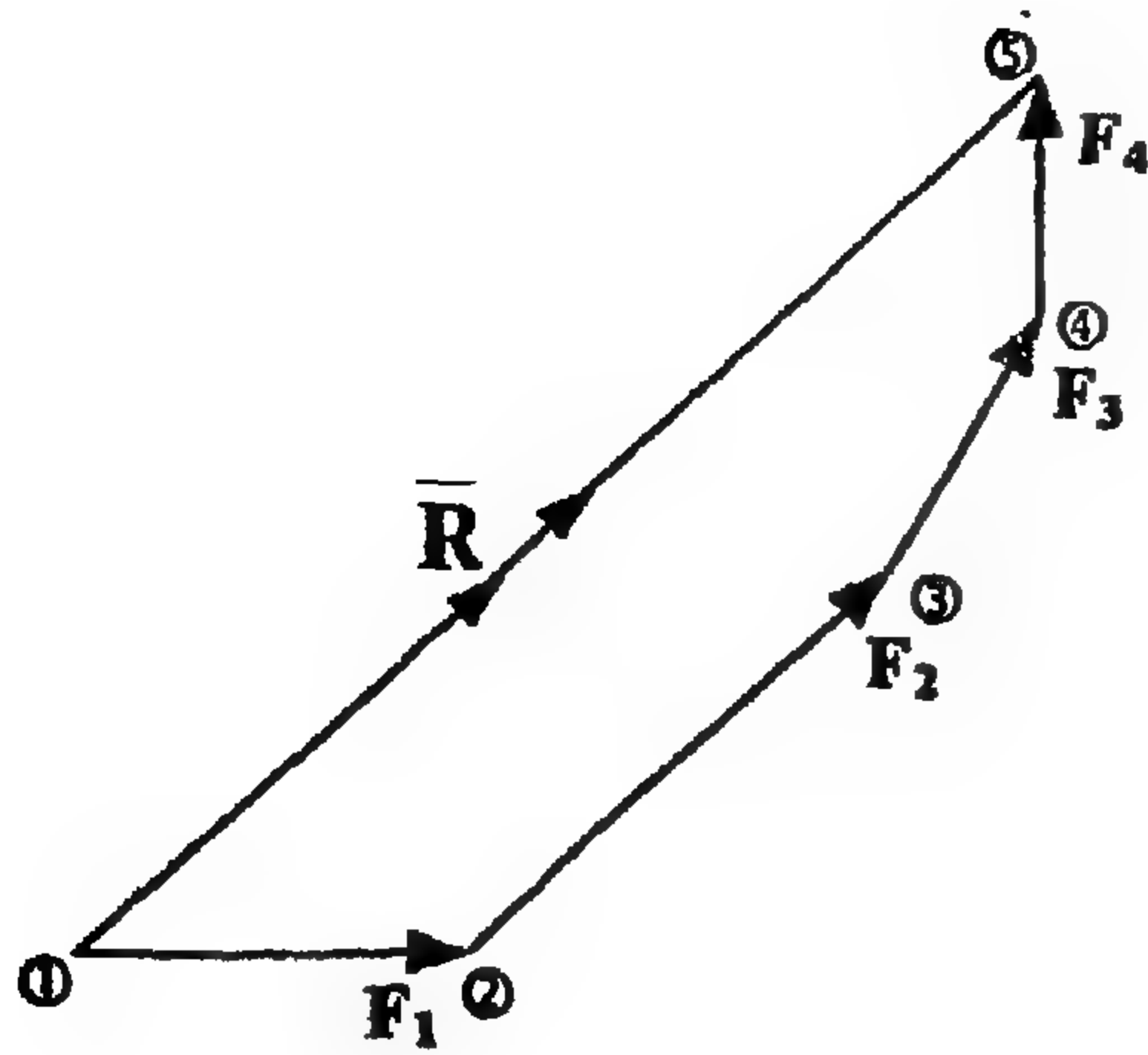
$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\ &= \sqrt{150^2 + 150^2} = 150\sqrt{2} \text{ N} \end{aligned}$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{150}{150} = 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

أما خط العمل فيمر بنقطة التلاقي.

ثانياً بياناً :



مقياس رسم القوى:

$$(1 \text{ cm} = 20 \text{ N})$$

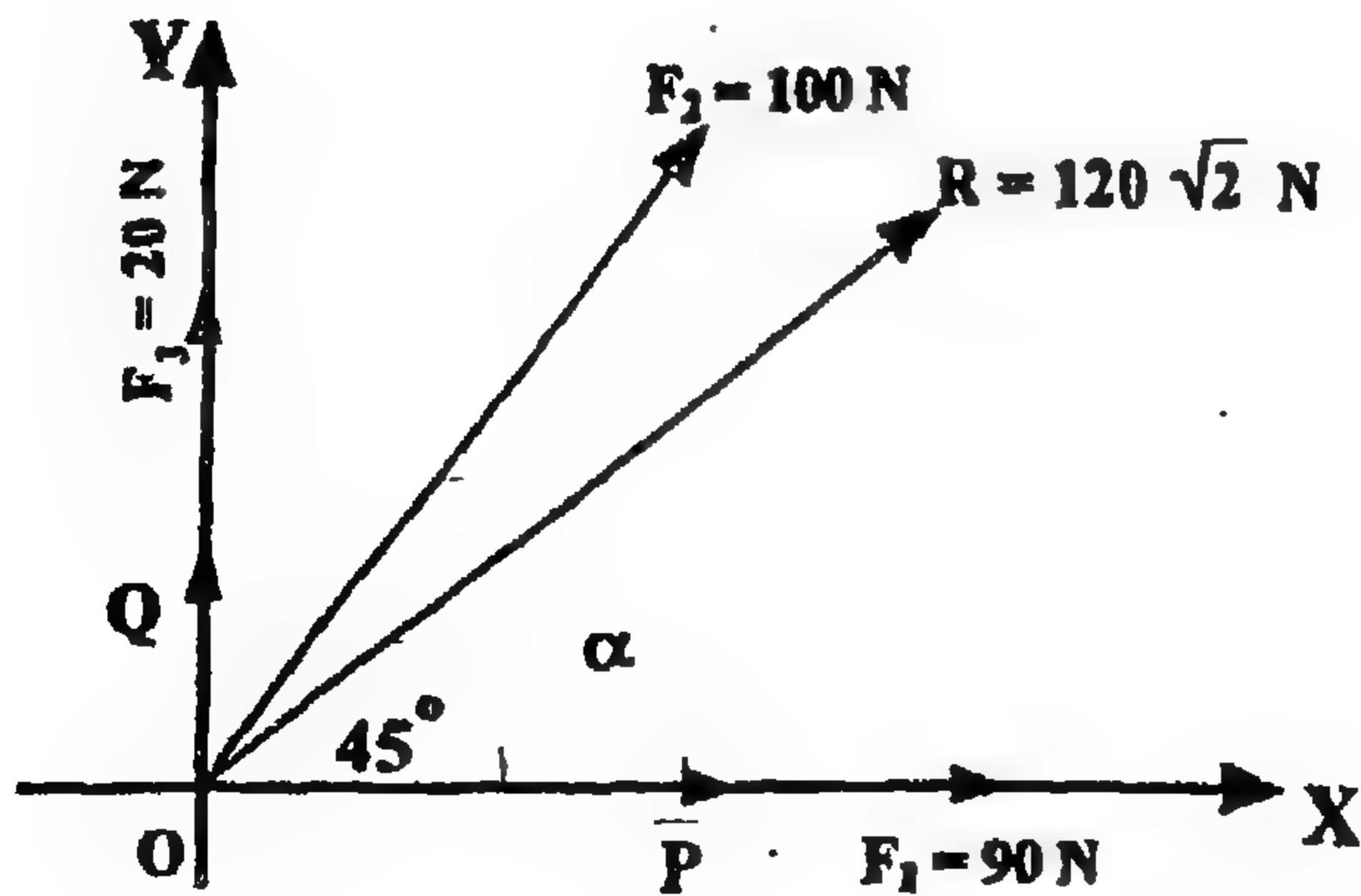
من الرسم:

$$R \approx 10.5 \text{ cm} (20 \text{ N/1 cm}) = 210 \text{ N}$$

$$\theta = 45^\circ$$

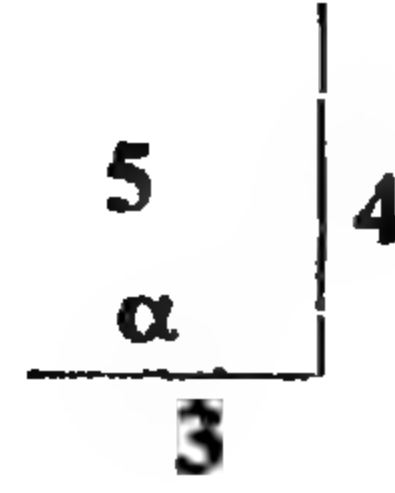
مثال ٣ :

يراد اضافة القوتين المتعامدين  $\vec{P}$  ,  $\vec{Q}$  الى القوى الثلاثة  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  و  $\vec{F}_3$  المبينة في الشكل بحيث يكون محصلة المجموعة  $\vec{R}$ .



حيث  $N = 120\sqrt{2}$  و تميل على الأفقي بزاوية  $\theta = 45^\circ$  حل تحليليا و بيانيا.

علما بأن :



الحل:

ملاحظة:

المتجه غير المعلوم اتجاهه نفرض له أي اتجاه.

إذا كان الناتج بعد الحل بالموجب إذن الاتجاه المفروض صحيح.

إذا كان الناتج بعد الحل بالسالب إذن الاتجاه الصحيح عكس الاتجاه المفروض.

أولاً: الحل تحليليا

نفرض اتجاه  $\bar{Q}$  ,  $\bar{P}$  كما في الرسم و بتطبيق شروط التكافؤ

$$R_x = \sum F_x$$

$$120\sqrt{2} \cos 45 = 90 + 100 (\cos \alpha) + P$$

$$120 = 90 + 60 + P$$

$$\therefore P = -30N$$

إذن إشارة السالب تعني اتجاه  $\bar{P}$  عكس الاتجاه المفروض.

$$R_y = \sum F_y$$

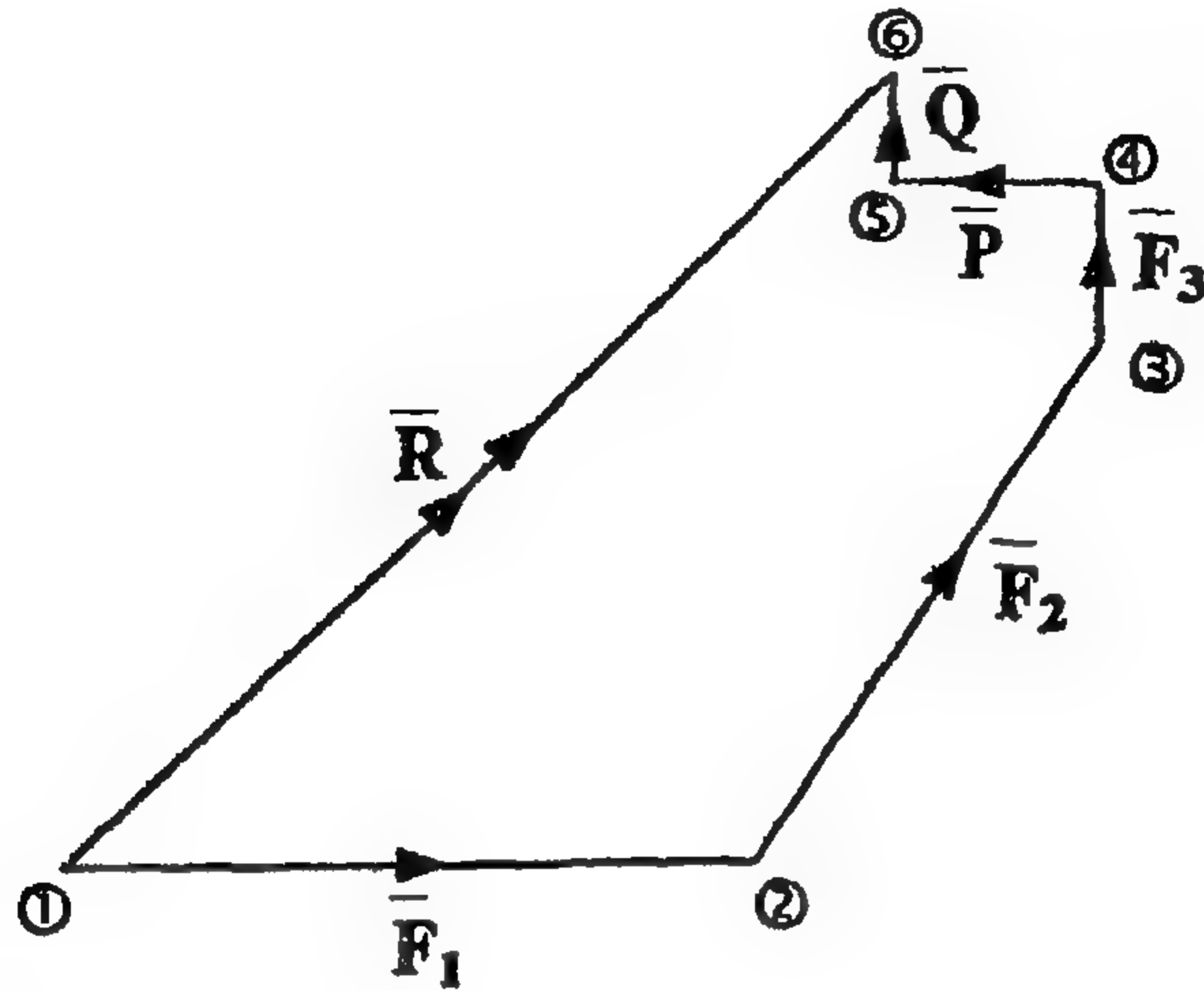
$$120\sqrt{2} \sin 45 = 100 (\cos \alpha) + 20 + Q$$

$$120 = 80 + 20 + Q$$

$$\therefore Q = 20 N$$

## الحل بيانياً:

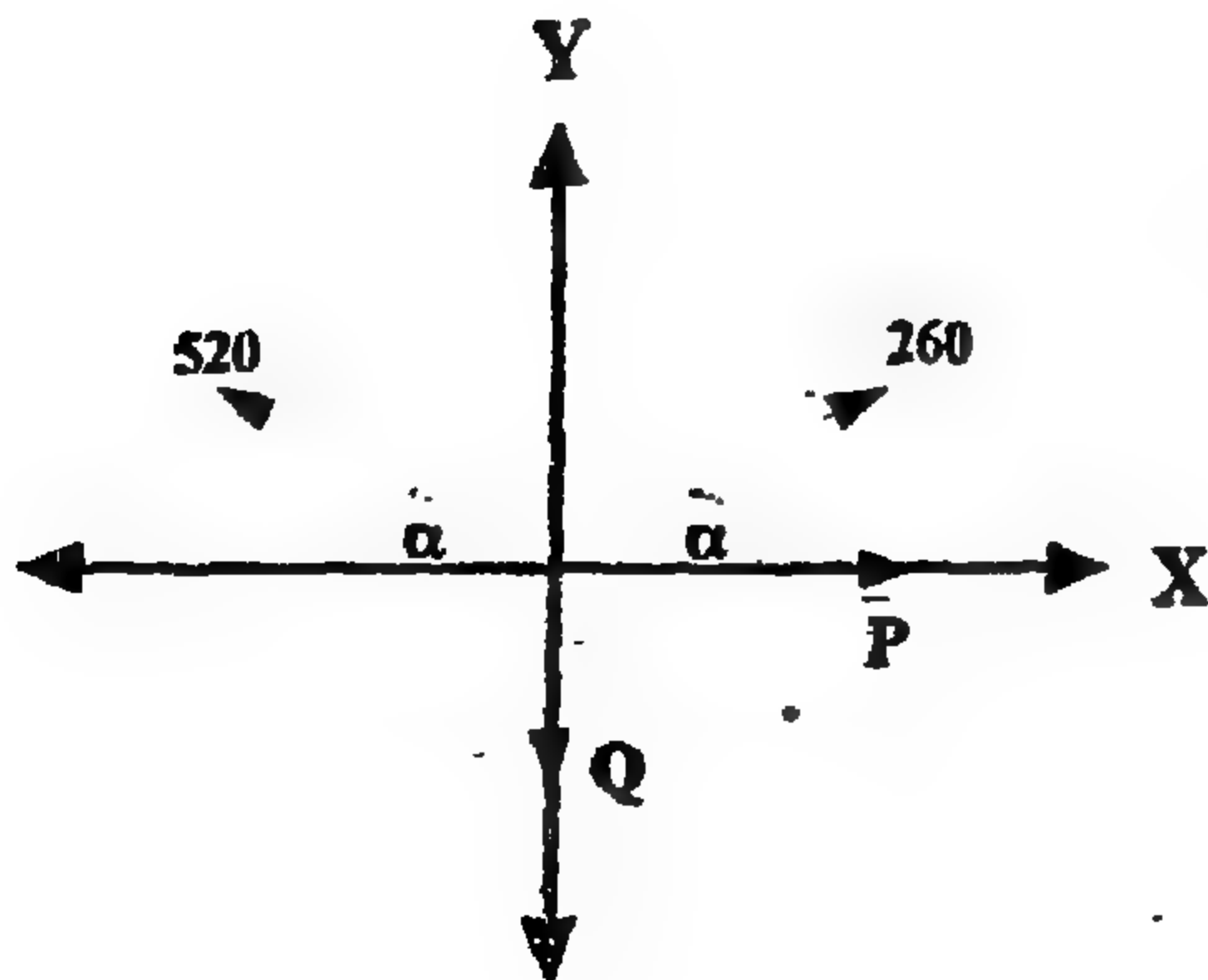
مقياس رسم القوى: ( 1 cm = 20 N )



$$P = 1.5\text{cm} \times \frac{20\text{N}}{1\text{cm}} = 30\text{N}$$

$$Q = 1\text{cm} \times \frac{20\text{N}}{1\text{cm}} = 20\text{N}$$

مثال ٤ :

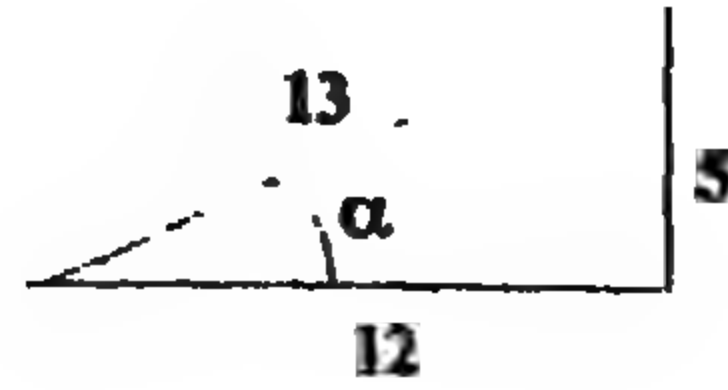


عين مقدار القوتين المتعامدين P و Q  
لكي تكون المجموعة الميعة بالشكل متزنة و  
ذلك تحليلها بيانياً .



علماً بأن:

$$\tan \alpha = 5/12$$



الحل:

أولاً تحليلياً:

∴ المجموعة متزنة.

$$\therefore R = 0$$

$$\therefore R_x = 0, \quad R_y = 0$$

$$\therefore R_x = \sum F_x = 0$$

$$P + 260 \cos \alpha - 520 \cos \alpha = 0$$

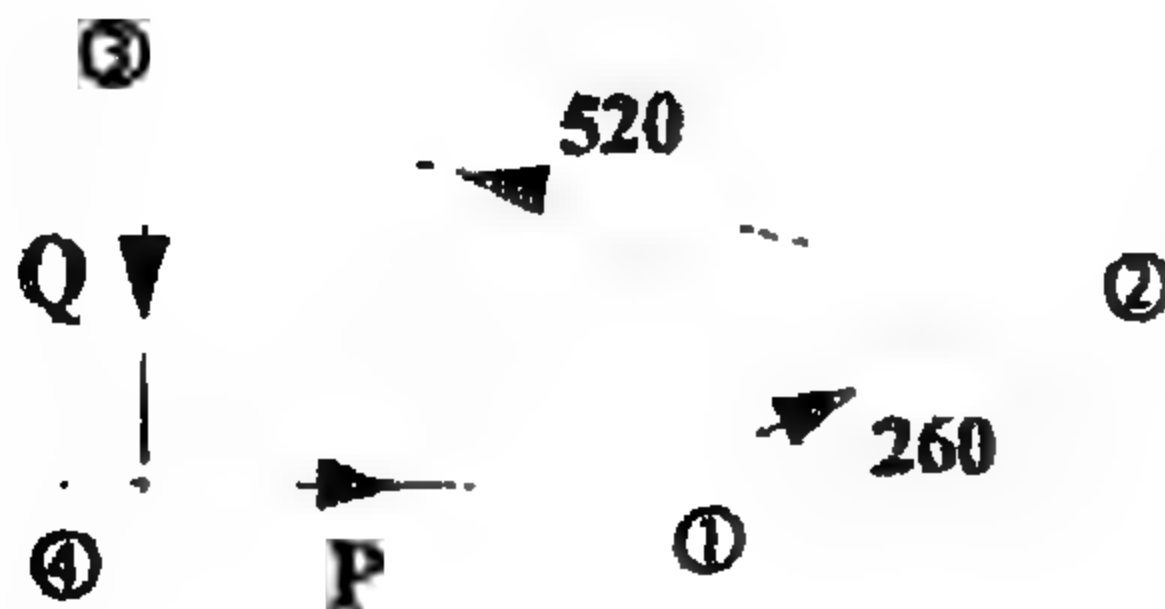
$$\therefore P = 240 \text{ N}$$

$$\therefore R_y = \sum F_y = 0$$

$$-Q + 260 \sin \alpha + 520 \sin \alpha = 0$$

$$Q = 300 \text{ N}$$

ثانياً: بيانياً



مقياس رسم القوى (1 cm = 100 N)

$$Q = 3\text{cm} \times \frac{100\text{N}}{1\text{cm}} = 300\text{N}$$

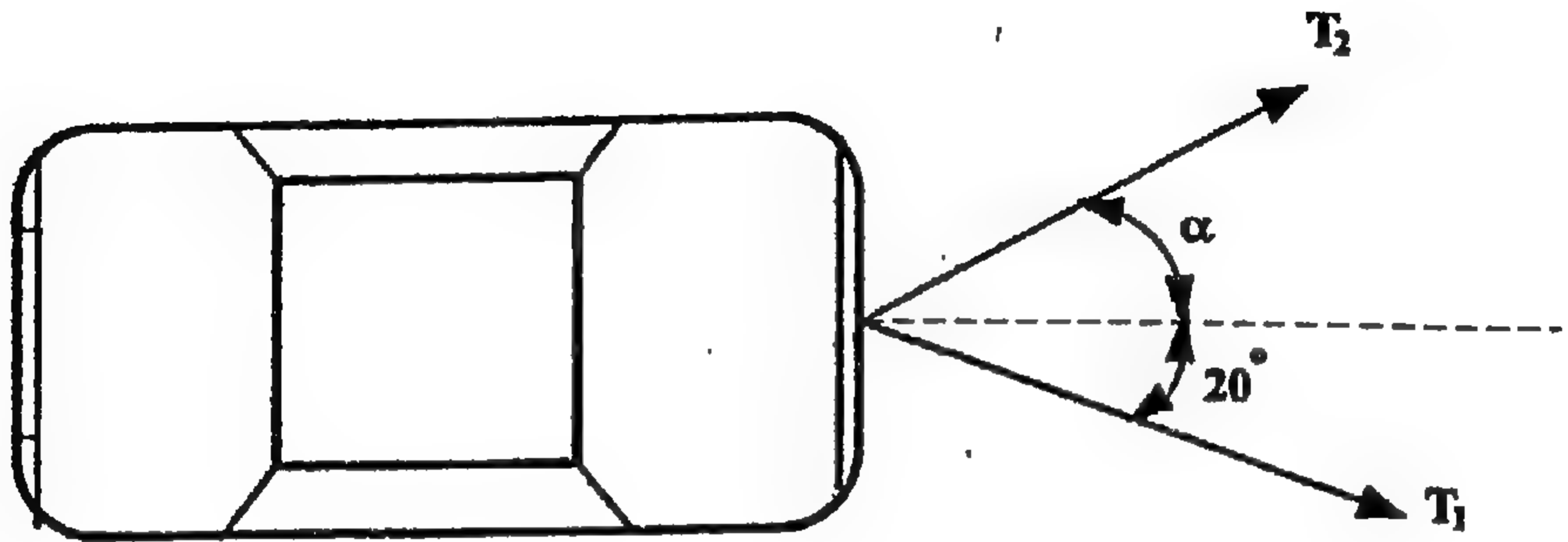
$$P = 2.4\text{cm} \times \frac{100\text{N}}{1\text{cm}} = 240\text{N}$$

## مثال ٥ :

عربة معطلة تسحب بواسطة حبلين فإذا كانت محصلة الشدين في الحبلين هي 300 N في اتجاه محور السيارة أوجد

(أ) الشد في كل من الحبلين إذا كانت زاوية  $\alpha = 30^\circ$

(ب) أوجد أقل زاوية  $\alpha$  حتى يكون الشد  $T_2$  أقل ما يمكن.



الحل:

(أ) الزاوية  $\alpha = 30^\circ$

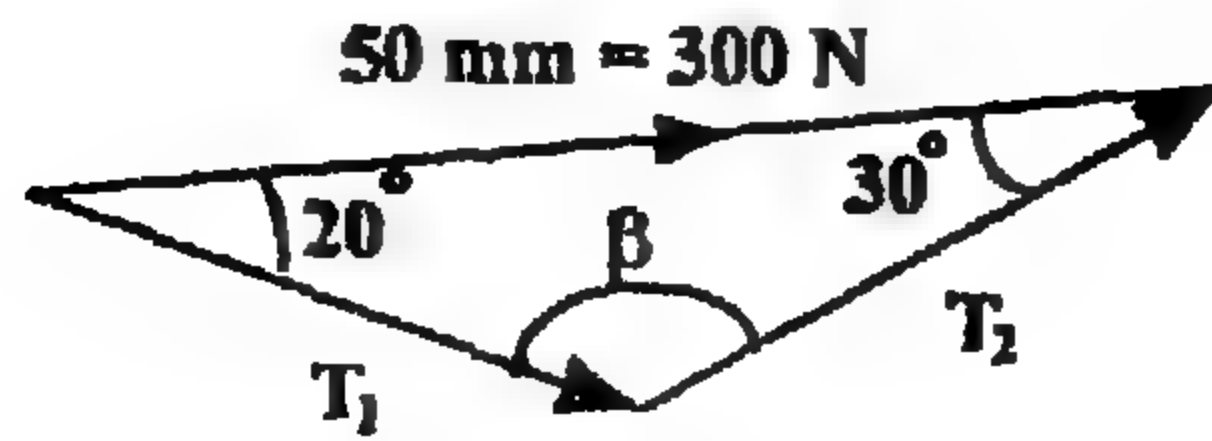
المعلوم هنا مقدار المحصلة واتجاه القوتين أي أننا مطالبين بتحليل هذه المحصلة إلى اتجاهين معلومين. وفي هذه الحالة نتبع إحدى الطرق الآتية:

١ - الطريقة البيانية: بأخذ مقياس رسم مناسب ( $1 \text{ cm} = 60 \text{ N}$ )

تكون المحصلة طولها 5 cm وبجعلها قطر في متوازي الأضلاع أو ضلع من مثلث أضلاعه متوازي الاتجاهات المألومة يمكن رسم مثلث القوى كما في الشكل وبقياس طولي الضلعين  $T_1$  ،  $T_2$  نجد أن:

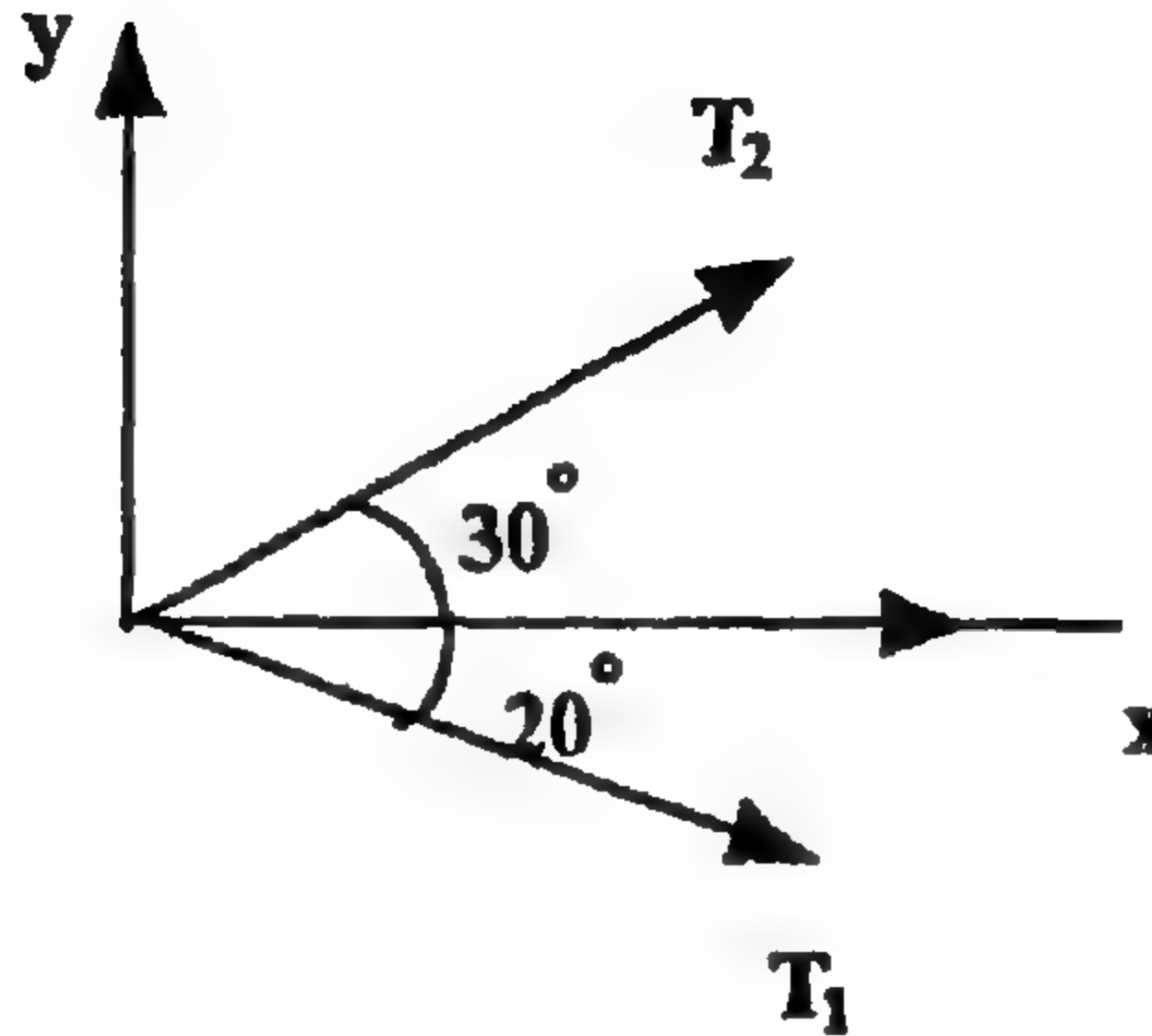
$$T_1 \approx 3.27 \text{ cm} \approx 3.27 \times 60 \text{ N} \approx 196 \text{ N}$$

$$T_2 \approx 2.23 \text{ cm} \approx 2.23 \times 60 \text{ N} \approx 134 \text{ N}$$



٢ - الطريقة التحليلية: بتحليل القوة  $T_1$  ،  $T_2$  في اتجاه المحصلة (x) واتجاهها عمودي عليه

(y)



$$\sum T_x = R_x \therefore T_1 \cos 20^\circ + T_2 \cos 30^\circ = 300$$

$$\sum T_y = R_y \therefore -T_1 \sin 20^\circ + T_2 \sin 30^\circ = 0$$

بحل المعادتين:

$$\therefore T_2 = 300 / (\cos 30^\circ + \cos 20^\circ \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}) = 133.9 \text{ N}$$

$$T_1 = T_2 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} = 195.8 \text{ N}$$

ويوجد حل أبسط باستخدام قوانين حساب المثلثات في مثلث القوى نجد أن

$$R/\sin\beta = T_1/\sin 30^\circ = T_2/\sin 20^\circ$$

وتسمى هذه القاعدة بقاعدة لامي.

وهي لا تصلح إلا إذا ما كانت القوى ملتقبة في نقطة واحدة

وبلاحظ في هذه المسألة أن  $20^\circ + 30^\circ + \beta = 180^\circ$

$$\therefore \beta = 130^\circ$$

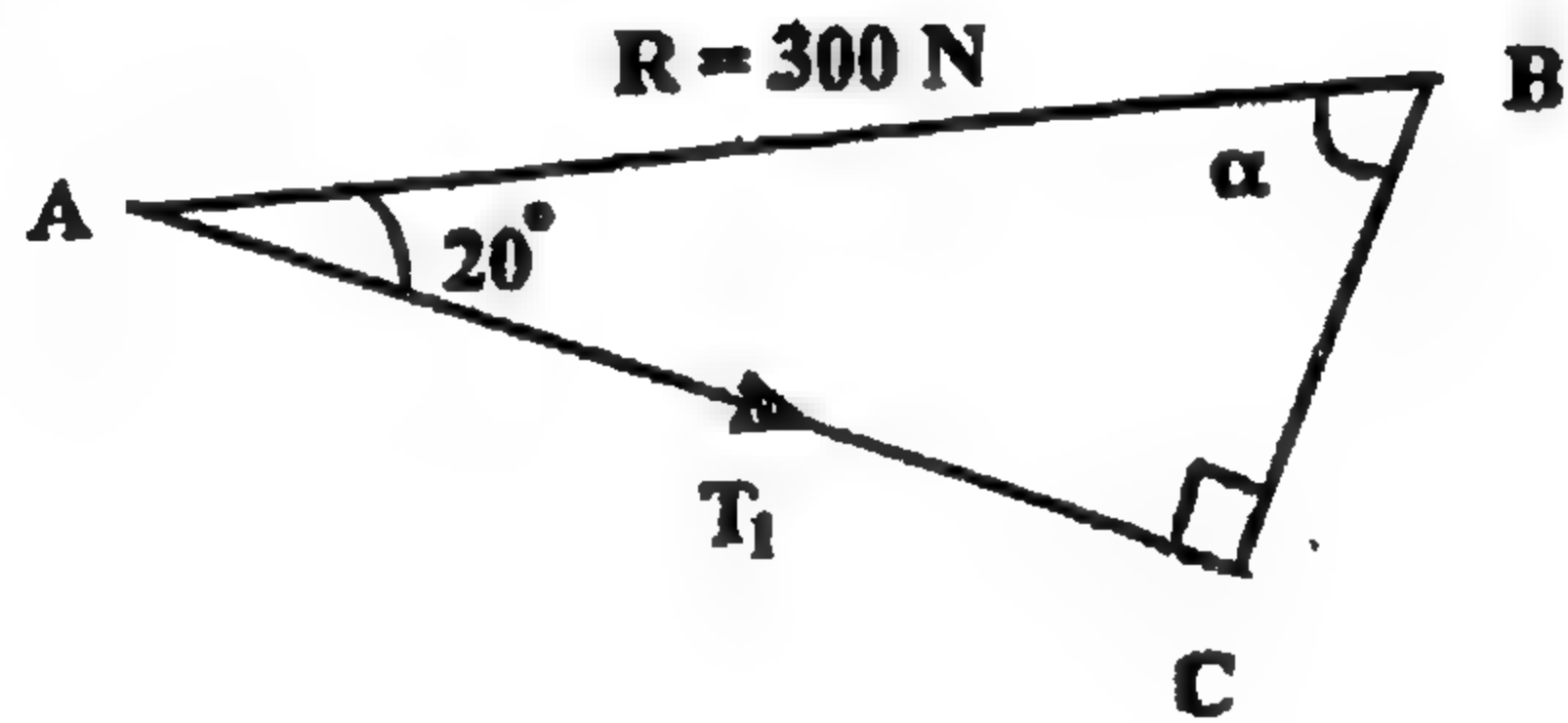
$$H_1 = R \sin 30^\circ / \sin (180^\circ - 50^\circ) = 195.8 \text{ N}$$

$$H_2 = R \sin 20^\circ / \sin (180^\circ - 50^\circ) = 133.9 \text{ N}$$

(ب) قيمة الزاوية  $\alpha$  التي تجعل القوة  $T_2$  أقل ما يمكن في مثلث القوى ABC الشكل الآتي  
نلاحظ أن نقطة B ثابتة وباستخدام قواعد حساب مثلثات البسيطة يمكن إثبات أن أقصر طول  
للضلع CB (إذا كانت الزاوية A ثابتة وطول AB ثابت) هو طول العمود الساقط من B على  
CB والذي يمثل مقدار واتجاه القوة  $T_2$  وفي هذه الحالة تكون  $T_2$  أقل ما يمكن وتكون الزاوية  $\alpha$   
 $= 70^\circ$

$$T_2 = 300 \sin 20^\circ = 102.6 \text{ N}$$

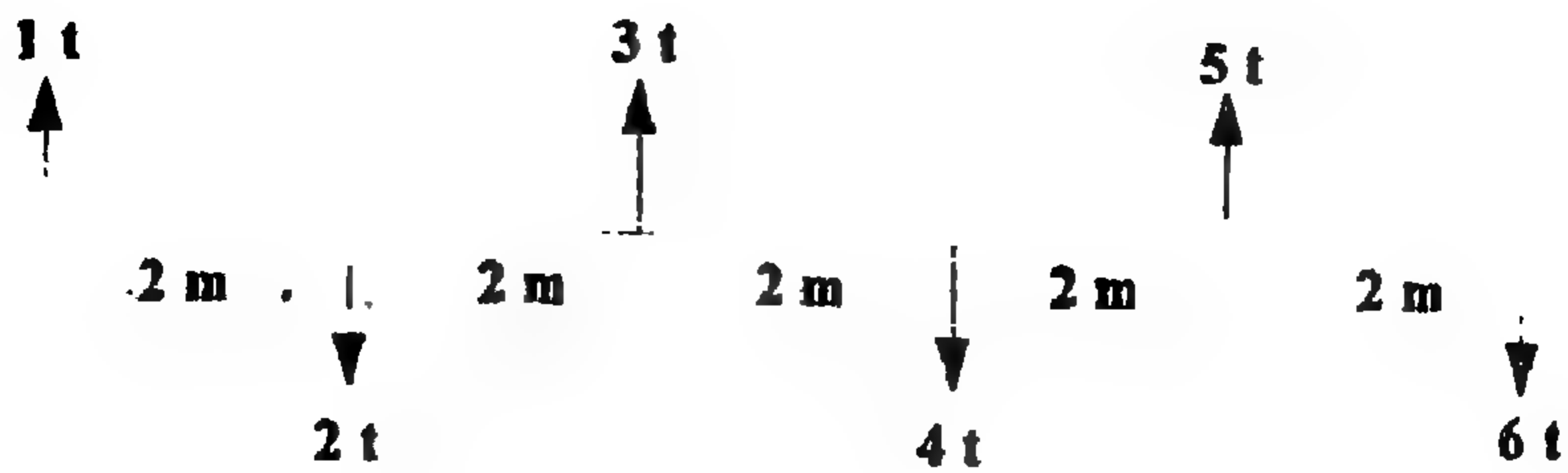
$$T_1 = 300 \cos 20^\circ = 282 \text{ N}$$



أمثلة على إيجاد محصلة مجموعة من القوى المتفرقة :

مثال ٦ :

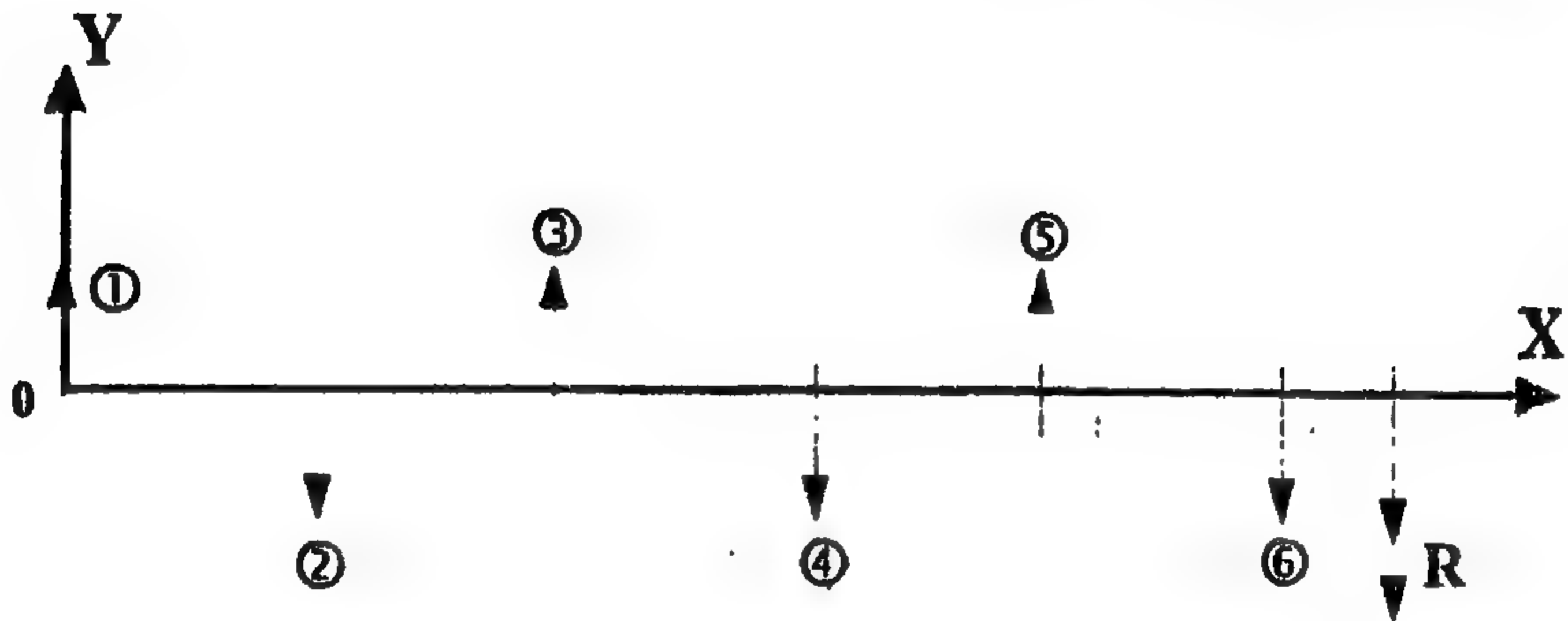
أوجد محصلة القوى المبينة تحليلها و بيانها مع تحديد خط عملها.



الحل:

أولاً: تحليلياً

نختار محورين متعامدين كما بالرسم



$$\therefore R_x = \sum F_x = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = -3$$

$$\therefore R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2}$$

$$R = 3$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-3}{0} = -\infty$$

$$\therefore \theta = 270^\circ$$

أما خط العمل فيتعين من قانون العزوم:



$$\Sigma M_0 = xR_y - yR_x$$

$$\Sigma M_0 = -2(2) + 3(4) - 4(6) + 5(8) - 6(10)$$

$$= -36 \text{ t.m}$$

$$\therefore xR_y - yR_x = x(-3) - y(0)$$

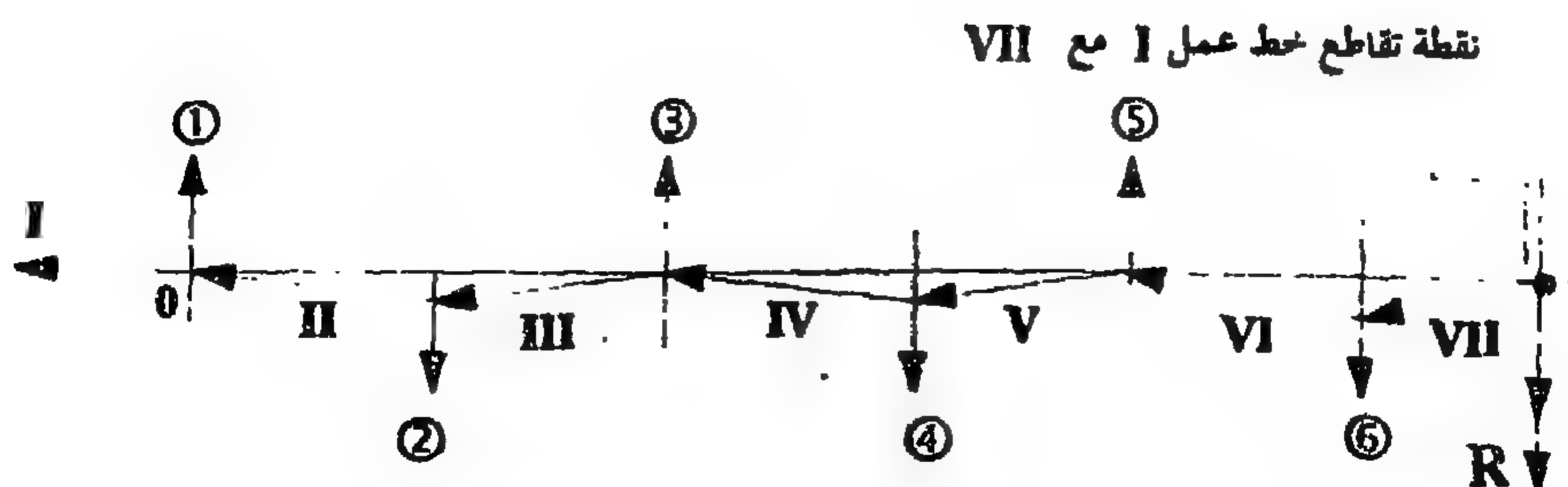
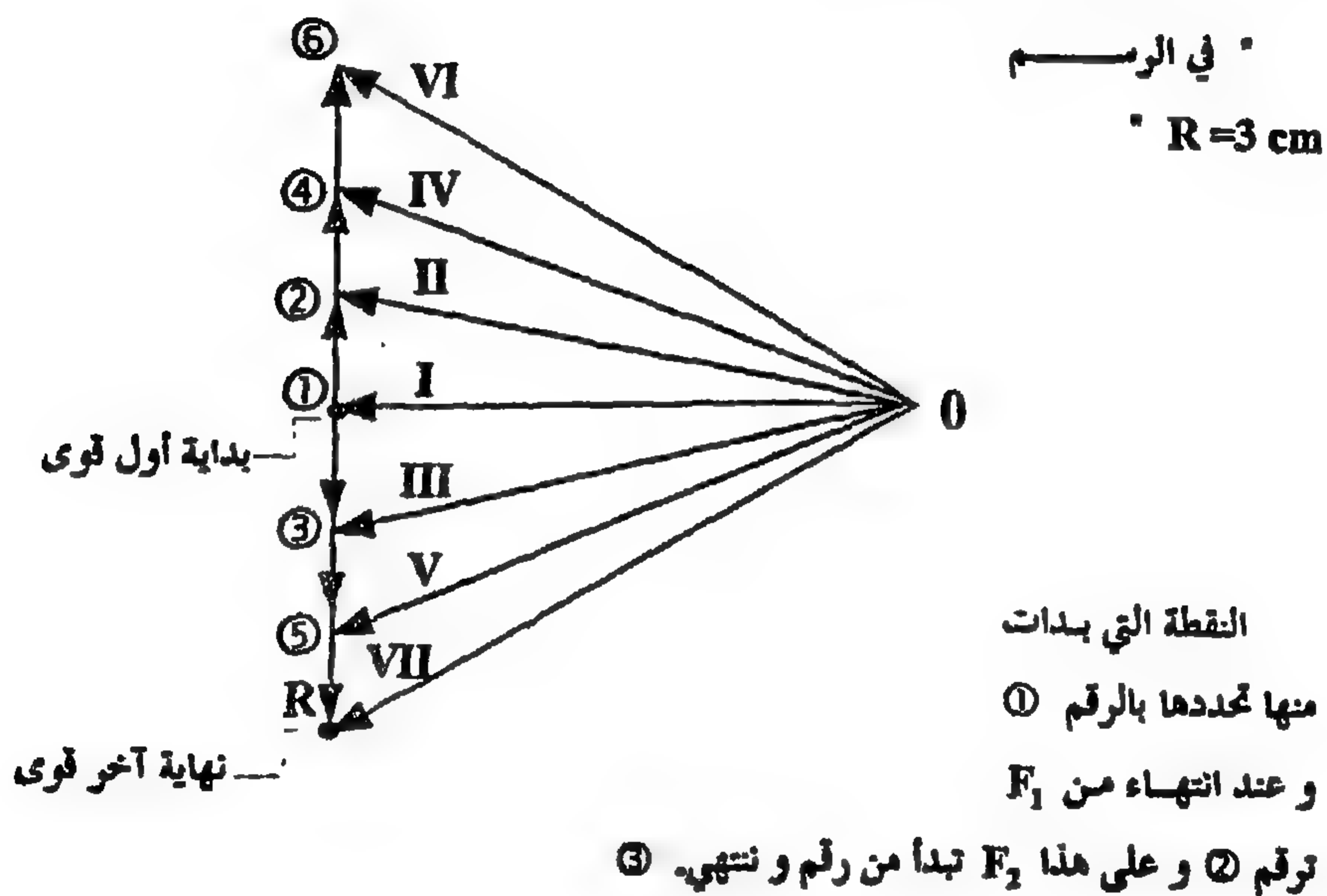
$$\therefore -36 = -3x$$

$$x = 12 \text{ m}$$

ثانياً: بيانياً

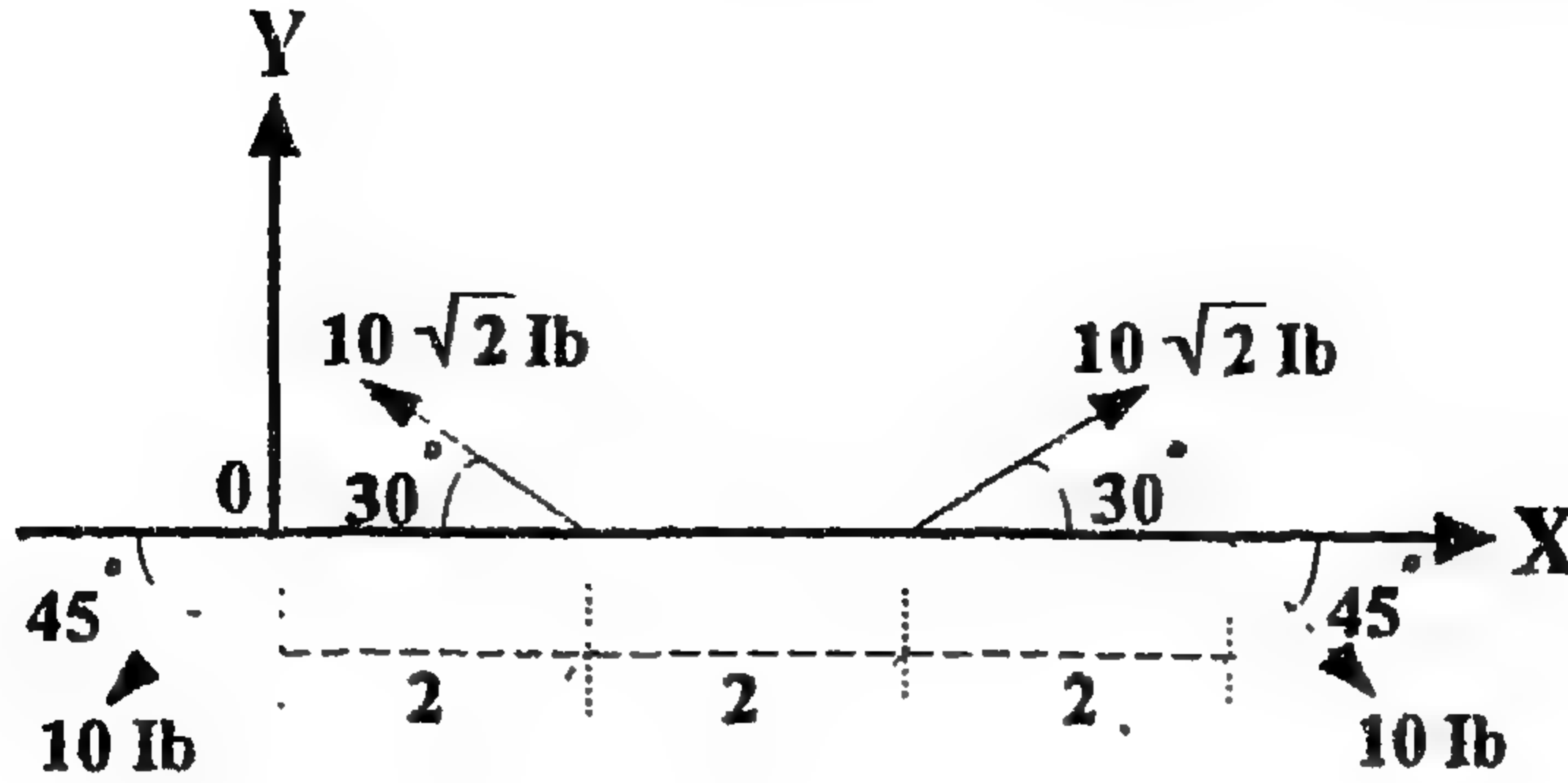
مقياس رسم المسافات: (1 cm = 1 m)

مقياس رسم القوى: (1 cm = 1 N)



## مثال ٧:

حقق بالطرق التحليلية و البيانية أن القوى الموضحة في توازن.



الحل

أولاً: تحليلياً " تحديد محوري التعامد "

$$\therefore \sum F_x = 0$$

$$-10 \cos 45 - 10\sqrt{2} \cos 30 + 10\sqrt{2} \cos 30 + 10 \cos 45 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore \sum F_y = 0$$

$$-10 \sin 45 + 10\sqrt{2} \sin 30 + 10\sqrt{2} \sin 30 - 10 \sin 45 \dots\dots\dots (2)$$

$$\therefore \sum M_o = 0$$

$$+ (10\sqrt{2} \sin 30)(2) + (10\sqrt{2} \sin 30)(4) - (10 \sin 45)(6)$$

$$10\sqrt{2} + 20\sqrt{2} - 30\sqrt{2} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن المجموعة تحقق أتران.

ثانياً: الحل بيانياً

مقياس رسم المسافات: ( 1 cm = 1 m )

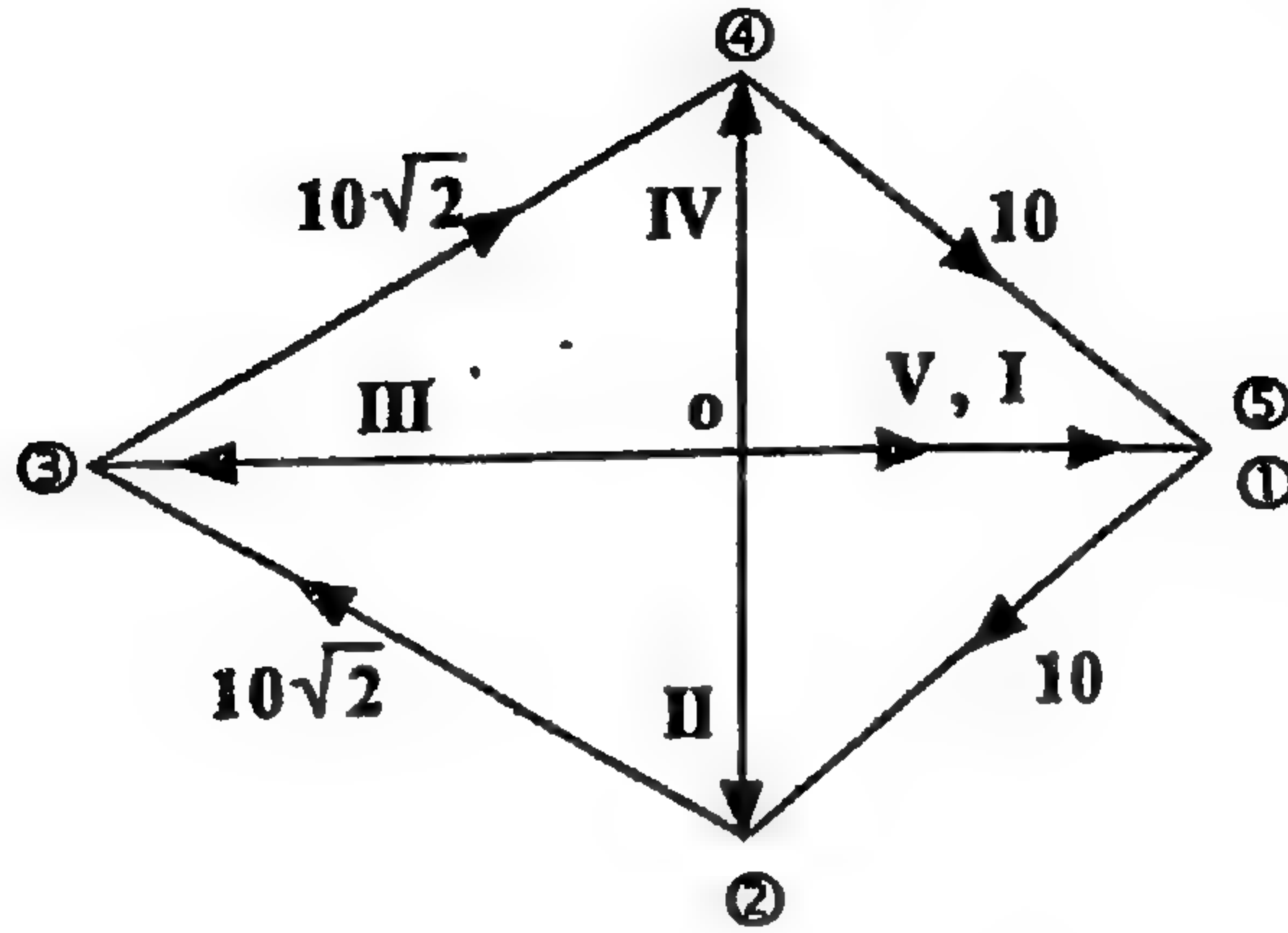
مقياس رسم القوى: ( 1 cm = 2 N )

: الحل بيانياً

مقياس رسم المسافات: ( 1 cm = 1 m )

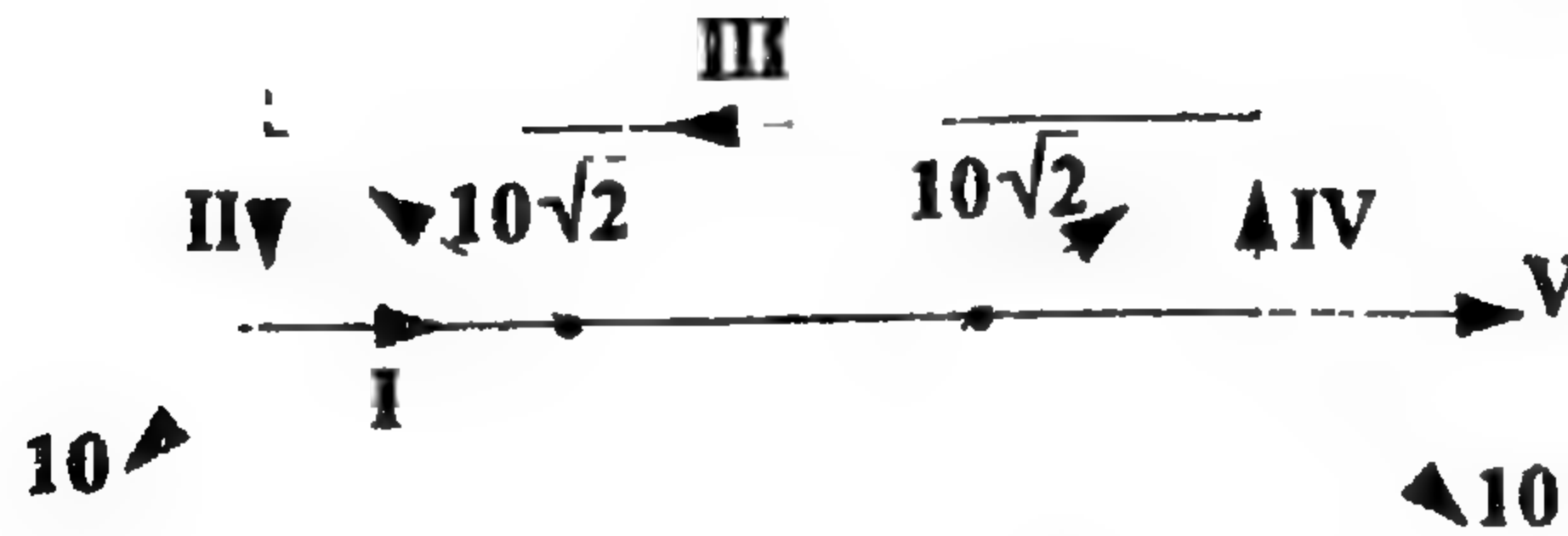
مقياس رسم القوى: ( 1 cm = 2 N )

أ - مضلع القوى:



ملاحظة: مضلع القوى مقفل.

ب - المضلع الحلبي:



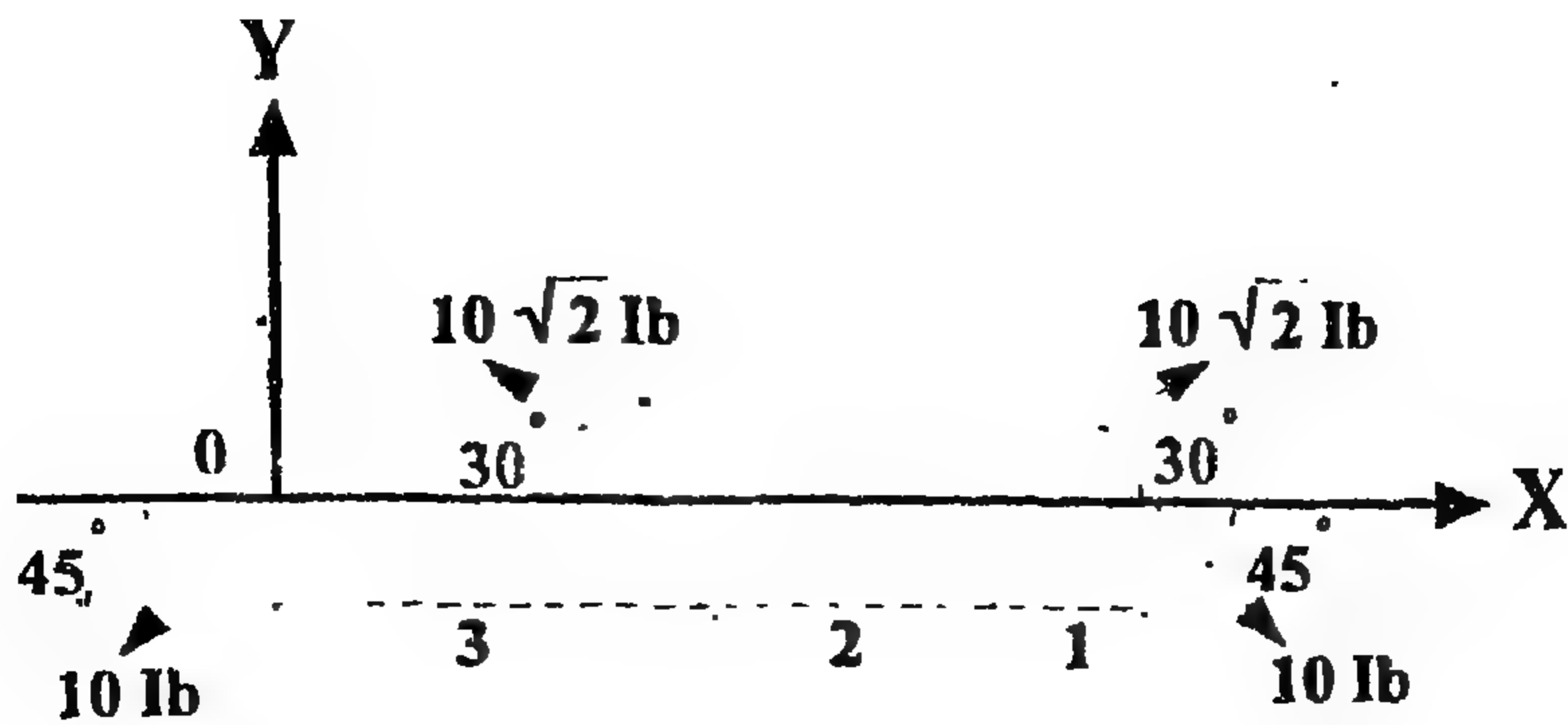
من الرسم يتضح أن المضلع الحلبي مقفل.

∴ مضلع القوى مقفل و المضلع الحلبي مقفل.

∴ مجموعة القوى تحقق اتزان.

: ٨

حقن بالطرق التحليلية و البيانية أن محصلة القوى الموضحة أزواج و عين عومه.



الحل:

أولا تحليليا:

$$\therefore \sum F_x = 0$$

$$-10 \cos 45 - 10\sqrt{2} \cos 30 + 10\sqrt{2} \cos 30 + 10 \cos 45 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore \sum F_y = 0$$

$$-10 \sin 45 + 10\sqrt{2} \sin 30 + 10\sqrt{2} \sin 30 - 10 \sin 45 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\therefore \sum M_o = 0$$

$$+ (10\sqrt{2} \sin 30)(3) + (10\sqrt{2} \sin 30)(5) - (10 \sin 45)(6) \\ = 10\sqrt{2} \text{ N.cm} \dots\dots\dots (3)$$

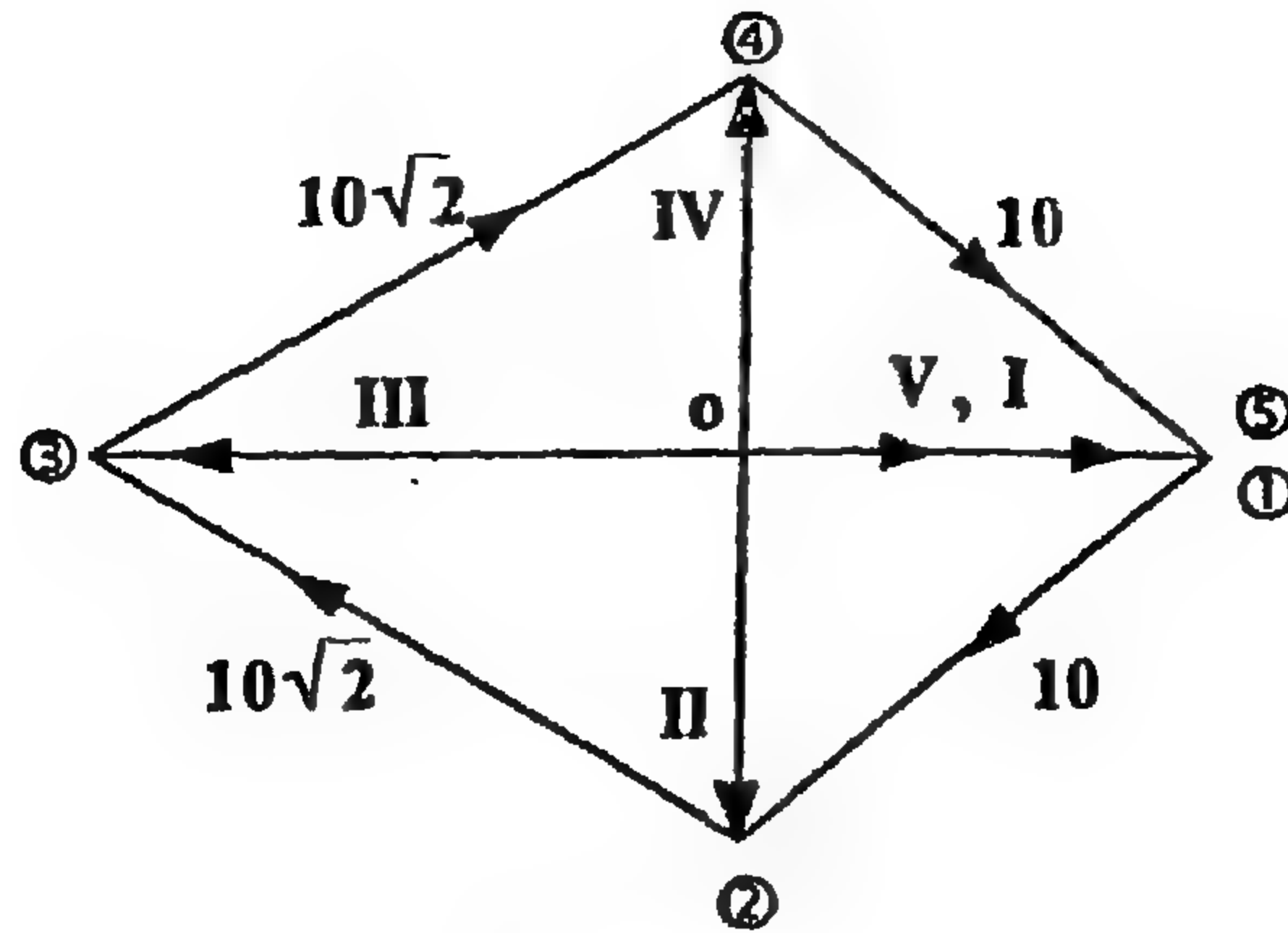
من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن:

$$\therefore \sum M_o \neq 0 = 10\sqrt{2} \text{ N.cm}$$

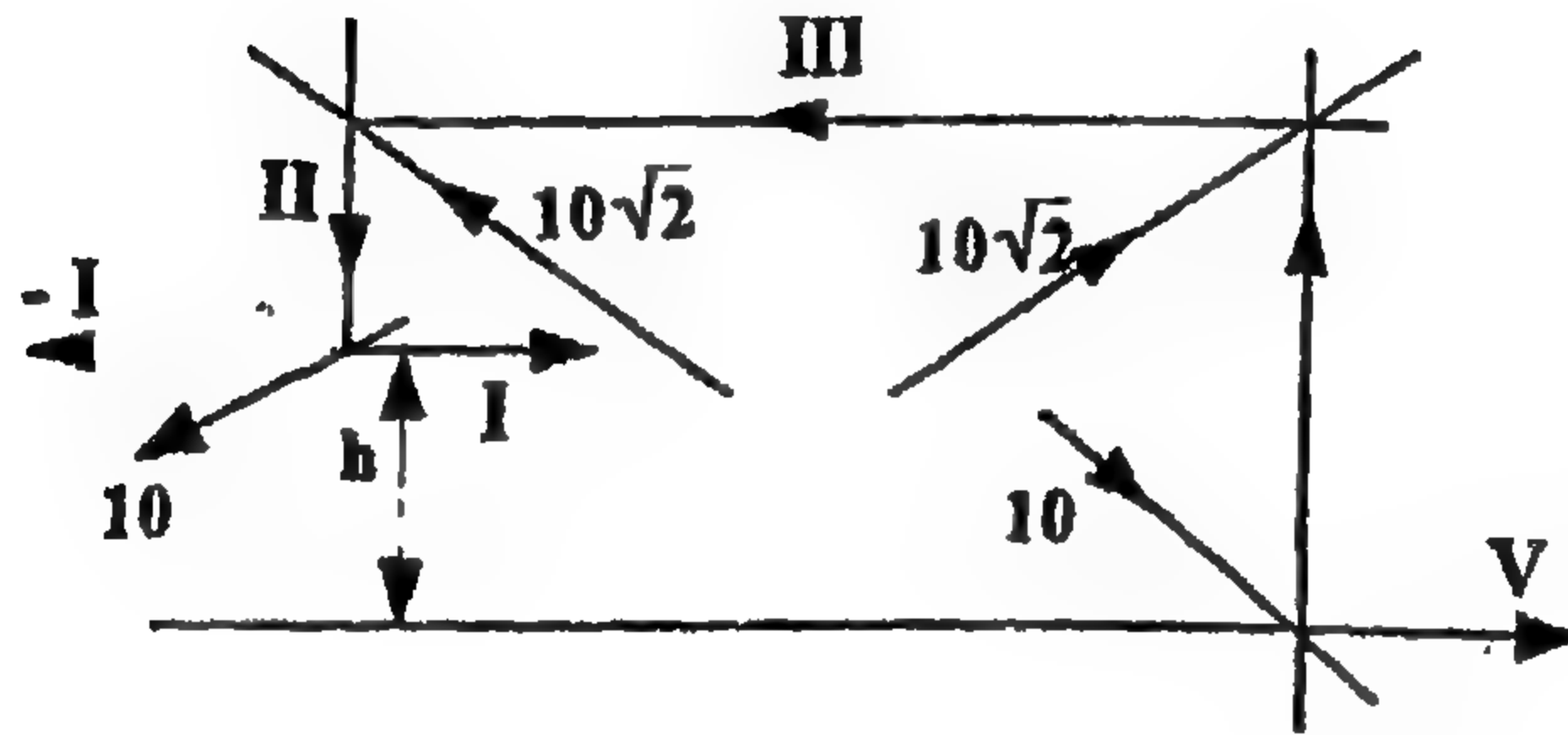
مجموعة القوى تكون أزواج عزمه  $10\sqrt{2} \text{ N.cm}$

ثانيا: الحل بيانياً

مقياس رسم المسافات : ( 1 cm = 1 m )



مضلع القوى مقفل



ملاحظة: أن مضلع الجبلي مفتوح.

$$V + (-I) = \text{مجموع القوى}$$

الازدواج المحصل هو مكون من القوتين  $-I$  ،  $V$

" و ذلك لأن  $V$  محصلة المجموعة مضافا إليها القوى المساعدة  $I$  ليترك  $I$  أي إضافة  $-I$  إلى  $V$

لحصل على الازدواج المحصل ."

$$M = +(V)(h)$$

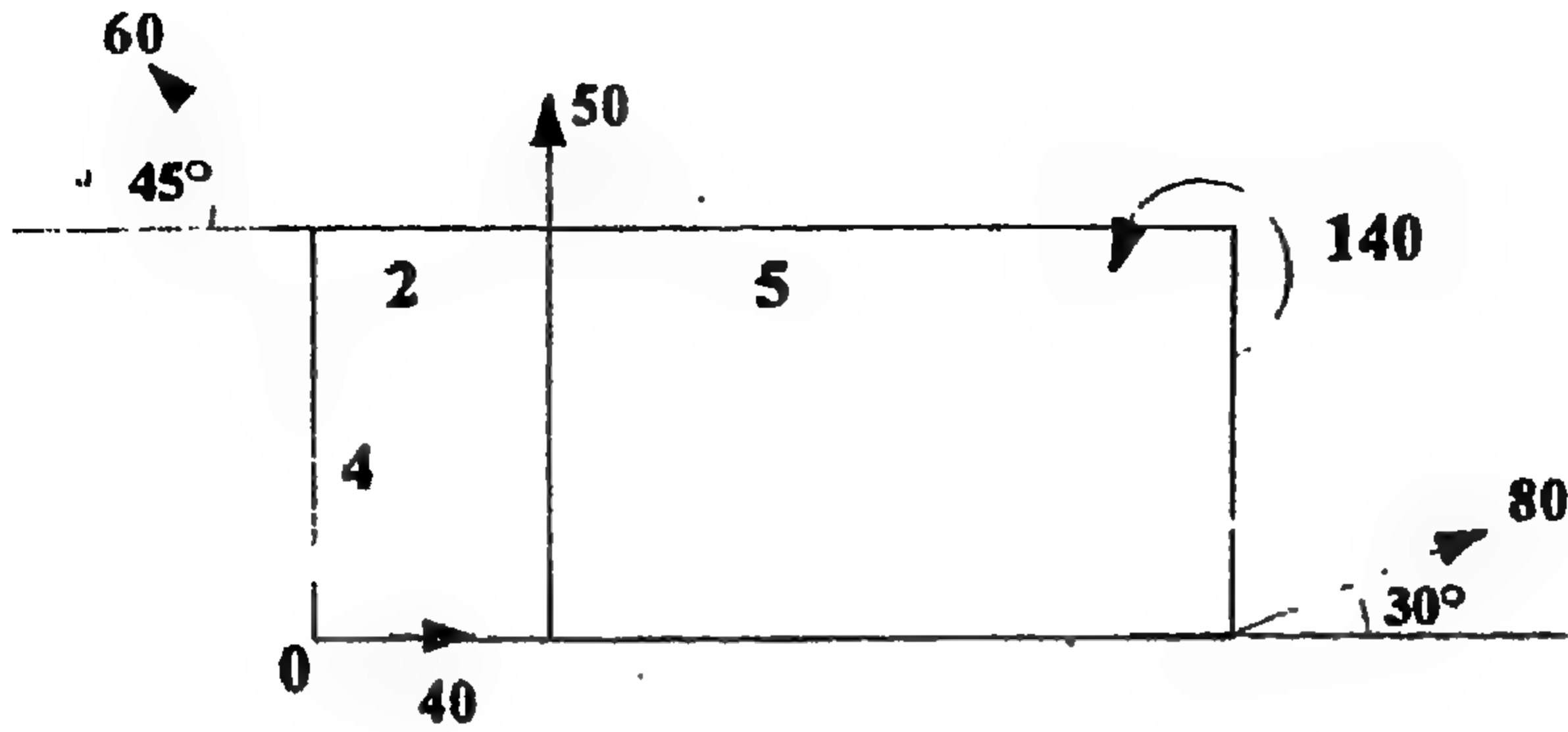
$$= +(3.5 \times 2)(2 \times 1)$$

$$= 14 \text{ N.m} = 10\sqrt{2} \text{ N.m}$$



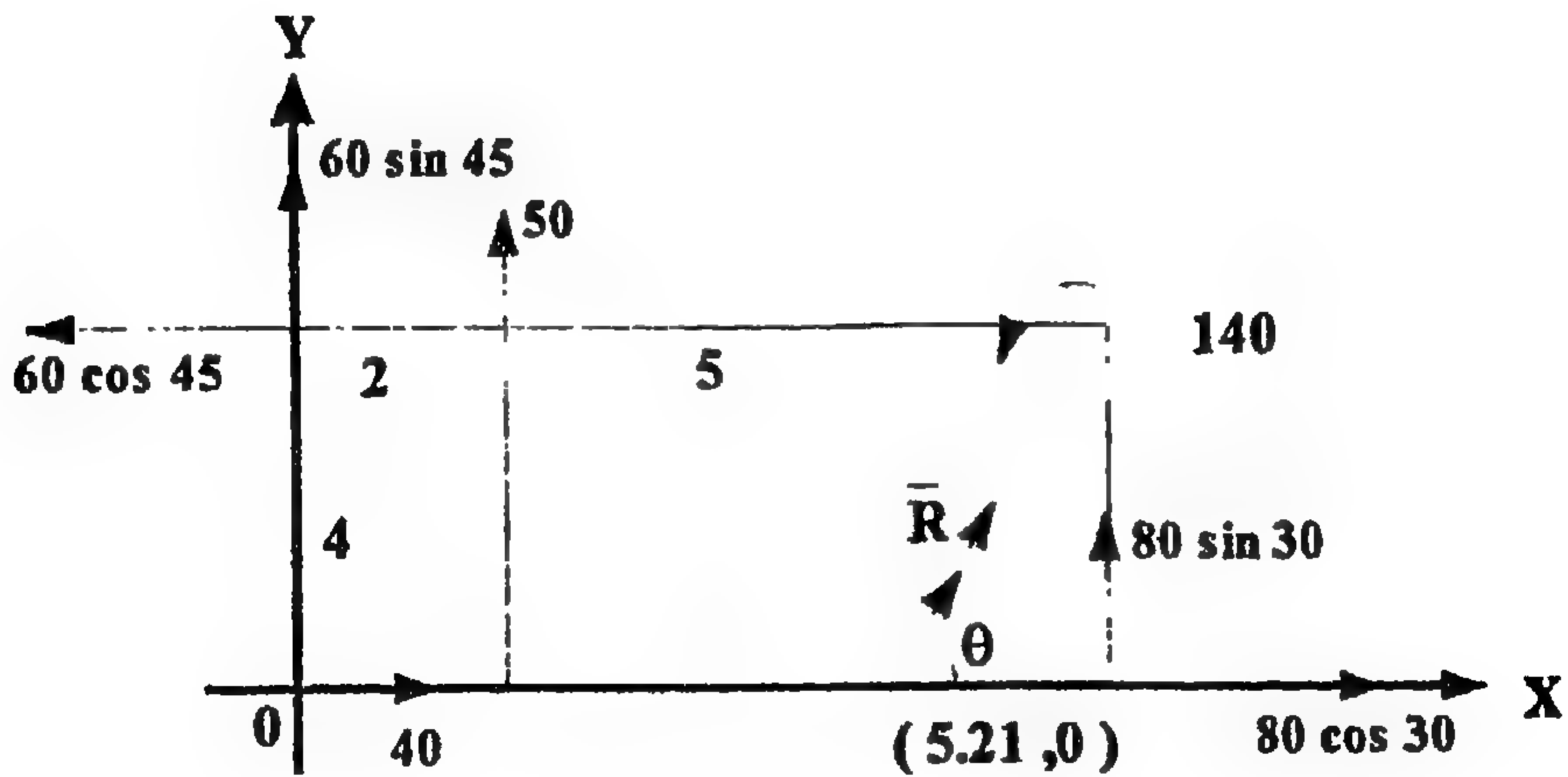
## مثال ٩:

أوجد محصلة القوى و الأزواج الموضحة في الشكل تحليلياً ، و بيانياً.



الحل :

أولاً: تحليلياً



تحديد محاورين متعامدين x ، y

$$\begin{aligned} \vec{R}_x &= \sum F_x \\ &= 40 + 80 \cos 30 - 60 \cos 45 = 66.9 \end{aligned}$$

$$\downarrow + \uparrow R_y = \sum F_y$$

$$= 80 \sin 30 + 50 + 60 \sin 45 = 132.4$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(66.9)^2 + (132.4)^2} = 148.9$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{132.4}{66.9}$$

$$\theta = 63.2^\circ$$

لتحديد مكان نقطة تأثير R

$$\curvearrowleft \quad \curvearrowright \quad \sum M_o = x \cdot R_y - y \cdot R_x$$

$$x \times 132.4 + y \times 66.9 = (80 \sin 30)(7) + 50(2) + (60 \cos 45)(4) + 140$$

و بوضع  $y = 0$  نحصل على التقاطع مع محور x

$$x = 5.21$$

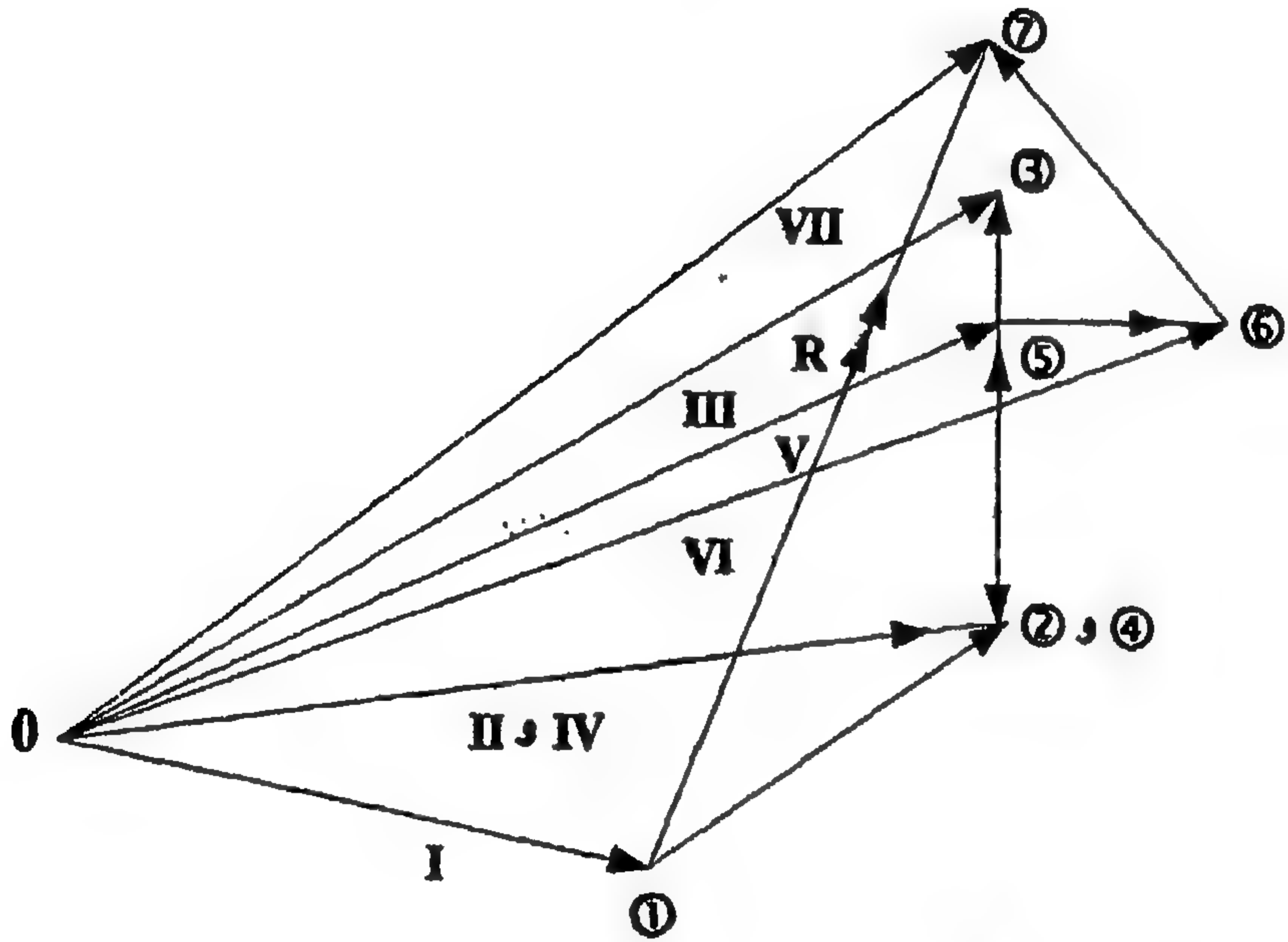
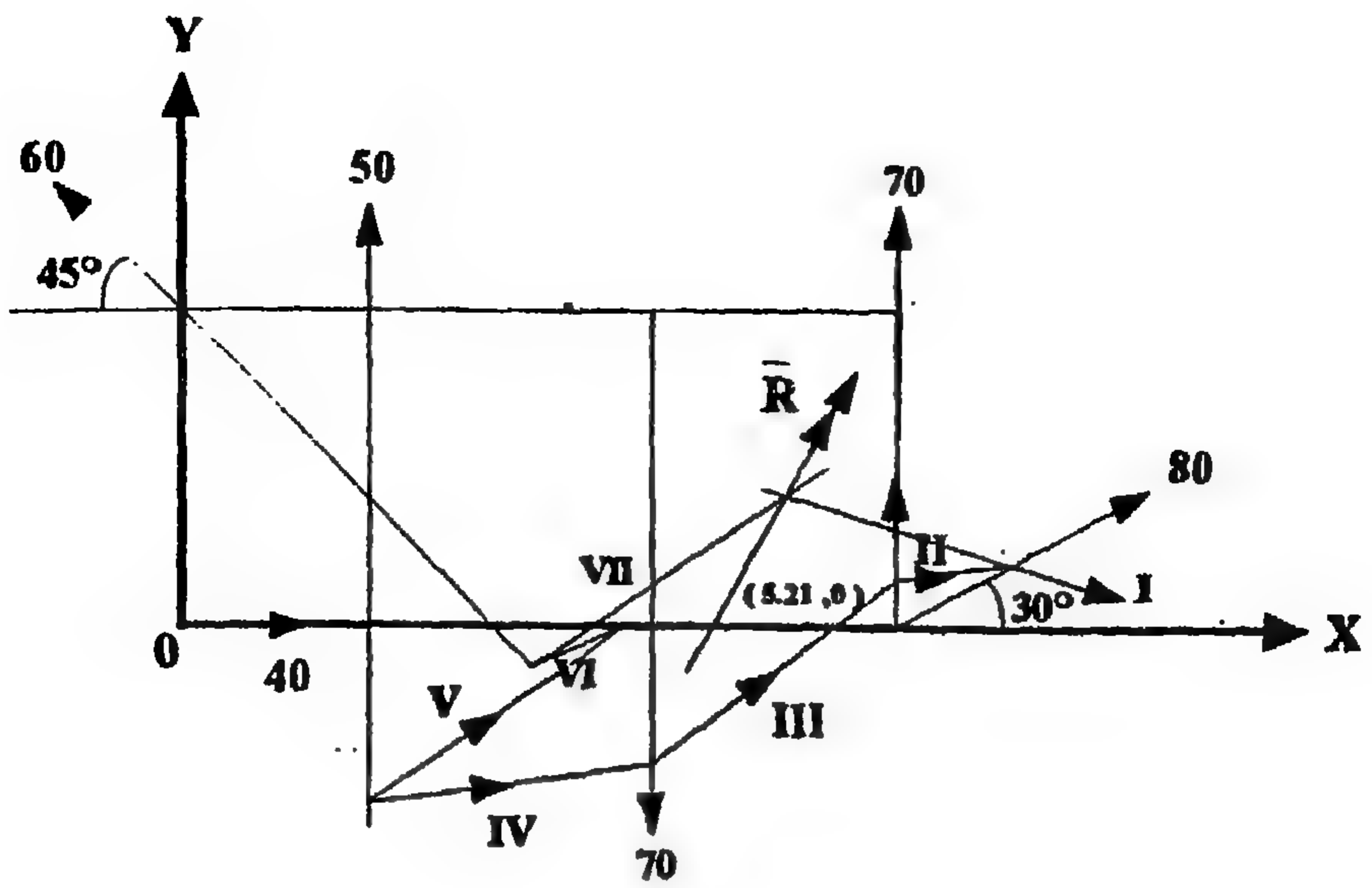
ثانياً بيانياً:

ملاحظة: في الحل بيانياً يتم تحويل عزم الإزدواج الى قوتين بينهما مسافة معينة بحيث يكون حاصل ضرب إحدى القوتين في المسافة بينهم تساوي عزم الإزدواج.

هكذا :- أن هناك عزم ازدواج 140

والذي يكافئ قوتين كل منهما 70

و المسافة بينهم 2



مقياس رسم القوى ( : 1 cm = 20 N )

مقياس رسم المسافات ( : 1 cm = 1 m )

$$R = 7.45 \times 20 = 149 \text{ N}$$

الجزء المقطوع من محور  $x = 5.2 \times 1 = 5.2 \text{ m}$

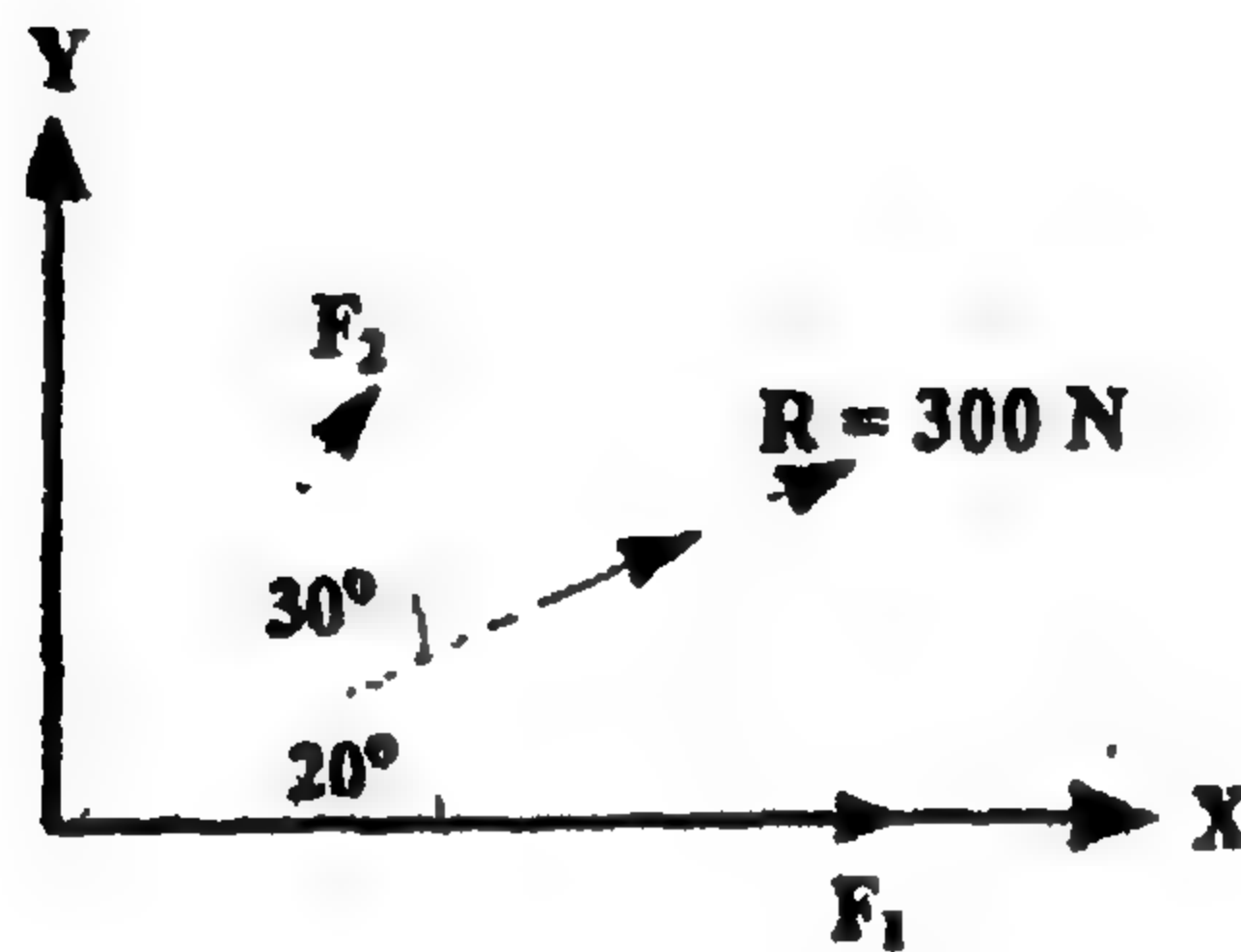
$$\theta = 63^\circ$$

## أمثلة على تحليل القوى في المستوى

مثال ١٠:

حلل القوة  $R = 300$  نيوتن الى قوتين  $F_1, F_2$  معلوم خطوط عملها - حل بيانياً و تحليلياً -.

الحل: تحليلياً



لنختار محورين متعامدين  $x, y$  كما بالشكل

$$\Sigma F_x = R_x$$

$$\therefore 300 \cos 20 = F_1 + F_2 \cos 50 \dots\dots\dots (1)$$

$$R_y = \Sigma F_y$$

$$300 \sin 20 = F_2 \sin 50 \dots\dots\dots (2)$$

$$F_2 = \frac{300 \sin 20}{\sin 50} = 133.94 \text{ N}$$

$$\therefore 300 \cos 20 = F_1 + 133.94 \cos 50$$

$$F_1 = 195.81 \text{ N}$$

الحل: بيانياً

∴ أنه معلوم ثلاث خطوط عمل القوى.

∴ الحل بمثلث القوى.

مقياس رسم القوى: ( 1 cm = 50 N )



$$F_1 = 3.9 * 50 = 195 \text{ N}$$

$$F_2 = 2.65 * 50 = 132.5 \text{ N}$$

مثال ١١:

حل القوة  $R = 300$  نيوتن إلى قوتين  $F_1$ ،  $F_2$  بحيث يكون  $F_1$  معلوم خط عملها كما في الرسم  $F_2$  تكون أقل ما يمكن حل بيانياً وتحليلياً. بحيث الزاوية بين  $R$ ،  $F_1$  هي ( ٢٠ )°.

الحل بيانياً:

مقياس رسم القوى: ( Force Scale: 1 cm = 50 N )

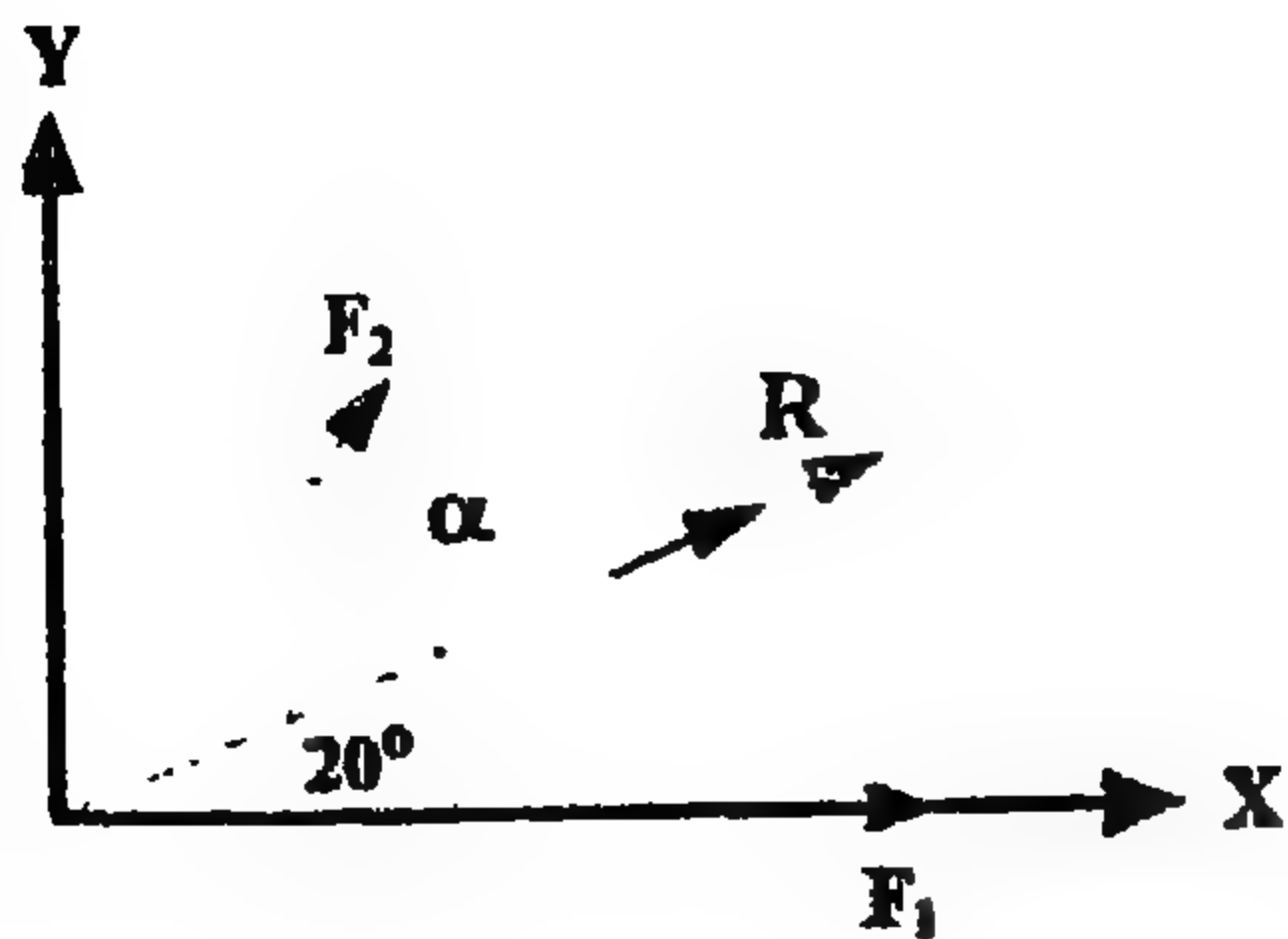


من الرسم أقل قيمة  $F_2$  عندما تكون  $F_2$  عمودياً على  $F_1$ .

$$F_1 = 5.6 * 50 = 280 \text{ N}$$

$$F_2 = 2 * 50 = 100 \text{ N}$$

## الحل: تحليلياً



نختار محورين متعامدين  $x$  و  $y$

نفرض أن الزاوية بين  $F_1$  و  $F_2$  هي  $\alpha$ .

في أي اتجاه فإن:

$$R_x = \sum F_x$$

$$300 \cos 20 = F_1 + F_2 \cos \alpha$$

$$R_y = \sum F_y$$

$$300 \sin 20 = F_2 \sin \alpha$$

$$F_2 = \frac{300 \sin 20}{\sin \alpha}$$

$F_2$  تكون أقل قيمة لها عندما يكون المقام أكبر ما يمكن و ذلك عندما  $\sin \alpha = 1$ .

$$F_{2_{min}} = 300 \sin 20 = 102.6 \text{ N}$$

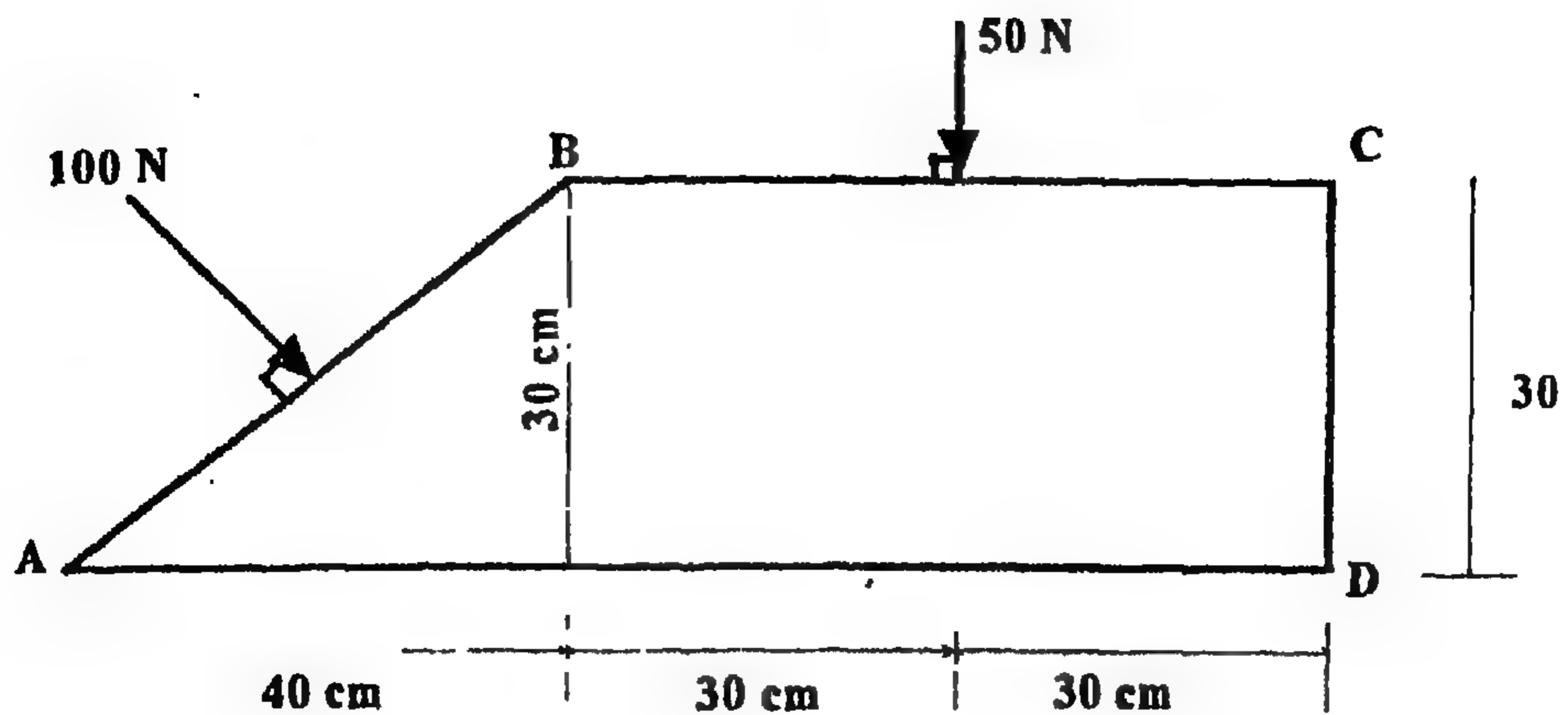
$$\therefore \sin \alpha = 1 \quad \therefore \alpha = 90$$

$$\therefore F_1 = 300 \cos 20 = 281.9 \text{ N}$$

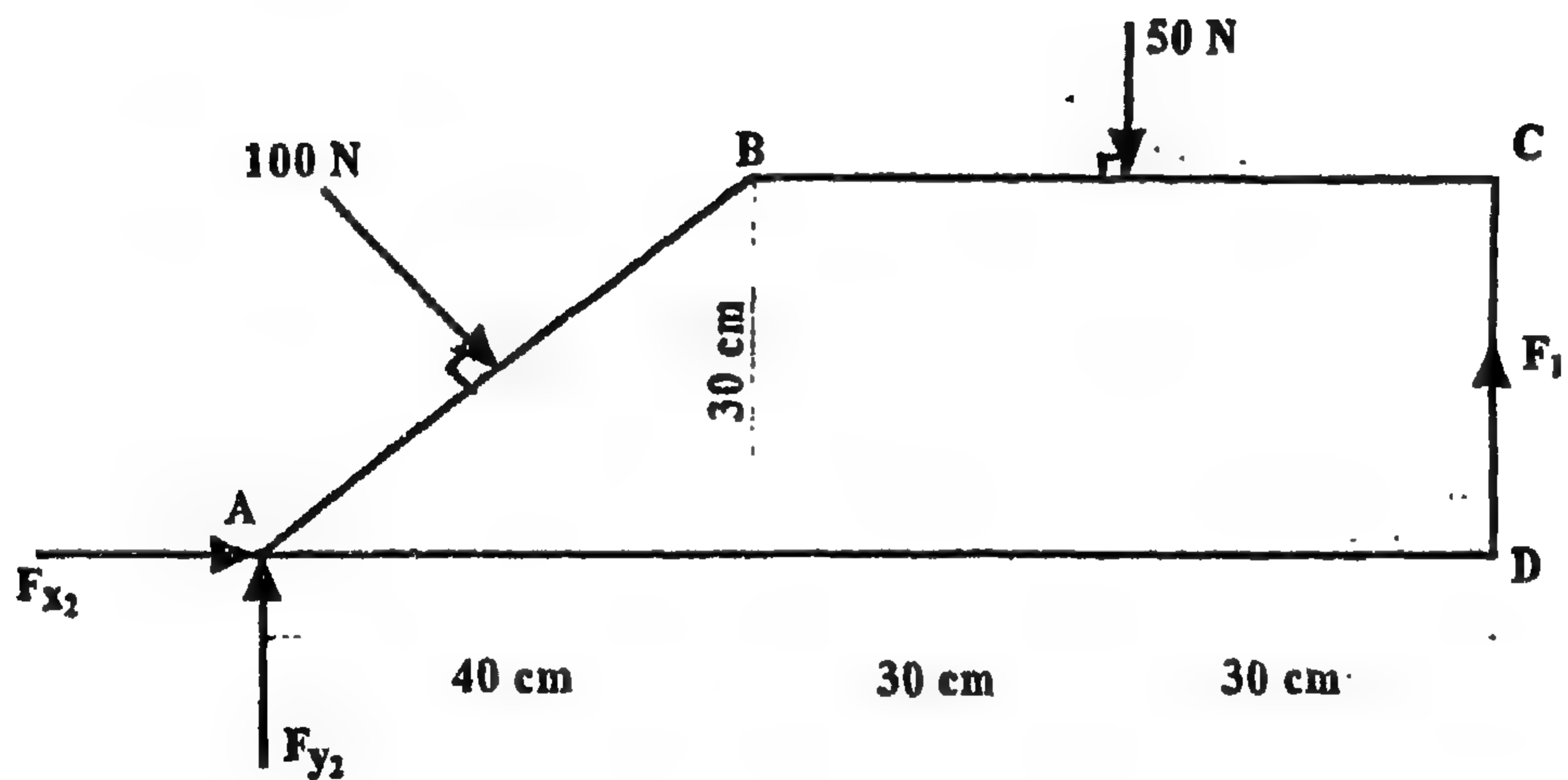
## مثال ١٢:

استبدل القوى المبينة في الشكل الى قوتين  $F_1$  و  $F_2$  بحيث  $F_1$  ينطبق على  $\overline{CD}$ ،  $F_2$  يمر بالنقطة A حل بيانياً و تحليلياً.





الحل :



الحل تحليلياً:

القوى  $F_2$  مجهولة المقدار و الاتجاه ،  $\therefore$  نفرض لها المركبتين  $F_{x_2}$  و  $F_{y_2}$  و بتطبيق المعادله التاليه  
مع فرض اتجاه  $F_1$  لأعلى:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= F_1(100) \\ &= -100(25) - 50(70) \\ \therefore F_1 &= -60 \text{ N}\end{aligned}$$

( إشارة سالب تعني عكس اتجاه المفروض ) أي لأسفل.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{x_2} \\ &= 100\left(\frac{30}{50}\right) = 60 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= F_{y_2} + F_1 \\ &= -100\left(\frac{40}{50}\right) - 50\end{aligned}$$

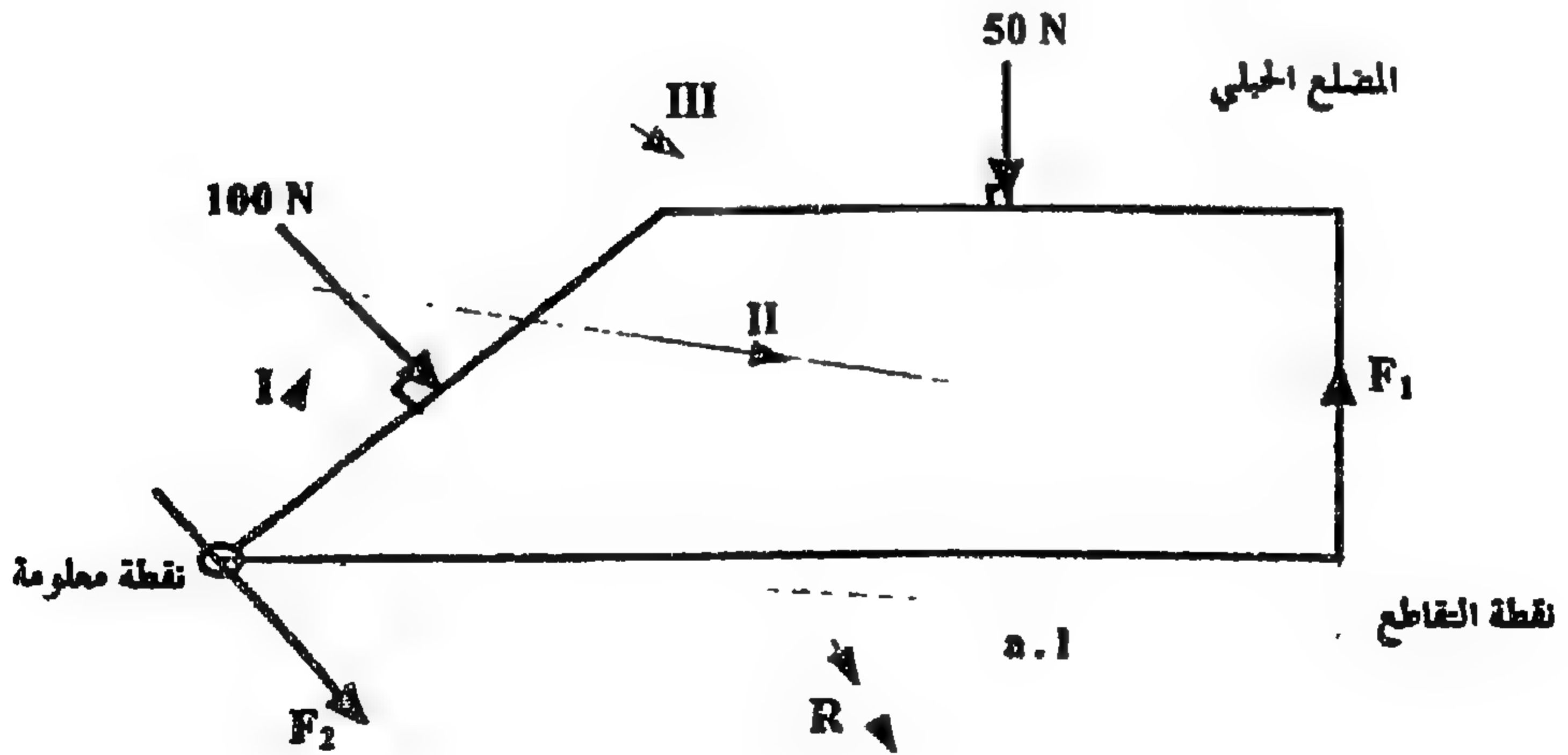
$$F_{y_2} = -(-60) - 130 = -70 \text{ N}$$

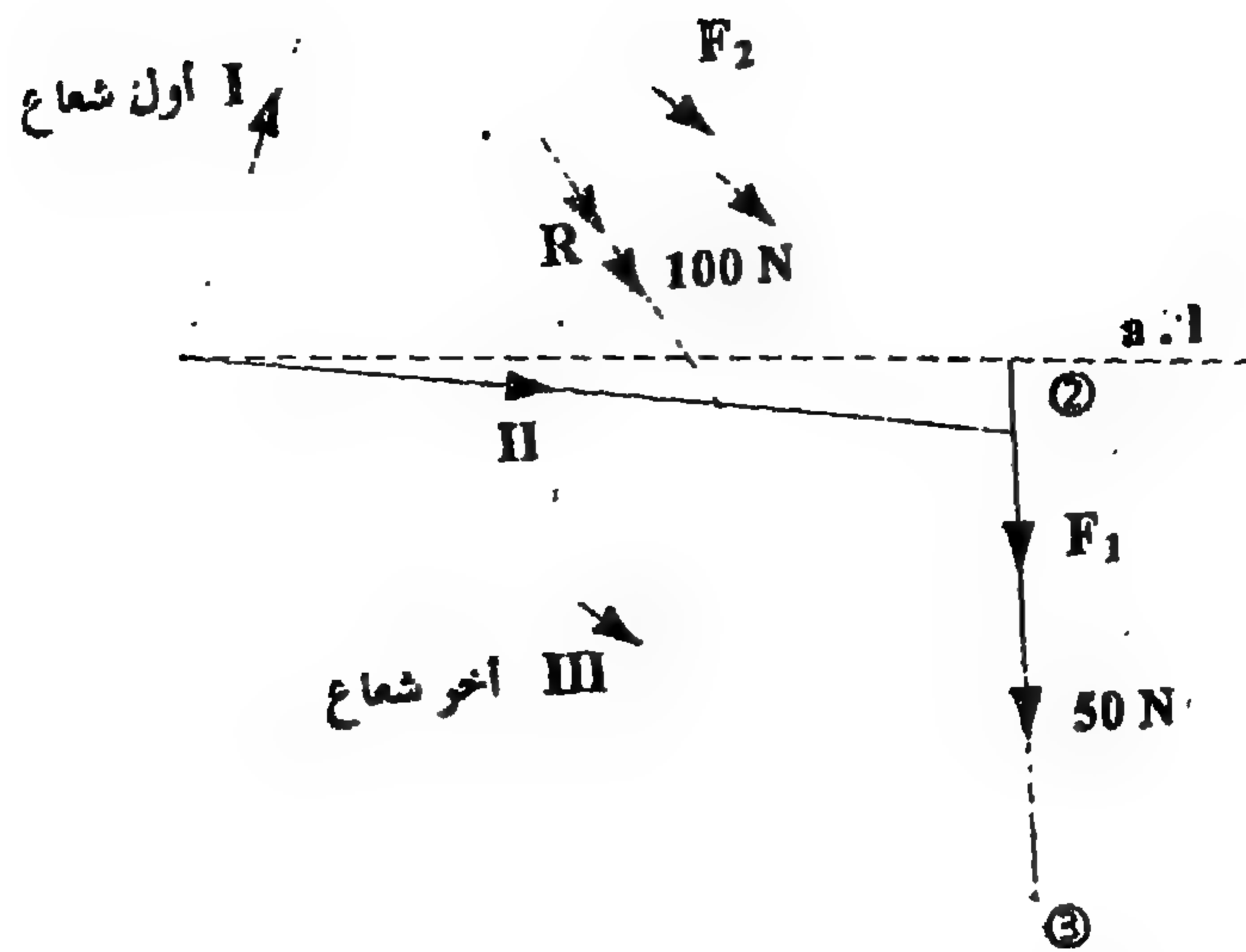
أي أن اتجاه  $F_{y_2}$  عكس الاتجاه المفروض على الرسم.

الحل بيانياً: " معلوم خط عمل و نقطة ∴ الحل بطريقة الخط القافل "

1 cm = 20 N (مقياس رسم القوى) :

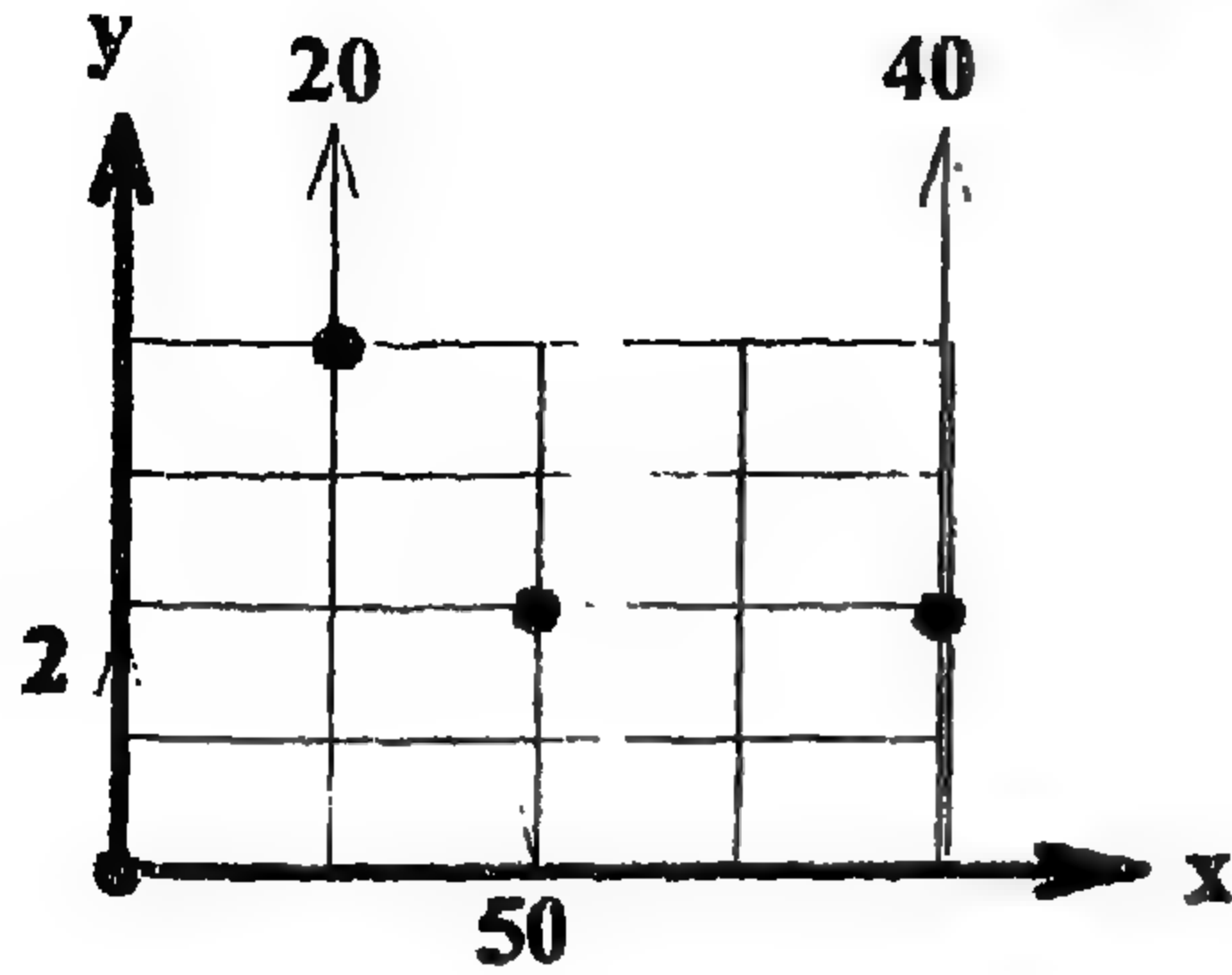
1 cm = 10 N (مقياس رسم المسافات) :





$$F_2 = 3.2 \times 20 = 70\text{ N}$$

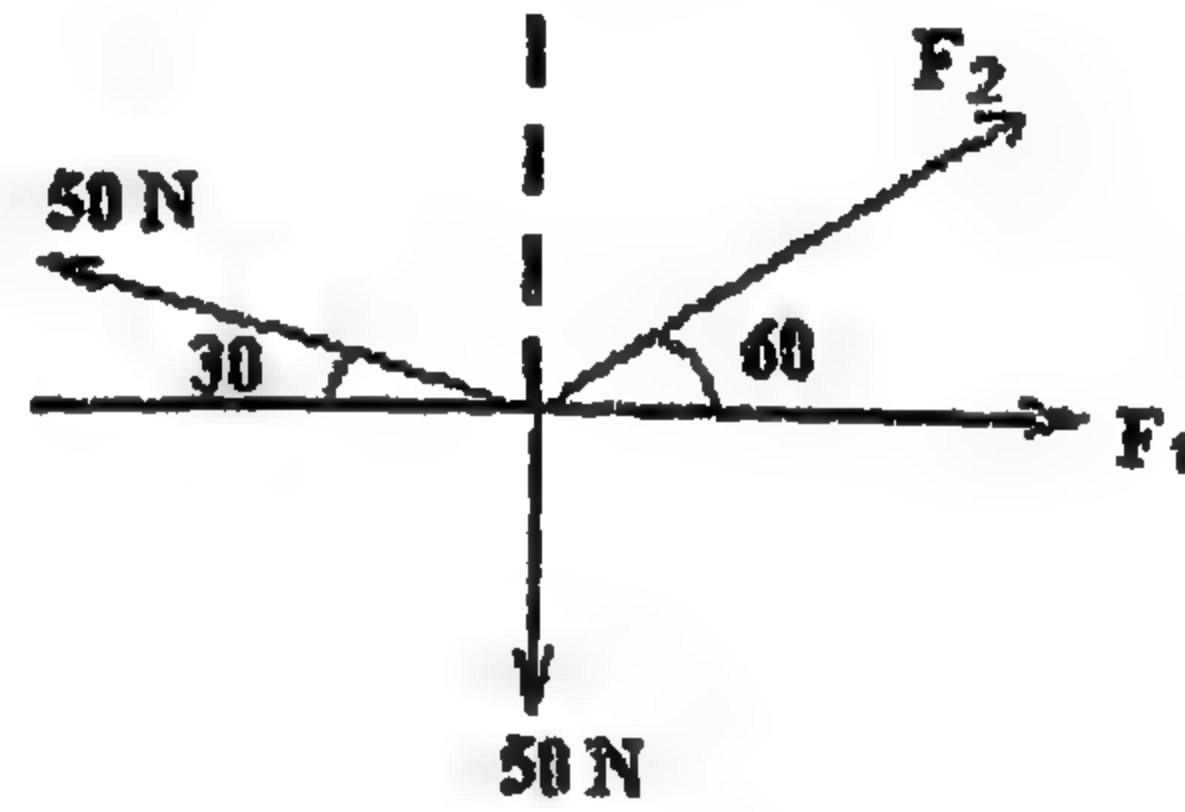
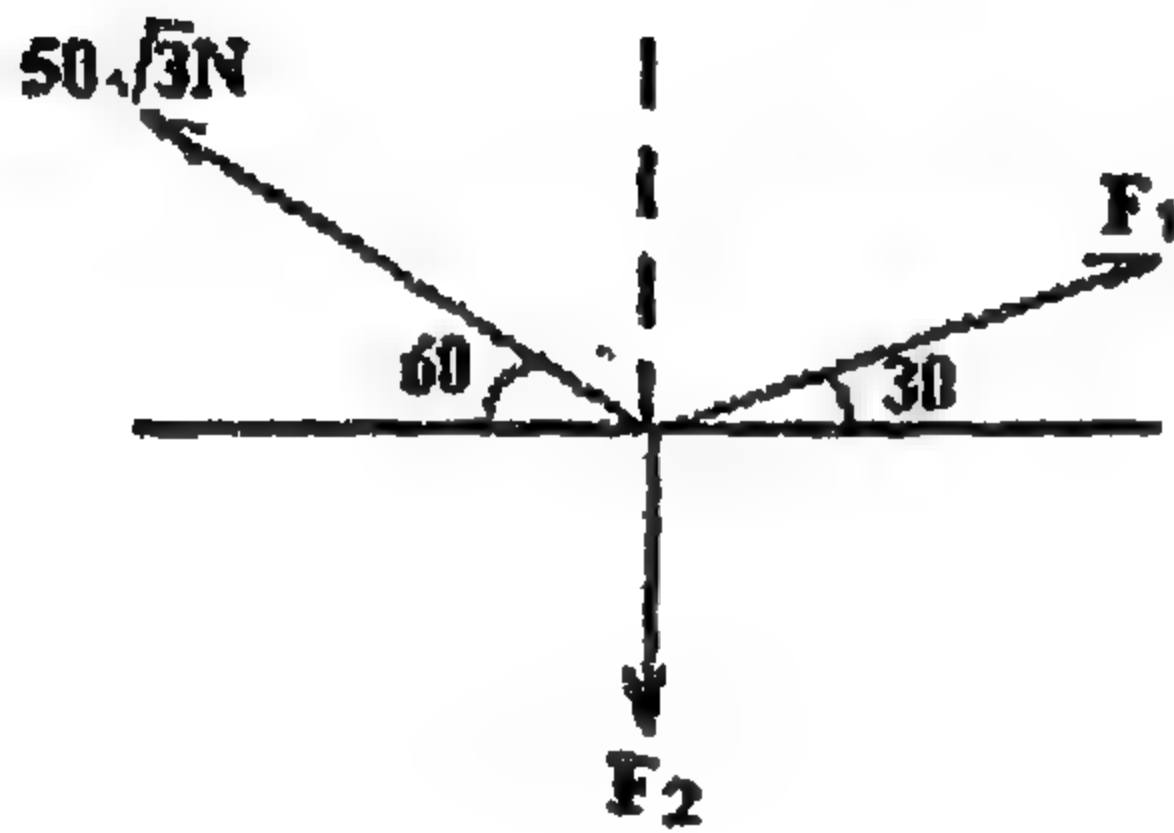
## تمارين



١ - عين محصلة القوى الأربع المبينة في الشكل تحليلياً وبيانياً ، القوى بالكيلوجرام وطول ضلع كل من مربعات الشكل متر واحد.

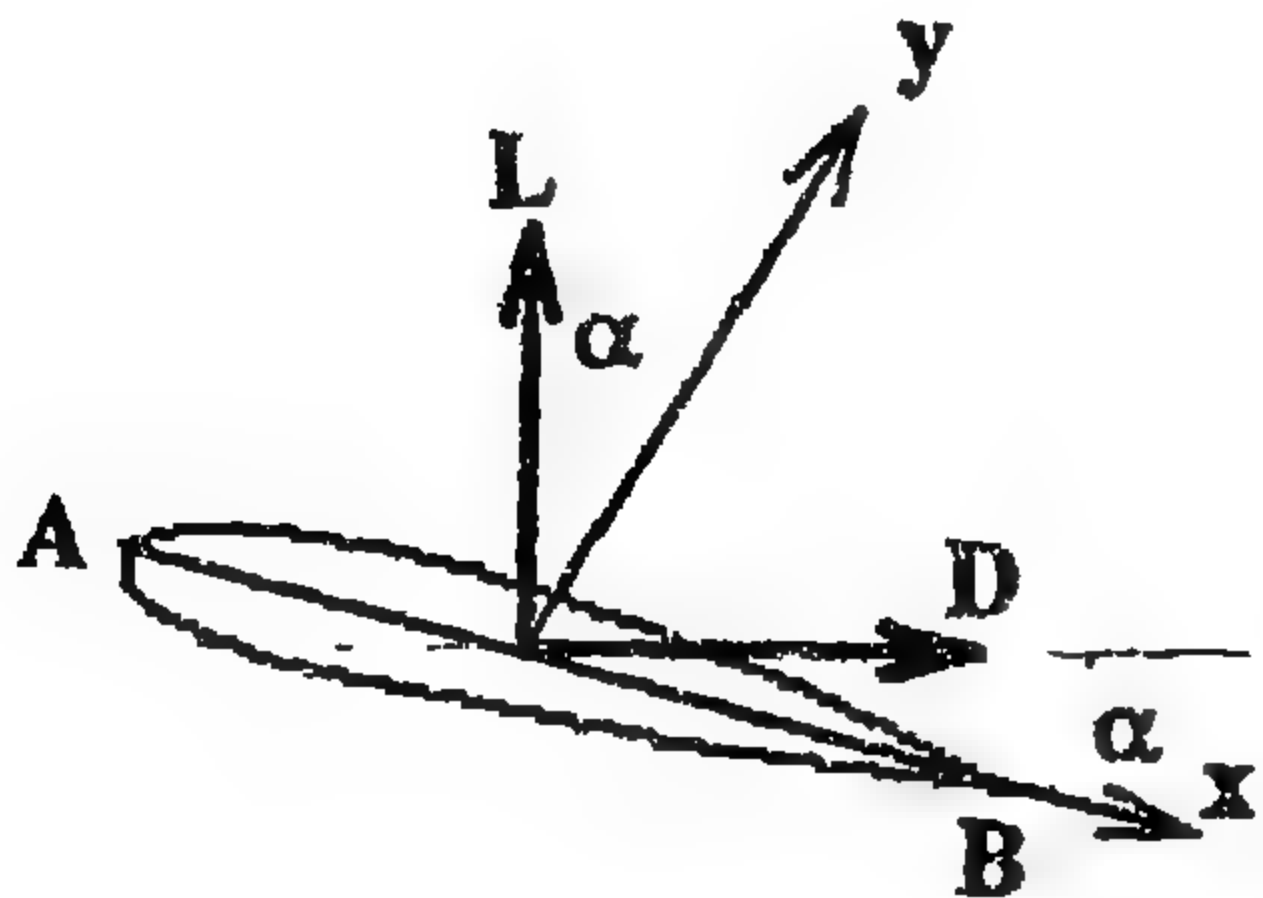
الجواب: . (  $R = +35Kg$  ,  $x = 2.29m$  )

٢ - أوجد مقدار كل من القوتين  $F_1$  ,  $F_2$  ، إذا كانت مجموعة القوى المبينة متزنة حل بيانياً وحقق النتائج تحليلياً.



$$F_1 = 50 \text{ N} , F_2 = 100 \text{ N}$$

$$\text{الجواب: } F_1 = \frac{50}{\sqrt{3}} \text{ N} , F_2 = \frac{50}{\sqrt{3}} \text{ N}$$

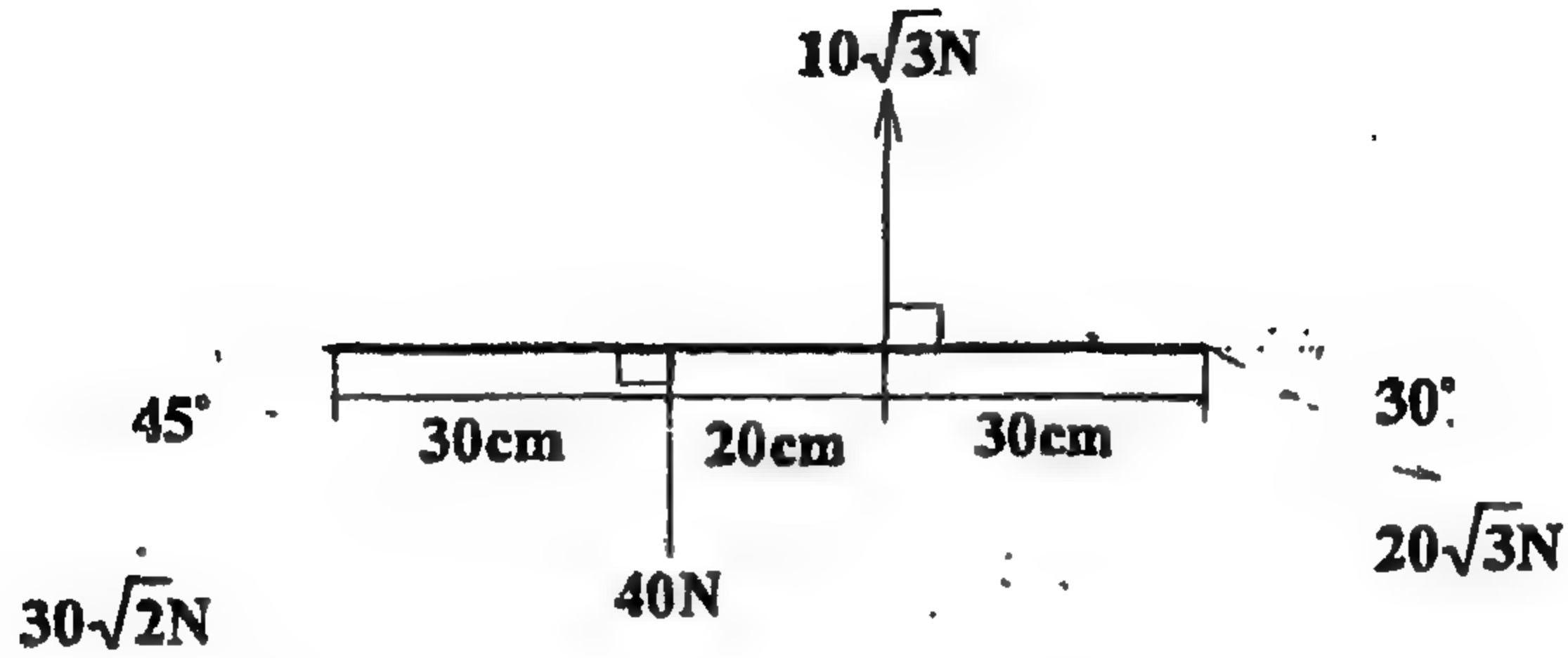


٣ - الوتر AB لجناح طائرته تسير في إتجاه أفقي بميل بزاوية  $\alpha$  مقدارها  $5^\circ$  على الأفقي كما في الشكل و محصلة ضغط الهواء على الجناح في هذه الأحوال تحدد بمركبتي الرفع L والسحب D حيث L تساوي ١٥٠٠ نيوتن ، D تساوي ٢٠٠ نيوتن ،

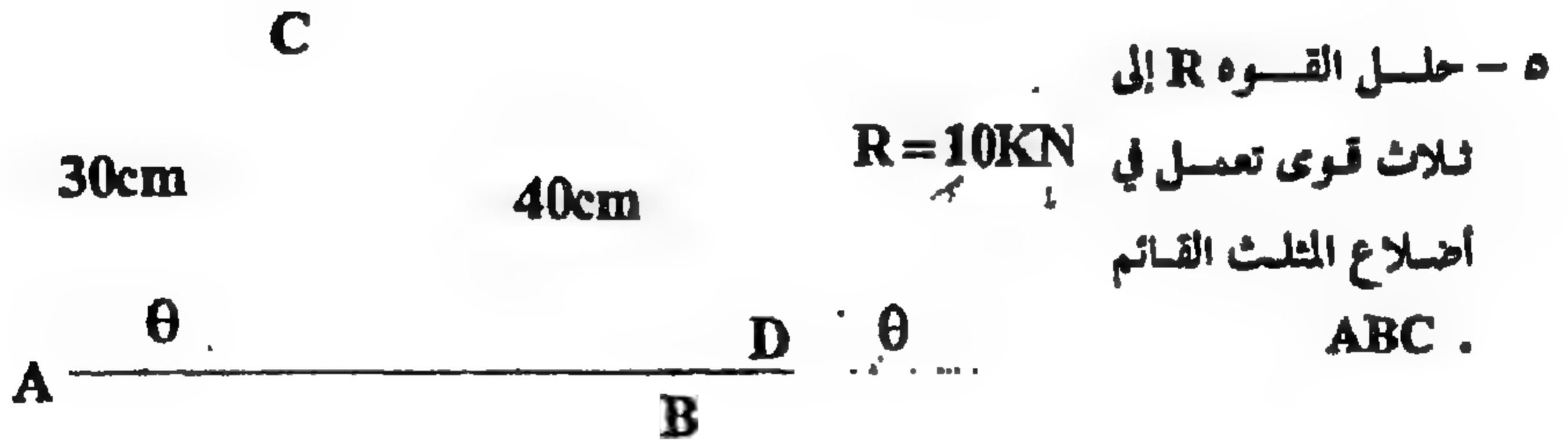
والأولى رأسية والثانية أفقية كما هو مبين بالشكل. حلل ضغط الهواء إلى مركبتين متعامدتين  $x$  ,  $y$  الأولى تنطبق على الوتر  $AB$  والثانية عمودية عليه.

الجواب: (  $X = 68.5N$  ,  $Y = 1511.7N$  )

٤ - أوجد مقدار واتجاه وخط عمل محصلة هذه المجموعه من القوى وذلك بالطريقتين البيانيه والتحليليه.



الجواب: (  $R = 70N$  ,  $L = 24.5cm$  ,  $\theta = 90^\circ$  )

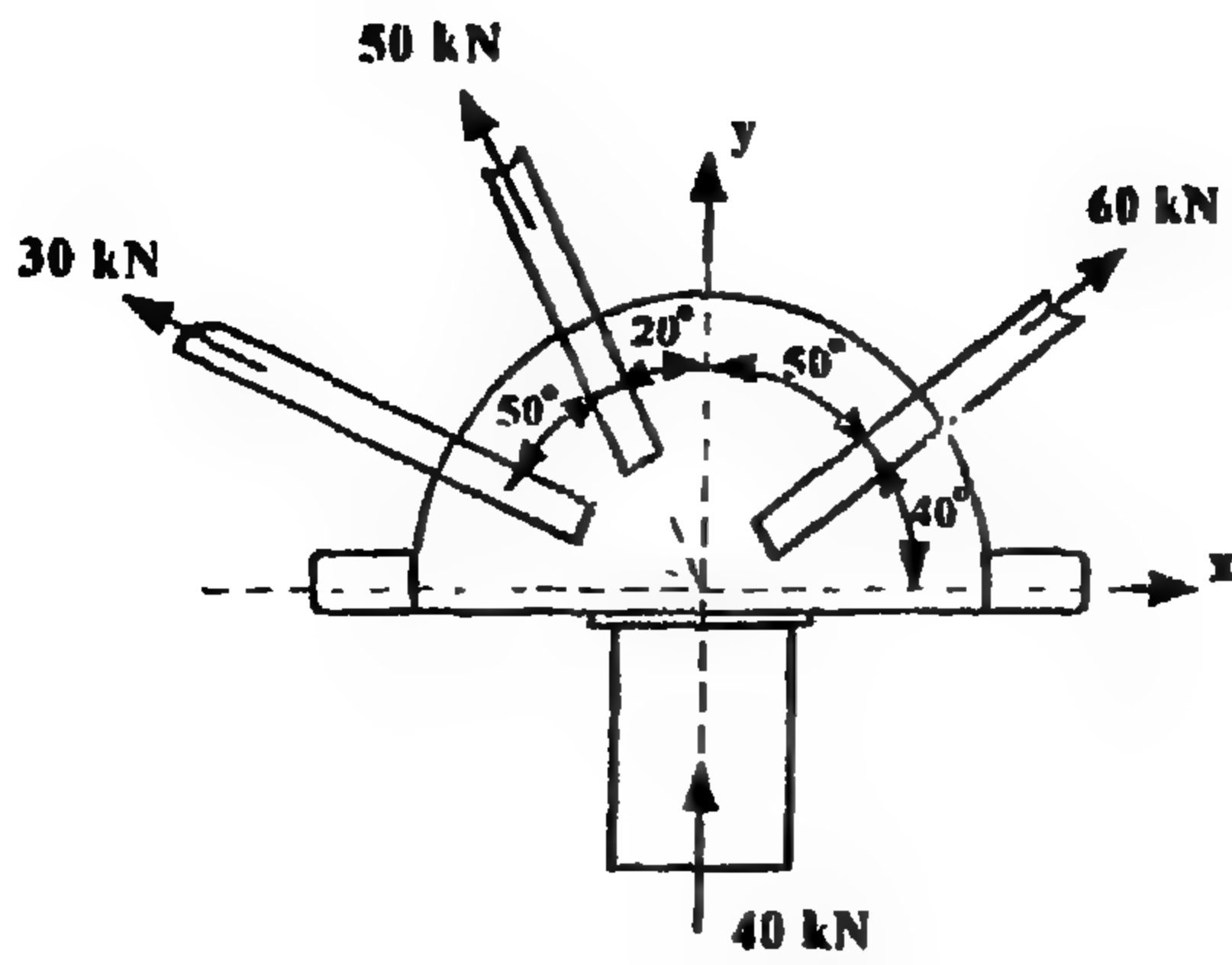


٥ - حلل القوة  $R$  إلى

ثلاث قوى تعمل في

أضلاع المثلث القائم

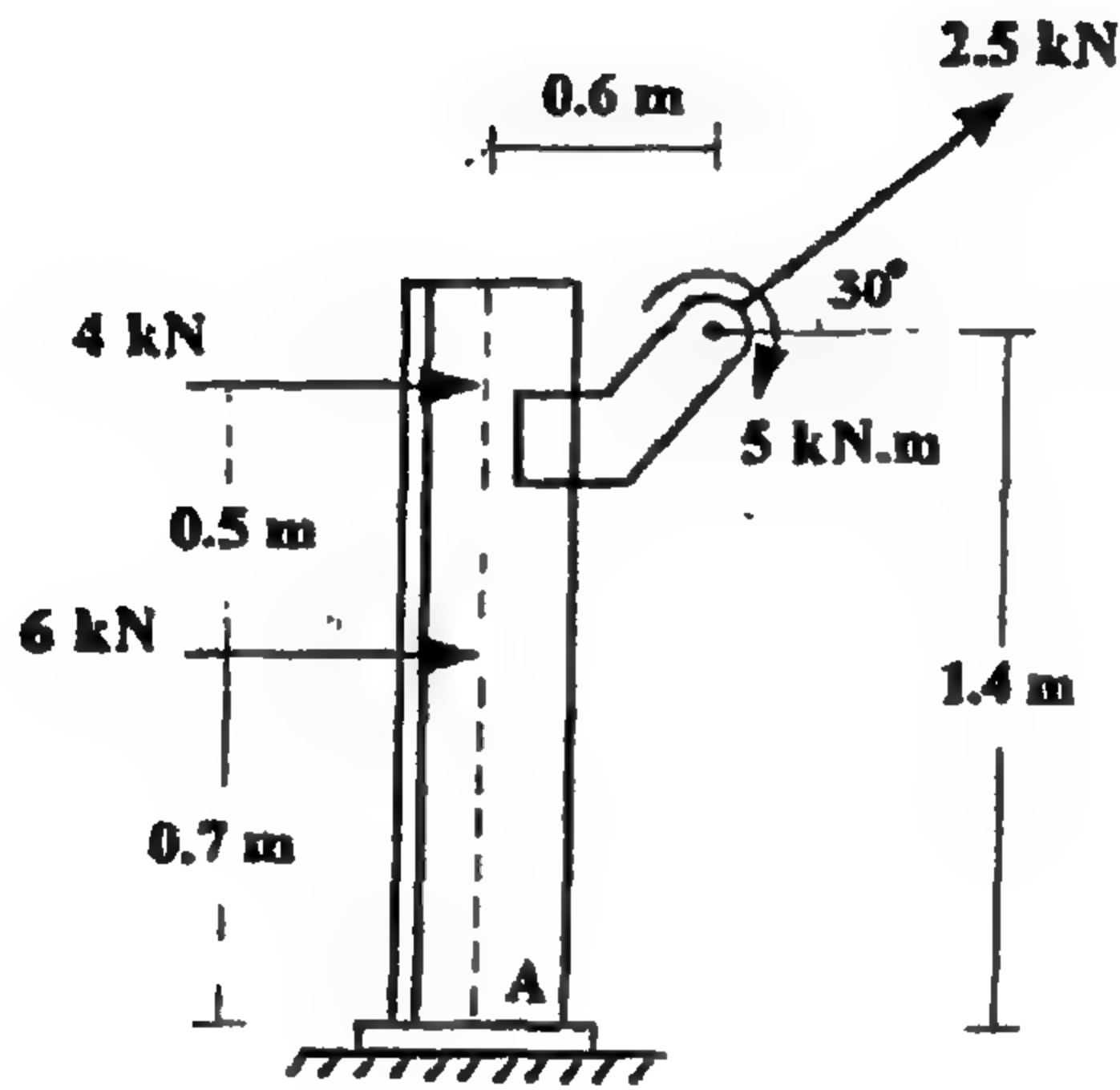
$ABC$ .



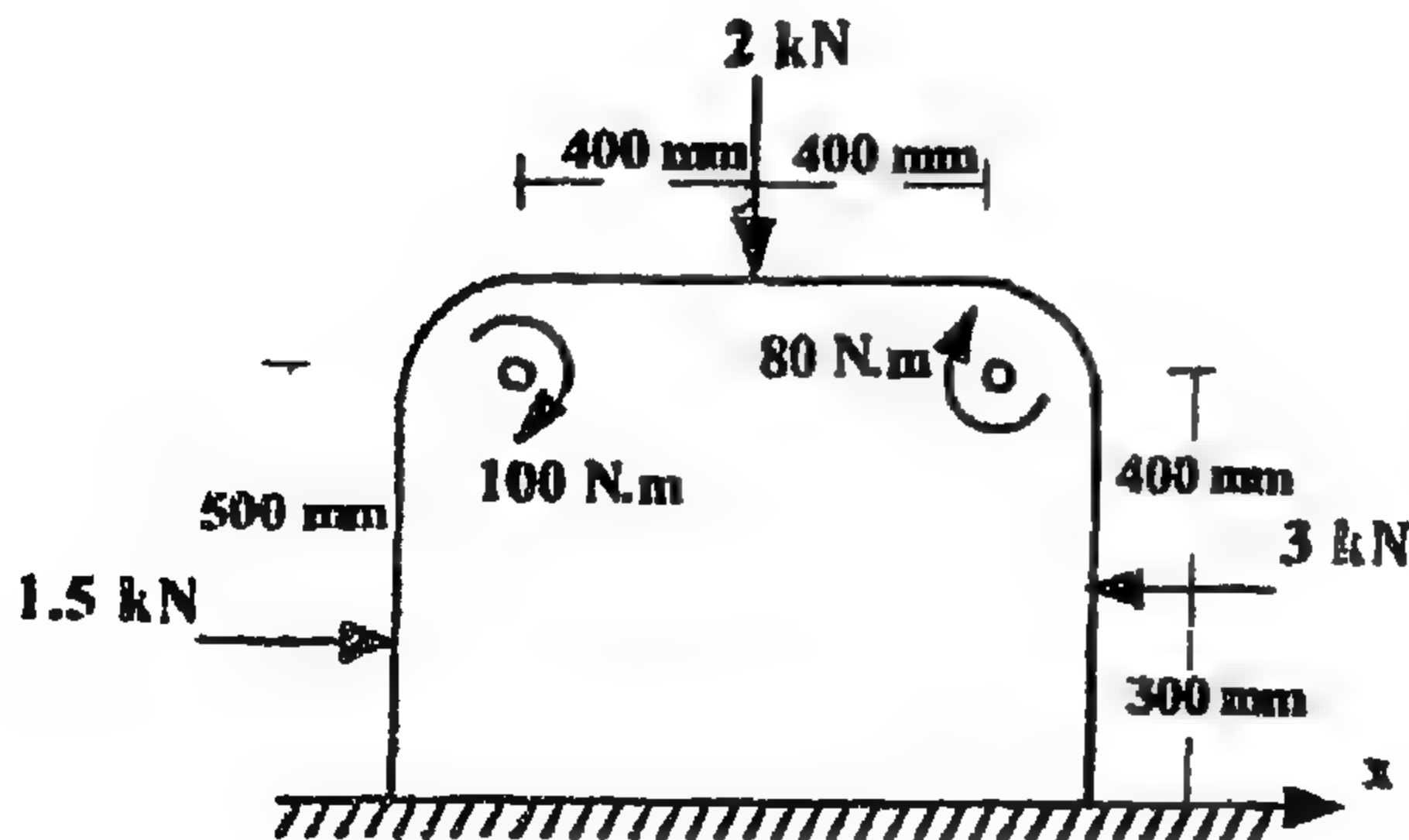
٦ - أوجد المحصلة للقوى الأربع المؤثرة على لوح التقوية كذلك أوجد قيمة الزاوية  $\theta_x$  المحصورة بين المحصلة والمحور x

(الجواب:  $R = 54.5 \text{ kN}$ )

(  $\theta = 50.2^\circ$  )



٧ - استبدل القوى الثلاث وعزم الازدواج بقوة مكافئة R تمر بـ A وعزم ازدواج M

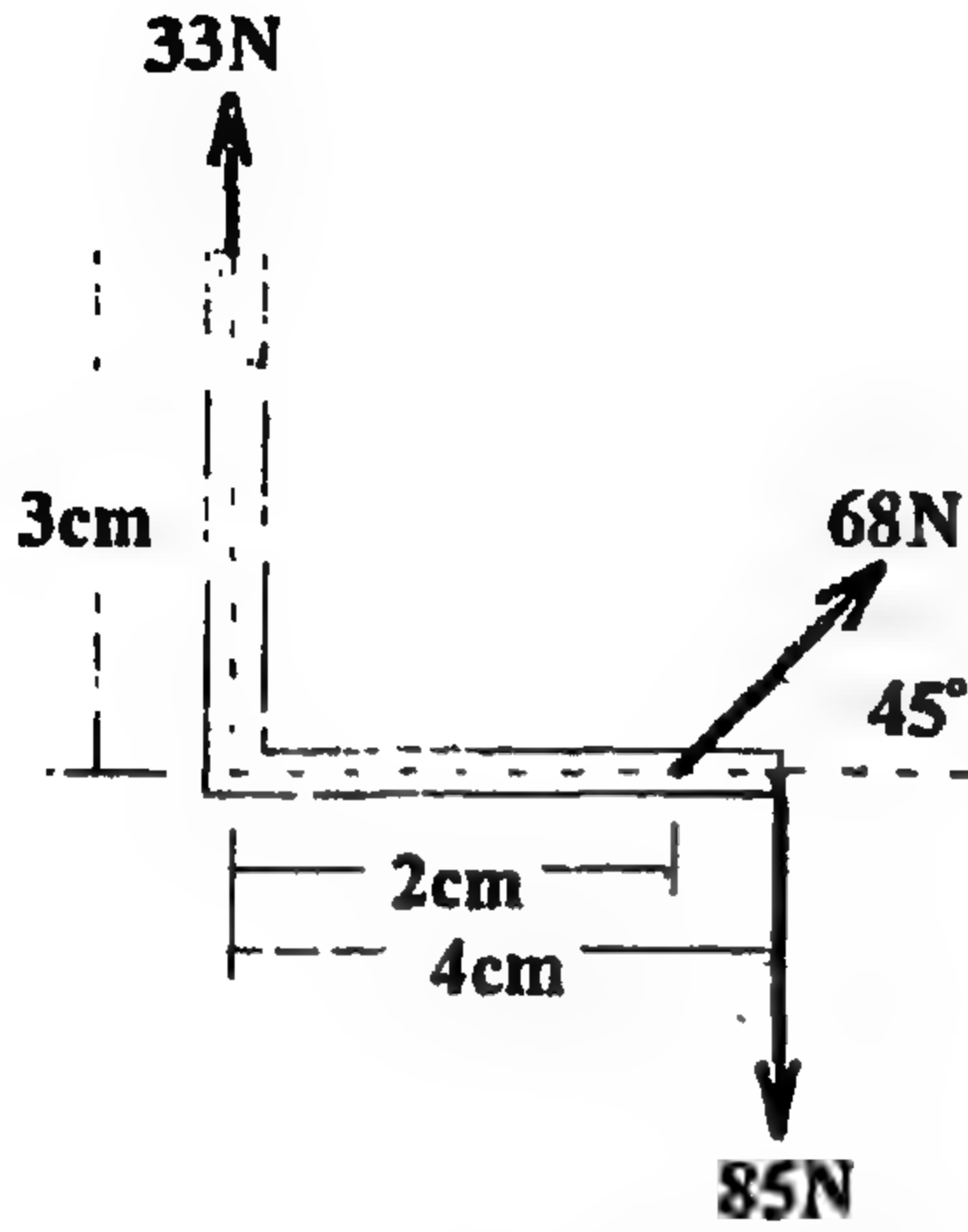


٨ - أوجد المحصلة R للقوى الثلاثة ولعزمي الازدواج كما هو موضح في الشكل أوجد الأحداثي x لنقطة المحصلة والمحور x.

-x



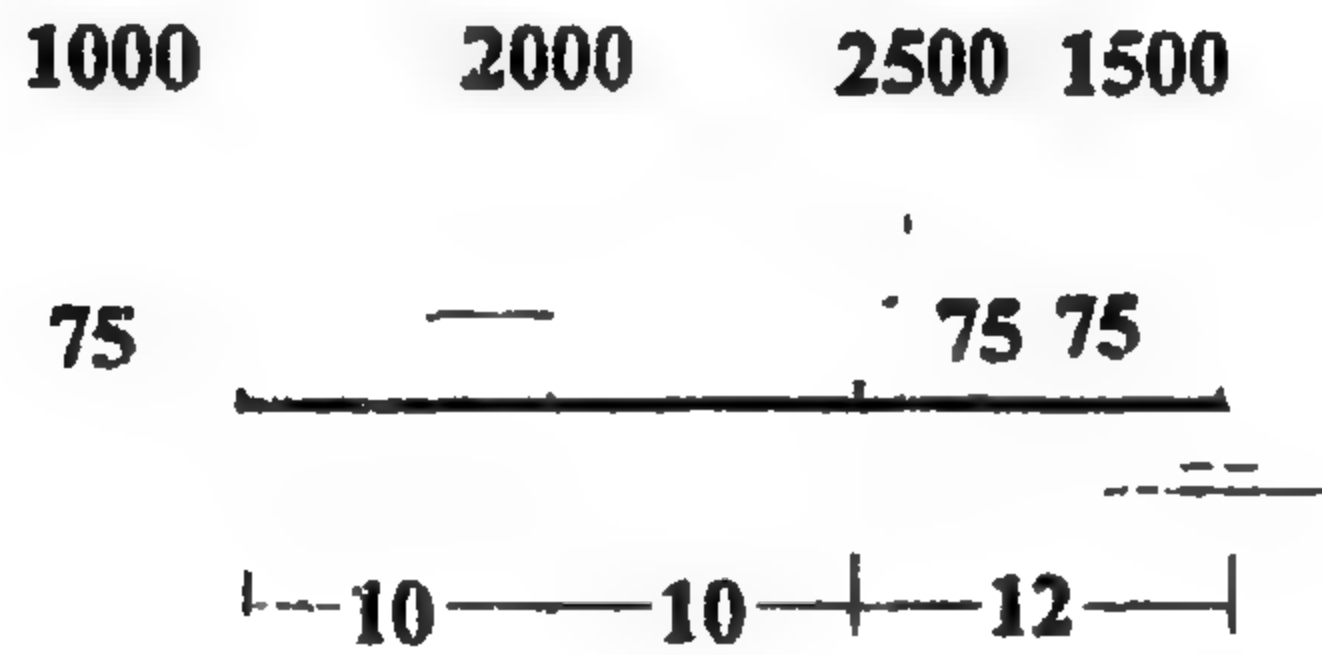
(الجواب:  $R = -1.5 i - 2 j \text{ KN}$  ,  $x = 290 \text{ mm}$ )



٩ - إختزل مجموعة القوى والازدواج المبينه في الشكل في رأسي الزاويه ، القوى بالنيوتن والأبعاد بالسنتيمتر.

(الجواب:  $R_x = 48.1 \text{ N}$  ,  $R_y = -3.9 \text{ N}$  ,  $M_A = 36.2 \text{ N}\cdot\text{cm}$ )

١٠ - عين بالطريقه البيانیه محصله القوى الأربع المؤثره على العتب البسيط AB - القوى بالنيوتن والأبعاد بالسنتيمتر.



(الجواب:  $R = 6830$ ) رأسيًا لأسفل ،  $(x = 16.8)$  من المفصل A

# إتزان الجسم والتماسك

## أولاً : إتزان الجسم:

يعتبر الجسم متزن عندما يؤثر فيه مجموعة من القوى المتوازنة أي تتلاشى محصلتها. ونتيجة لأن الجسم هو نقطة فإن القوى المؤثرة عليه متلاقية فينطبق عليها شروط إتزان القوى المتقية. والشروط البياني هو أن يكون مضلع القوى مغلقاً، أما الشروط التحليلية للإتزان فهما شرطان.

$$R_x = \sum x = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$R_y = \sum y = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

والحالة الخاصة منها هي حالة ثلاث قوى يمكن استخدام قاعدة "لامي" المعروفة كبديل للمعادلتين (1) ، (2) وهي مرادفة لقانون الجيوب.



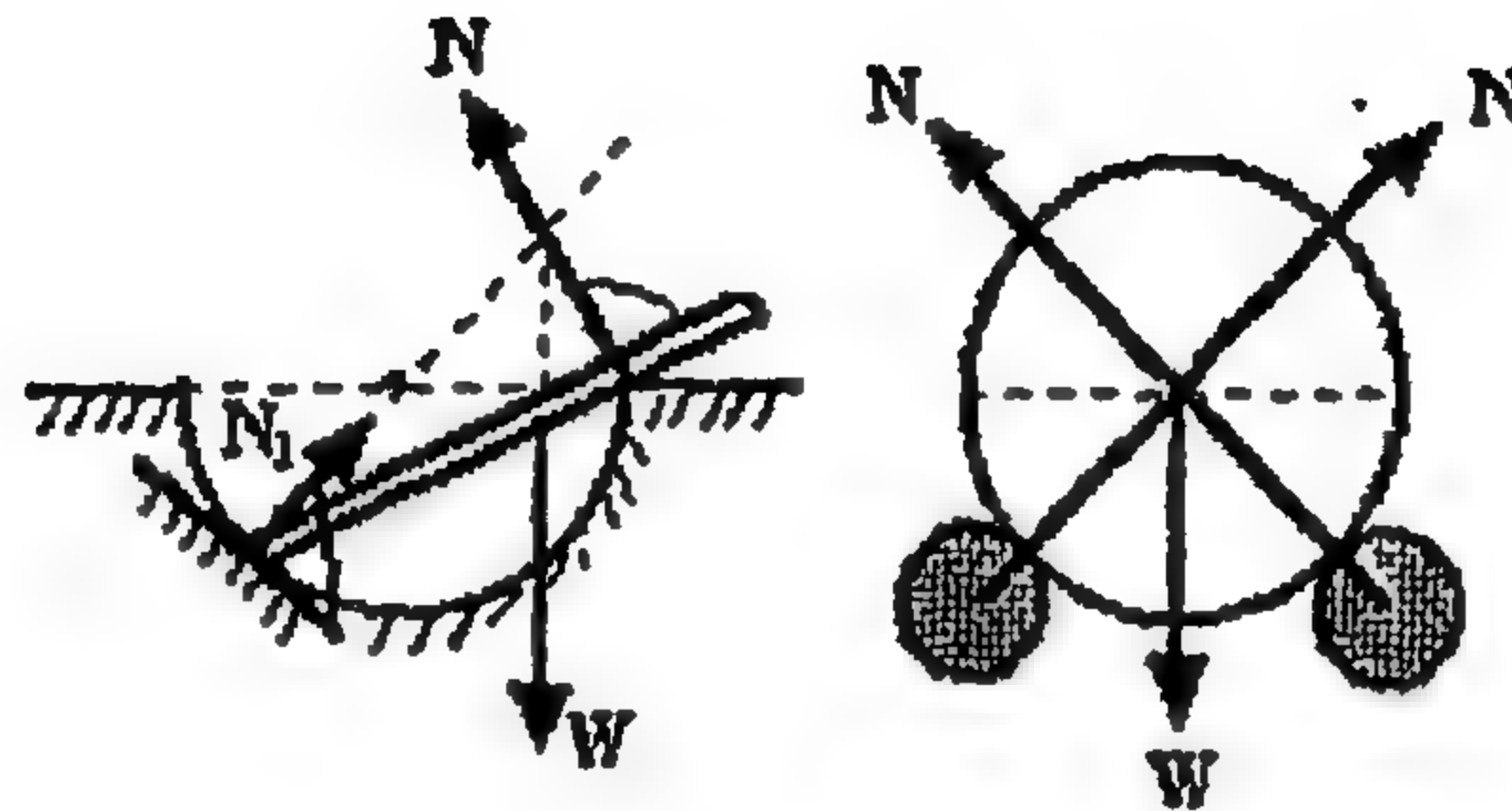
شكل (١-٤)

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}$$

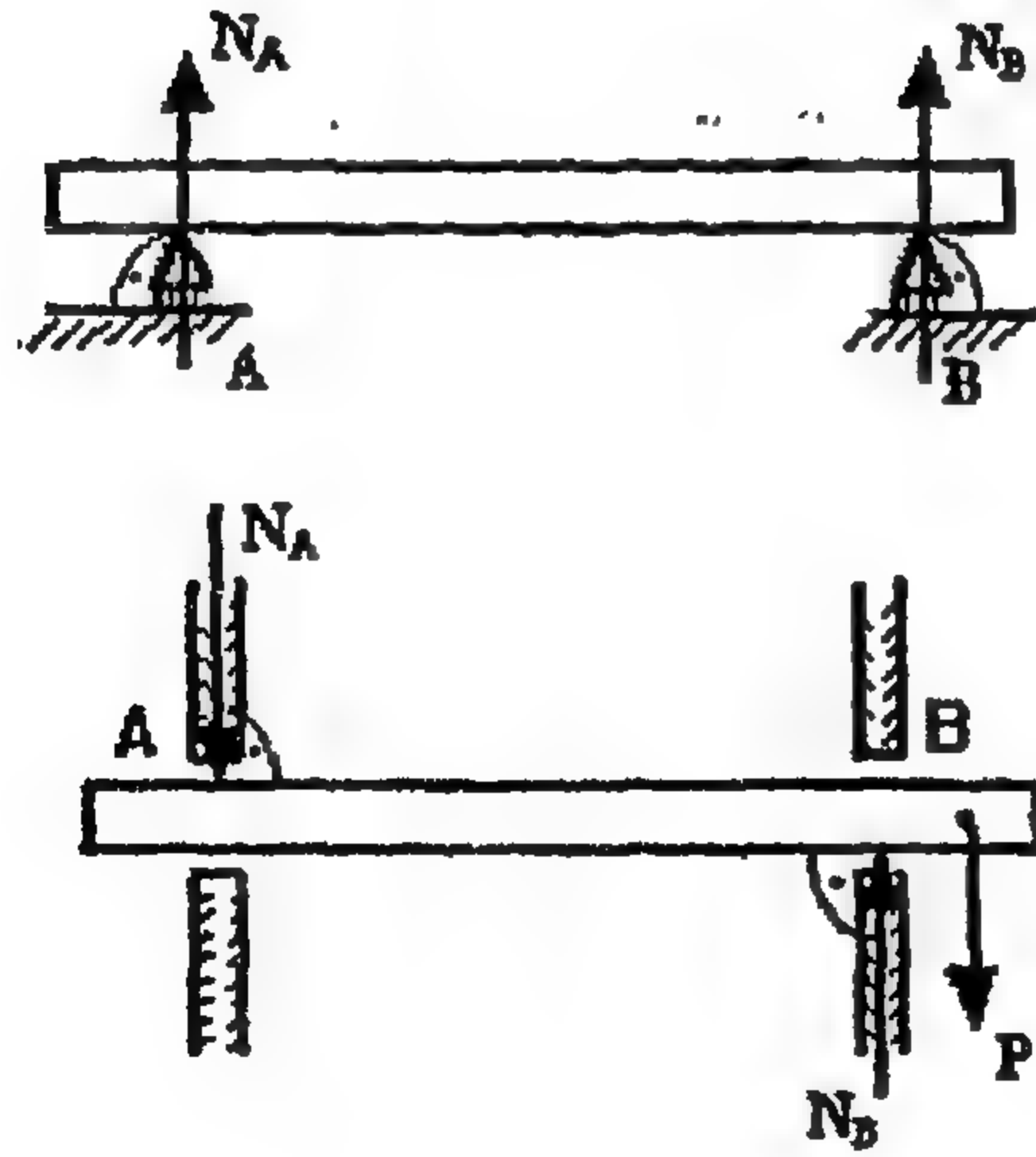
## ثانياً : إتران الجسم المتماسك:

لدراسة إتران الجسم المتماسك يستكمل أولاً شكل القوى المؤثرة عليه وهنا يجب التمييز بين القوى العاملة ( Acting Force ) والقوى المعروفة برود الفعل ( Reaction ) في المرتكزات. ووزن الجسم يعتبر من القوى العاملة أما ردود الفعل فتوقف على نوع الإرتكاز.

### ١ - الإرتكاز البسيط:



وهو أبسط أنواع الإرتكاز كحالة تماس الأجسام المتساوية ورد الفعل عمودي على المستوى التماس للسطحين المتلامسين أو عمودي على اتجاه أية حركة نسبية بينهما كما في الأمثلة المبينة بشكل (٤-٢)، تستخدم البكرات كمركبات للكبالي وهي كالتماس



الأمس نظراً لصغر مقاومات التدحرج لهذه البكرات ورد الفعل عمودي على المستوى التي تتدحرج عليه هذه البكرات. ونظراً لأن اتجاه رد الفعل في المركب البسيط محدد فهو يعتبر مجهولاً واحداً في معادلات الإتران.

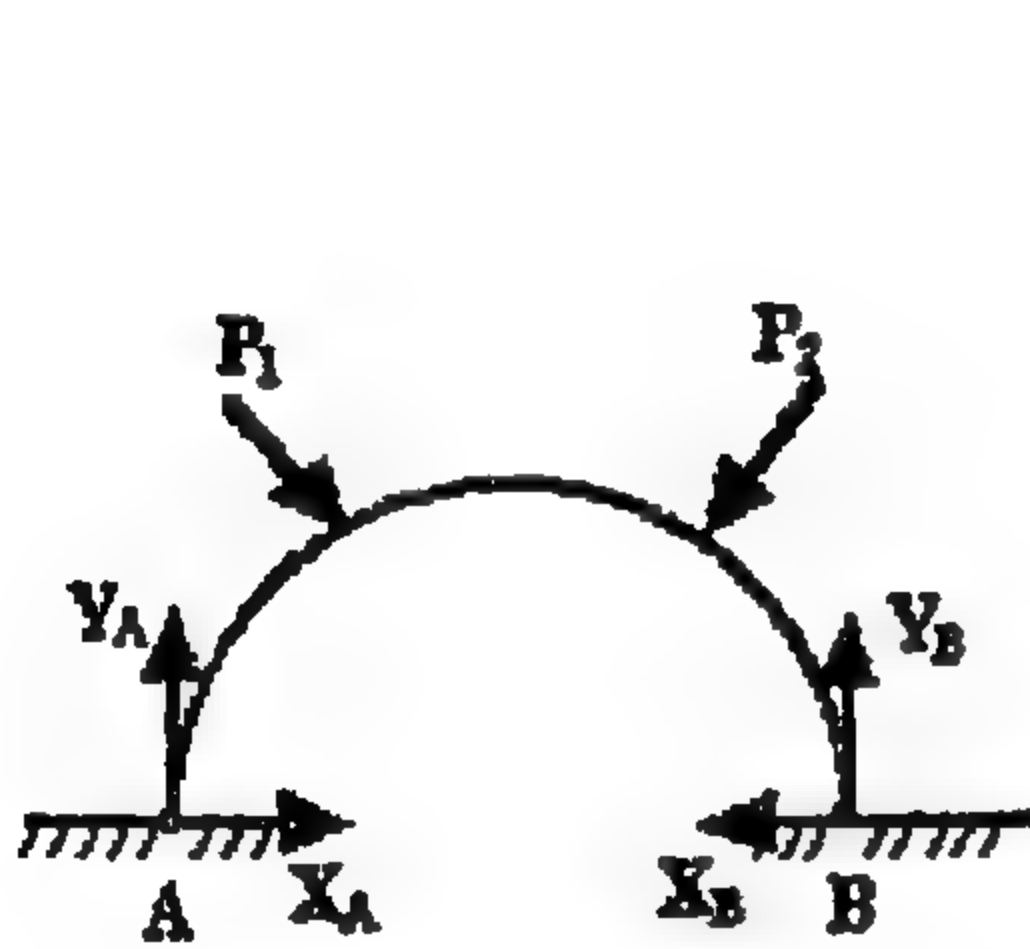
شكل (٤-٢)

## ٢ - الارتكاز المفصلي:

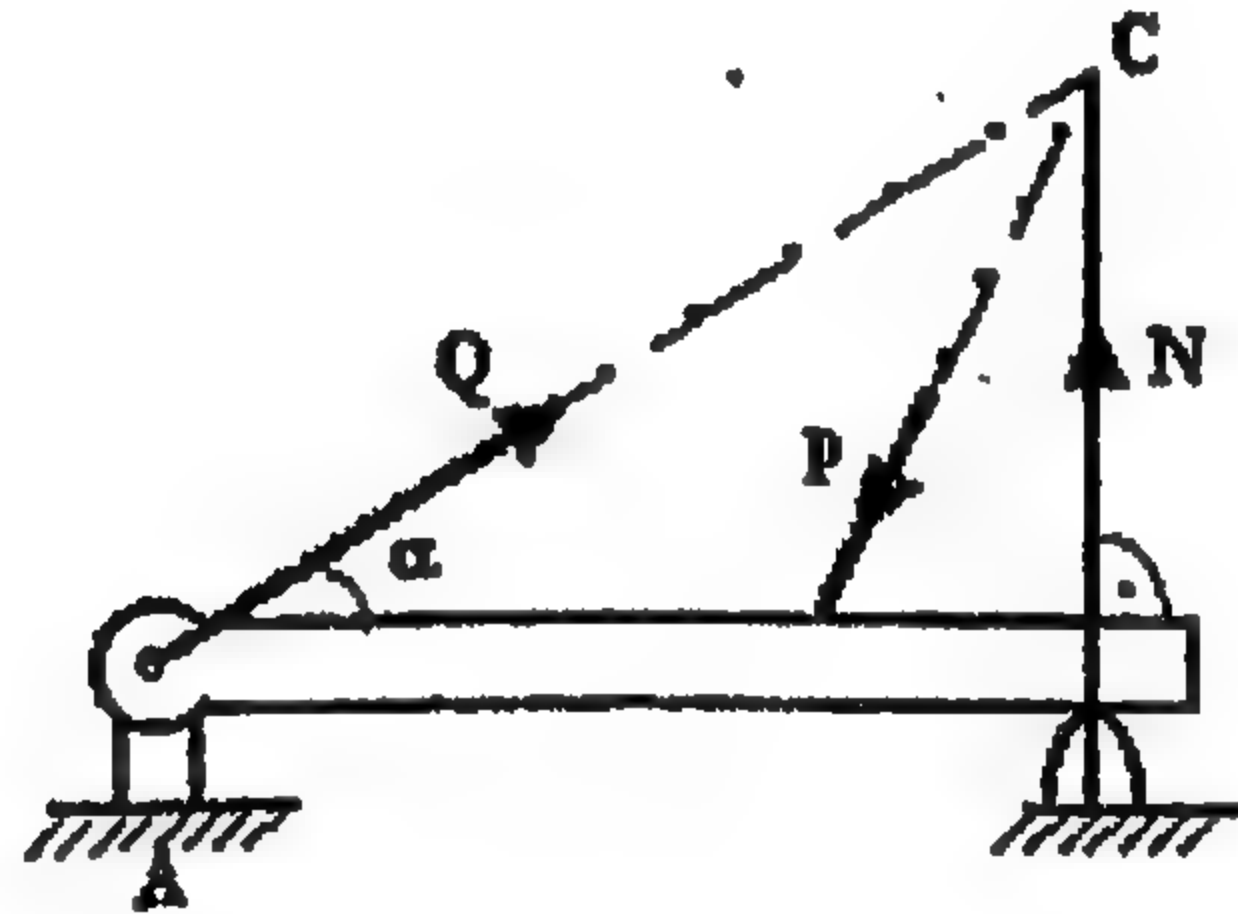
الارتكاز المفصلي عبارة عن تثبيت نقطة من جسم بحيث يمكن أن يدور حولها. والمفصل في المستوى عبارة عن ثقب دائري بداخله مسمار أسطواني كما في شكل (٣-٤) ولما كان التلامس بين المسمار وحافة الثقب الدائري يمكن أن يتم في أي نقطة على محيط الدائرة فإن رد الفعل يمكن أن يتخذ أي اتجاه حسب ما تتطلبه ظروف التحميل والارتكاز.

وفي شكل (٣-٤) إذا غيرنا موضع  $P$  أو اتجاهها يتغير مقدار واتجاه رد الفعل  $Q$  في المفصل  $A$  بحيث يتم الإثتان بتلاقي القوى الثلاث  $P$ ،  $N$ ،  $Q$  في نقطة واحدة. وعلى ذلك ينطوي رد فعل المفصل على مجهولين هما مقداره وميله أو مركبتيه المتعامدتين  $Q_x$ ،  $Q_y$ .

ويلاحظ أن حمل جسم على مرتكز بسيط من ناحية ومرتكز مفصلي من ناحية أخرى ينطوي على ٣ قيم مجهولة لرد فعل المرتكزين (إثنان في المفصل وواحد في المرتكز البسيط) مما يجعل إثتان الجسم محددًا إستاتيكيًا لأن معادلات الإثتان الثلاث تكفي لتحديد المجاهيل الثلاثة كما في شكل (٣-٤).

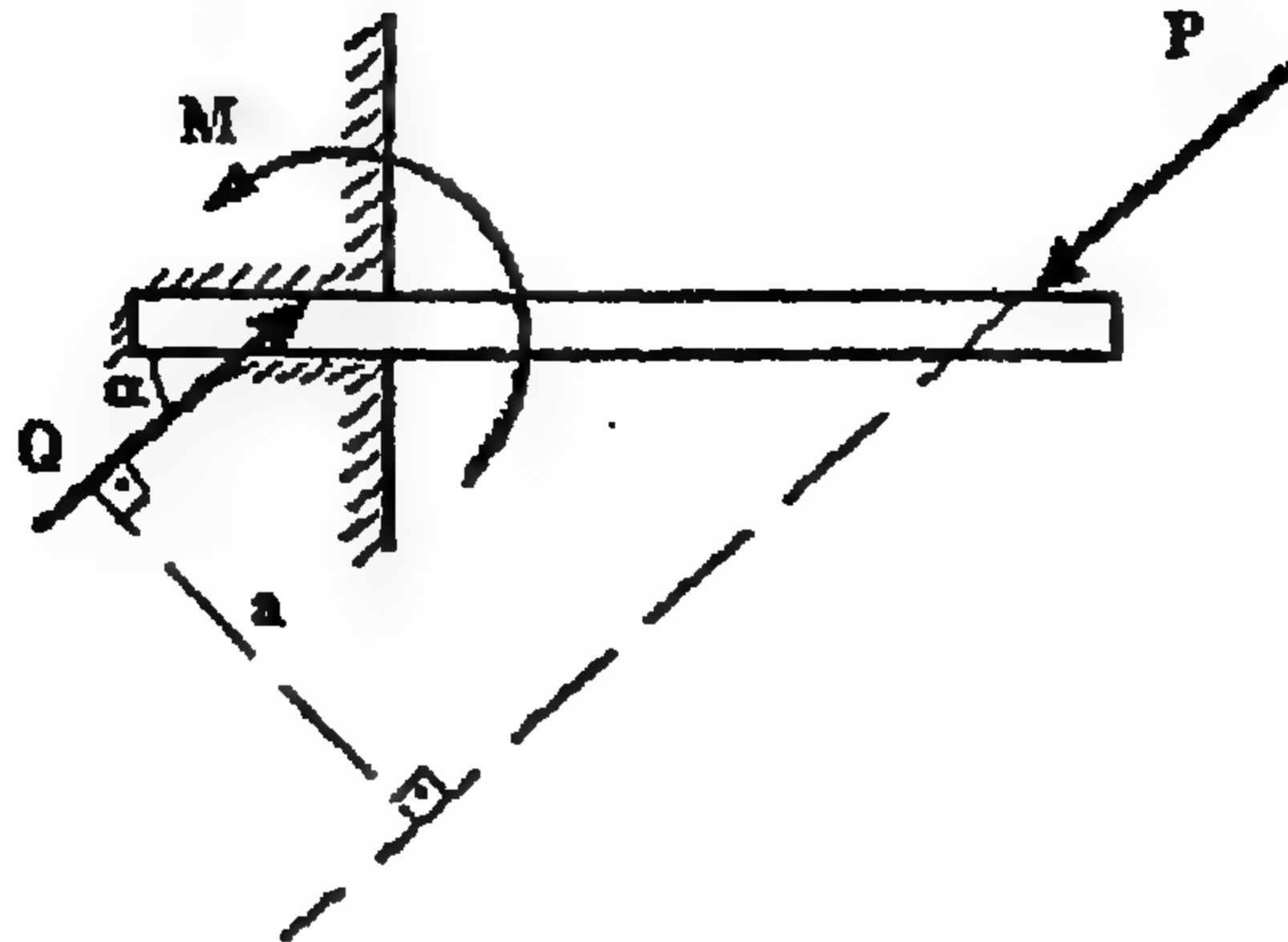


شكل (٣-٤) ب



شكل (٣-٤) أ

أما الجسم المحمول على مفصلين كما في شكل (٣-٤) فهو غير محدد إستاتيكيًا لأن معادلات الإثتان الثلاث لا تكفي لتحديد المجاهيل الأربعة  $X_A$ ،  $Y_A$ ،  $X_B$ ،  $Y_B$  الناشئة في المفصلين ولا بد من الاستعانة بنظريات المرونة لحل مثل هذه المسألة وهذا يخرج عن نطاق هذا الكتاب.



شكل (٤-٤)

يعطي شكل (٤ - ٤) فكرة عن التثبيت وهو منع الحركة سواء خطياً أو دورانياً عند أحد أطراف الجسم فتتولد قوى حول هذا الجزء المثبت تتوازن مع محصلة القوى العاملة  $P$  ويمكن إختزال رد فعل نقطة التثبيت إلى قوى  $Q$  وعزم دوران  $M$  وهما معاً يعادلان قوة تساوي وتضاد محصلة القوى العاملة  $P$  فإذا غيرنا مقداراً أو موضع  $P$  يتغير مقدار واتجاه  $Q$  ومقدار  $M$  تبعاً لشروط التوازن في كل حالة.

وعلى هذا يتألف رد فعل التثبيت من مجاهيل ثلاثة هي مقدار واتجاه  $Q$  وعزم التثبيت  $M$  أو  $Q_x, Q_y, M$ .

### ثالثاً : شروط إتران الجسم المتماسك:

لدراسة إتران الجسم المتماسك يستكمل أولاً شكل القوى المؤثرة وهي القوى العاملة وردود الفعل المجهولة في المراكز. كما سبق شرحه في البند السابق. وتمثل القوى المؤثرة على جسم متماسك بصفة عامة حالة القوى المتفرقة التي سبق بيان عملياتها.

ويترن الجسم المتماسك بتلاشي محصلة مجموعة القوى المتفرقة المؤثرة عليه ويلزم لذلك من الشروط ما يلي حسب ما سبق شرحه في الباب السابق.

( أولاً ) بيانياً :

يلزم شرطان هما : ١ - مصلع القوى مقفل.

٢ - المصلع الحلبي مقفل.

( ثانياً ) تحليلياً :

يلزم ٣ شروط هي :

$$R_x = \sum X = 0 \dots\dots\dots(4)$$

$$R_y = \sum Y = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$\sum M_A = 0 \dots\dots\dots(6)$$

وذلك بالتحليل في اتجاهين متعامدين  $x$  ،  $y$  وأخذ العزوم حول نقطة ما  $A$ . هذا ويمكن تكوين ٣ معادلات بديلة للاتزان وذلك بأخذ العزوم حول ٣ نقط ليست على استقامة واحدة.

$$\sum M_A = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$\sum M_B = 0 \dots\dots\dots(8)$$

$$\sum M_C = 0 \dots\dots\dots(9)$$

وشروط اختيار النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  بحيث لا تقع على استقامة واحدة ضروري لأنه قد تكون هناك محصلة وقد تقع نقطتان مثل  $A$  ،  $B$  عليهما مصادفة فيتلاشى العزم حولهما تلقائياً فإذا تلاشى العزم حول نقطة خارجة  $C$  كان ذلك دليلاً على تلاشي المحصلة ذاتها.

كما يمكن تكوين ٣ معادلات بديلة للاتزان وذلك بتحليل واحد في اتجاه  $x$  مثلاً وأخذ العزوم حول نقطتين  $A$  ،  $B$  بحيث لا يتعامد  $x$  على  $AB$  لأنه قد تكون هناك محصلة مطابقة للخط  $AB$  مصادفة فيتلاشى عزمها حول كل من  $A$  ،  $B$  تلقائياً كما تتلاشى مركبتها في اتجاه  $x$  في حالة التعامد تلقائياً كذلك.

وعدد الشروط التحليلية للاتزان ثلاثة وأية معادلة أخرى لا تأتي بجديد. وهذه الشروط الثلاثة لازمة وكافية.

لازمة بمعنى أنه إذا كان الجسم المتمايك متزنأ فلا بد من تحققها أي من تلاشي المحصلة.  
وكافية بمعنى أنه إذا توفرت هذه الشروط أي تلاشت المحصلة فإن الجسم يكون متزنأ.

وفي الحالة الخاصة كحالة القوى الملتقية يؤول عدد الشروط إلى اثنين كما سبق شرحه.  
وكذلك في حالة القوى المتوازية يصير عدد الشروط إثنين فقط لأن معادلة التحليل في اتجاه عمودي  
على القوى المتوازية تكون غير ذات موضوع في هذه الحالة.

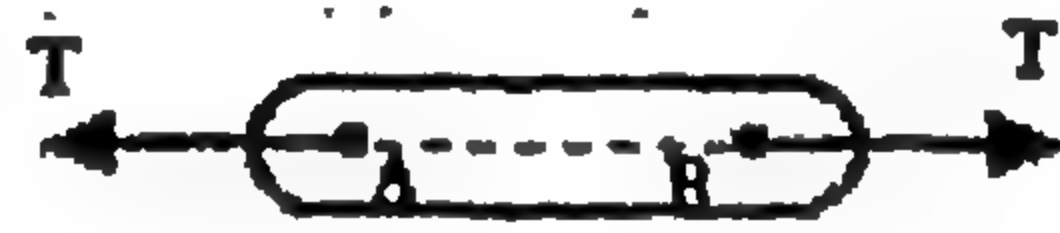
وإذا اقتصرَت القوى المؤثرة على جسم متمايك متزن على ٣ قوى فقط وجب أن تلتقي في  
نقطة واحدة وأن يعطى تحليلها في اتجاهين متعامدين.

## رابعاً : السواند والشدّادات:

إذا اتزن الجسم تحت تأثير قوتين فقط كل منهما تؤثر في نقطة ما من الجسم فإن القوتين تعملان  
على خط عمل واحد وهو الخط الواصل بين نقطتين تأثير القوتين كما يتساوى مقداراً القوتين ويتضاد  
اتجاههما كما في الشكل ( ٥-٤ أ، ب ).



شكل ( ٥-٤ ب )



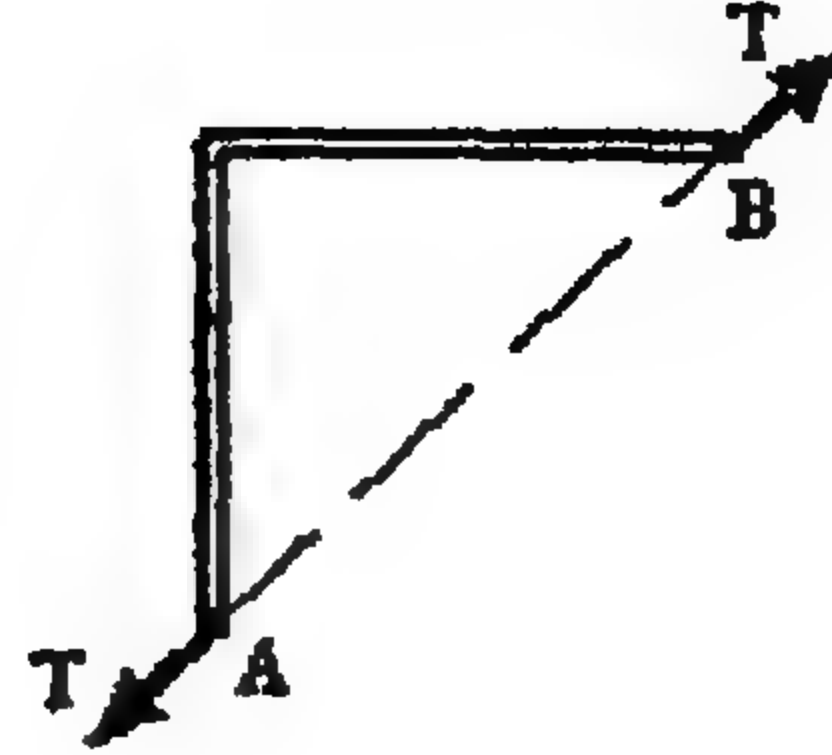
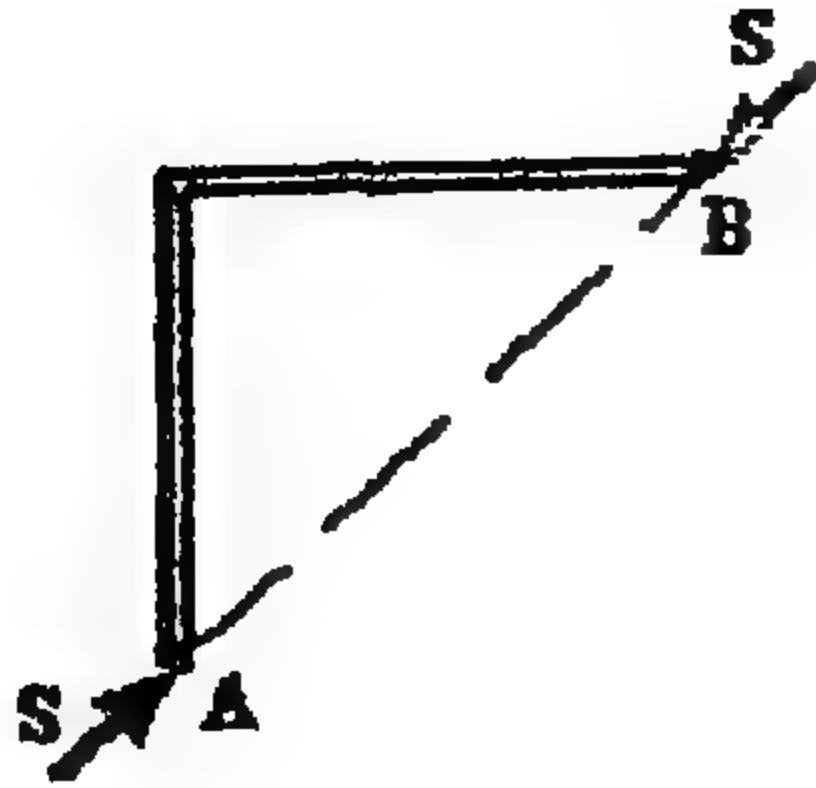
شكل ( ٥-٤ أ )

وقد يتخذ الجسم المتمايك شكل قضيب خفيف ينتهي عند كل من طرفيه بمفصل، فإذا لم يؤثر أي  
حمل ( أو قوة ) على القضيب بين مفصليه أطلق عيه قضيب خفيف غير محمل فإذا اتزن القضيب في هذه  
الحالة فإنه يتزن تحت تأثير ردي الفعل عند مفصلين، وعلى ذلك تظهر ردود الأفعال على شكل زوج  
من القوى المتساوية وخط عملها هو الخط الواصل بين مفصلين ( محور القضيب ) كما في الشكل ( ٦-٤ ).





قضيب خفيف غير محمل

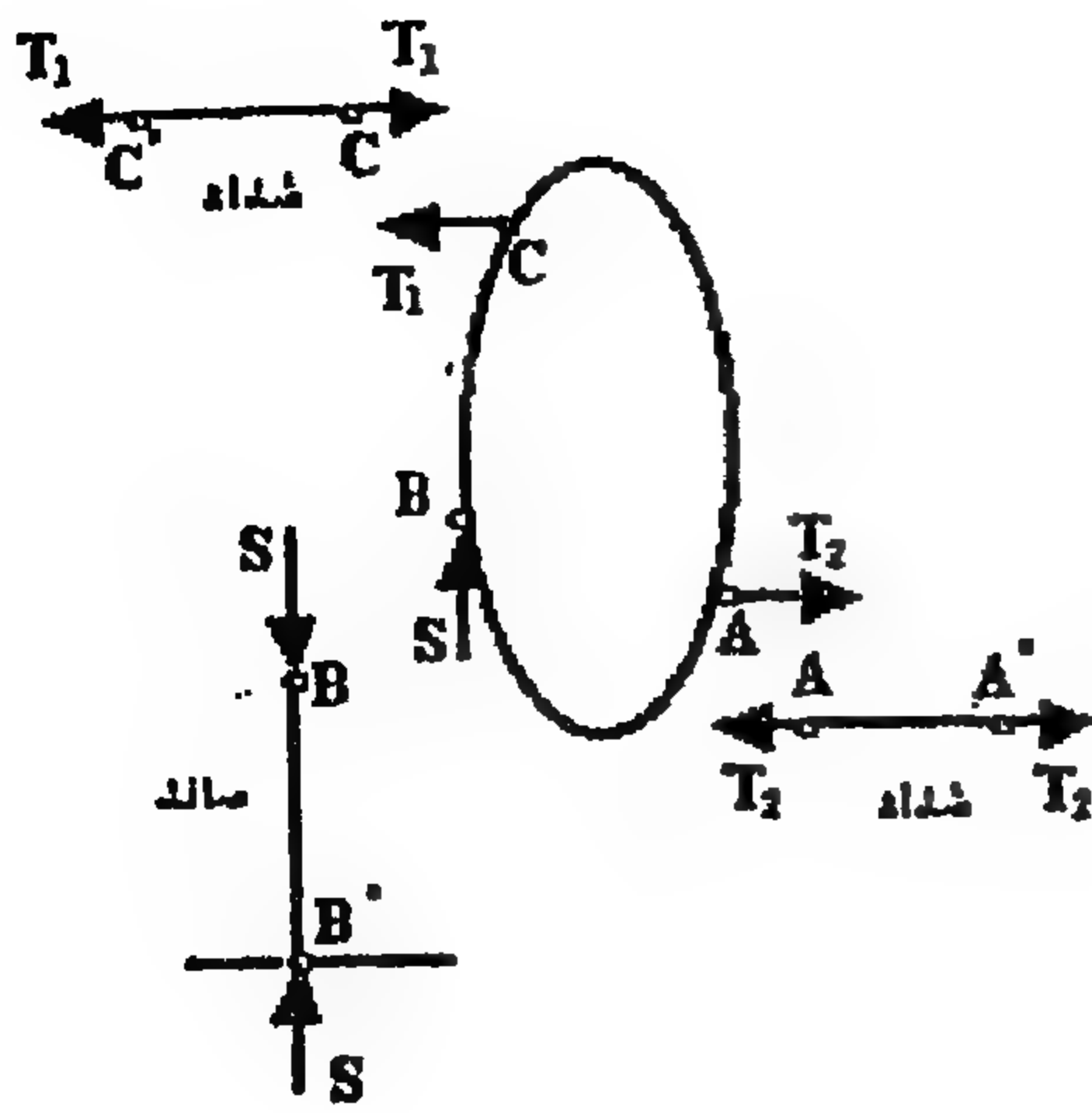


مؤنند

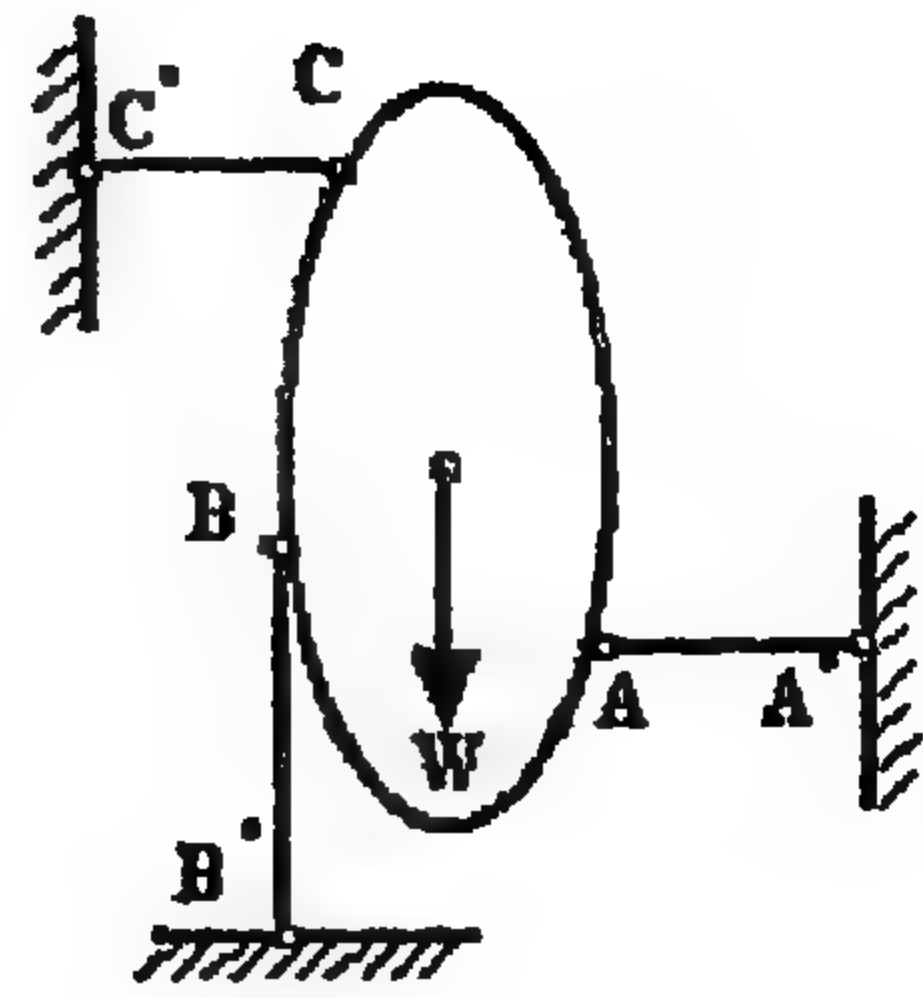
شدادات

شكل (٦-٤)

والقضيب المشدود يعتبر شداداً أي تآثر عليه قوى شد دائماً، أما القضيب المضغوط فيعتبر سائداً أي أنه تآثر عليه قوى ضغط دائماً، وعند اتصال هذه القضبان بأجسام أخرى محملة بقوى خارجية فإن كل قضيب خفيف غير محمل ( سائداً أو شداداً ) كوسيلة من وسائل الارتكاز يعطي للجسم رد فعل عند مفصل الارتكاز في الاتجاه المضاد لاتجاه تأثيره على القضيب وخط عمله معلوم وهو محور القضيب، وعلى ذلك فرد فعل الشداد أو السائد هو مجهول واحد ( في المقدار فقط ).



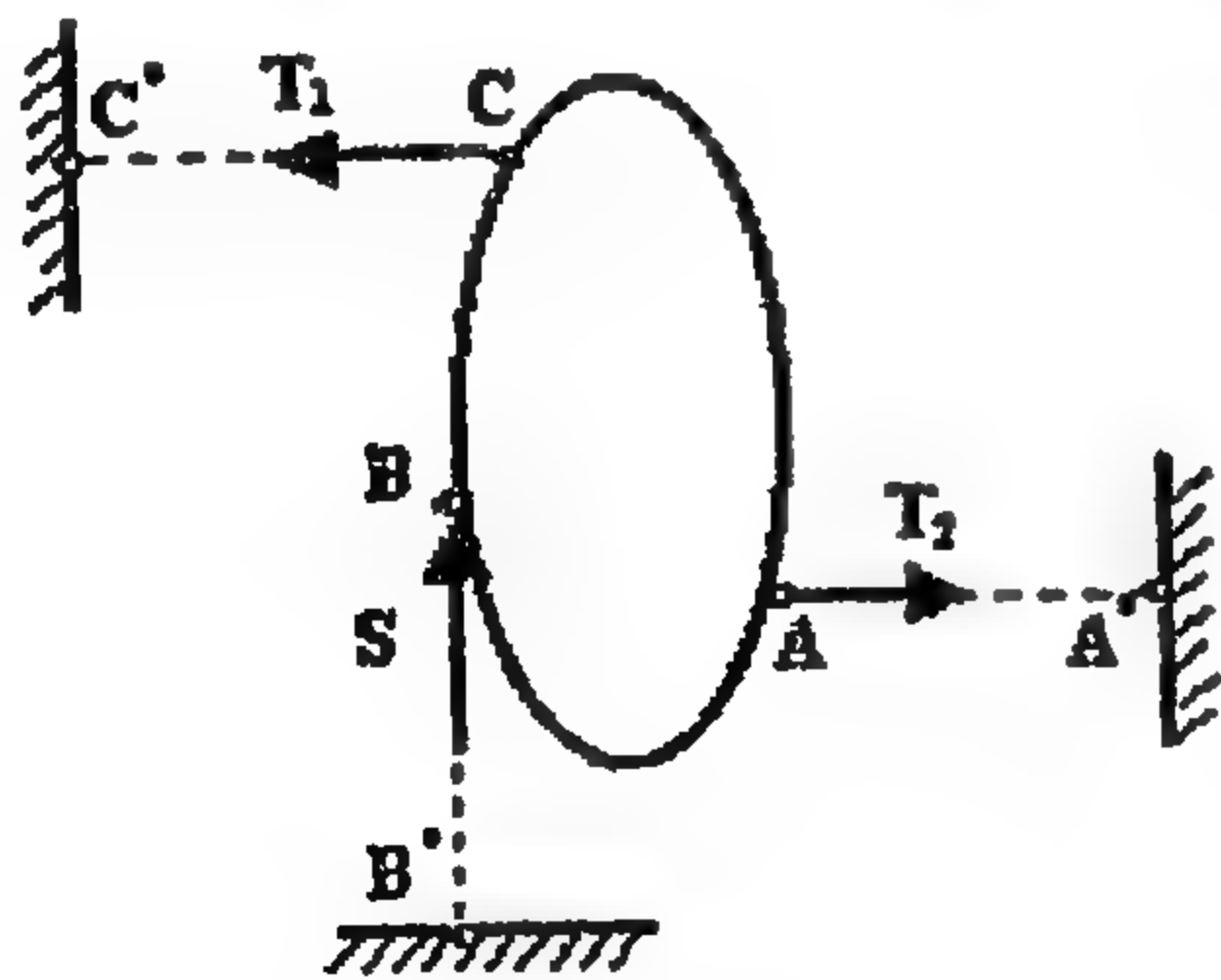
شكل (٤-٨)



شكل (٤-٧)

الجسم المتماثل في الشكل (٤-٧) يحمل بقوة  $W$  ويرتكز على ثلاثة أعضاء خفيفة غير محملة وهي القضبان  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  فإذا فرضنا أن القضبان  $AA'$ ,  $CC'$  شدادات انزلت بمفردها تحت تأثير قوى الشد عند مفاصلها وعند انتقال ردود الأفعال عند مفاصل الاتصال بالجسم  $A, C$  تظهر ردود الأفعال هذه  $(T_1, T_2)$  على الجسم كقوى شد هذا الجسم ولذلك فإذا اتصل شداد بجسم ما بمفصل فإن هذا الشداد يعمل على شد الجسم ولذا أطلقنا عليه هذه التسمية.

وبفرض أن القضيب  $BB'$  ساند اتران تحت تأثير قوى الضغط فيه بمفرده وعند انتقال رد الفعل



شكل (٤-٩)

عليه في المفصل  $B$  منه إلى الجسم يظهر رد الفعل  $S$  على الجسم كما لو كان يسند هذا الجسم ولذلك يطلق على القضيب  $BB'$  بالساند شكل (٤-٨).

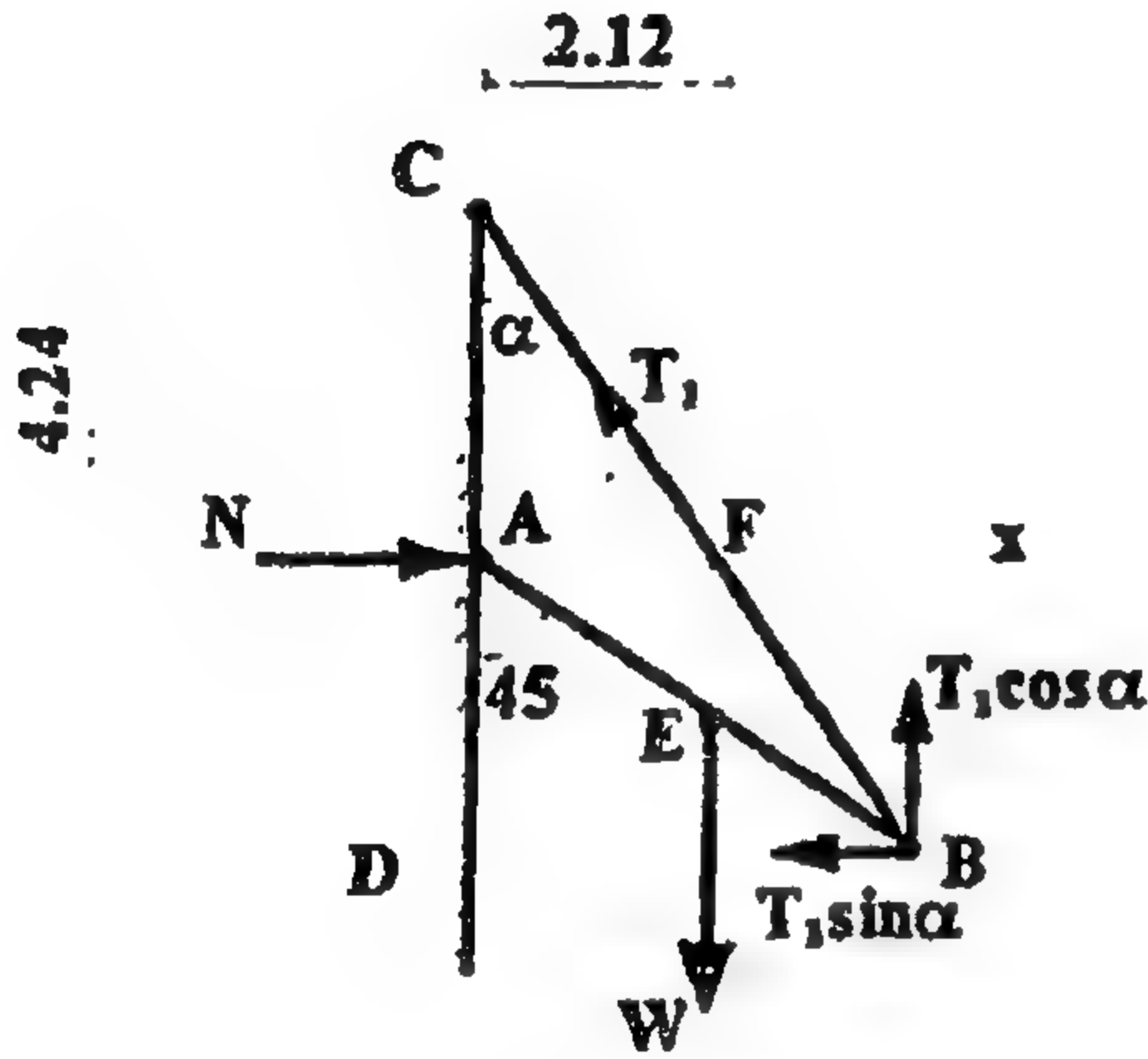
وعموماً عند ارتكاز جسم ما على مجموعة من الأعضاء الخفيفة الغير محملة (سواند أو شدادات) فإنه يمكن عزل هذا الجسم عن هذه الأعضاء مع وضع ردود أفعال هذه الأعضاء على الجسم كقوى شد أو سند حسب نوع العضو ومراعاة أن خطوط

عمل هذه القوى هي الخط الواصل بين مفصلي كل عضو كما في الشكل (٤-٩).

# أمثلة محلولة

مثال ١:

قضيب AB وزن ٥ كجم طوله ٦ م يستند على نقطة A من أحد طرفيه على حائط أملس وطرفه الآخر مربوط بحيط من B ومثبت عند C. الزاوية BAD تساوي ٤٥° في وضع الاتزان و AC تساوي ٤,٢٤ م، أوجد الشد في الحيط وكذلك رد فعل الحائط.



الحل:

$$\begin{aligned} AF = FE &= AE \cos 45 \\ &= 3 \cos 45 \\ &= 2.12 \end{aligned}$$

$$\tan \alpha = \frac{2.12}{4.24} = 0.5$$

$$\alpha = \tan^{-1} 0.5 = 36^\circ 34'$$

$$\because \sum x = 0$$

$$N - T_1 \sin \alpha = 0$$

$$N = T_1 \sin \alpha$$

$$\because \sum y = 0$$

$$W - T_1 \cos \alpha = 0$$

$$W = T_1 \cos \alpha$$

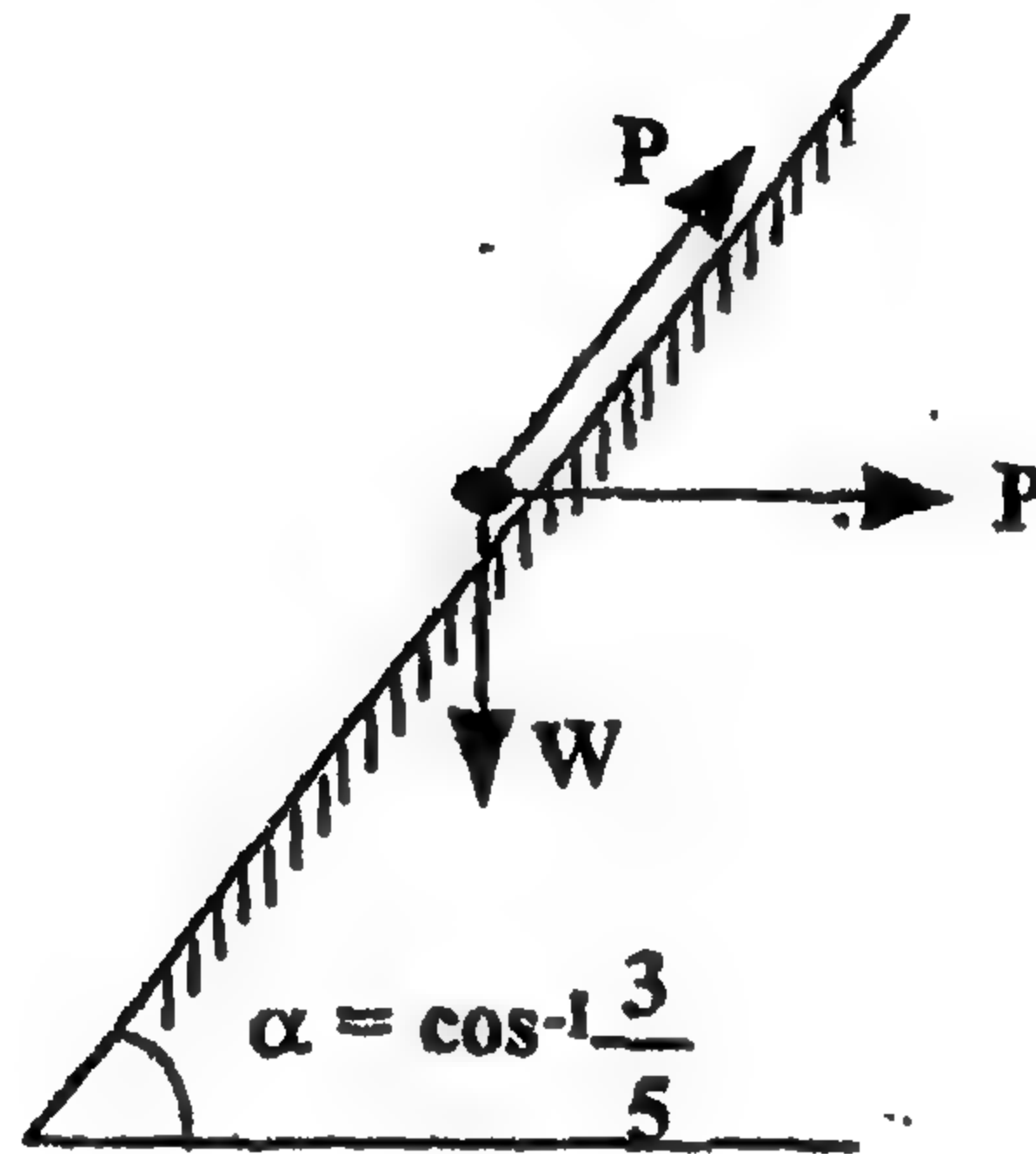
$$T_1 = \frac{W}{\cos \alpha} = 5.6 \text{ Kg}$$

$$N = 5.6 \times \sin 26.5667$$

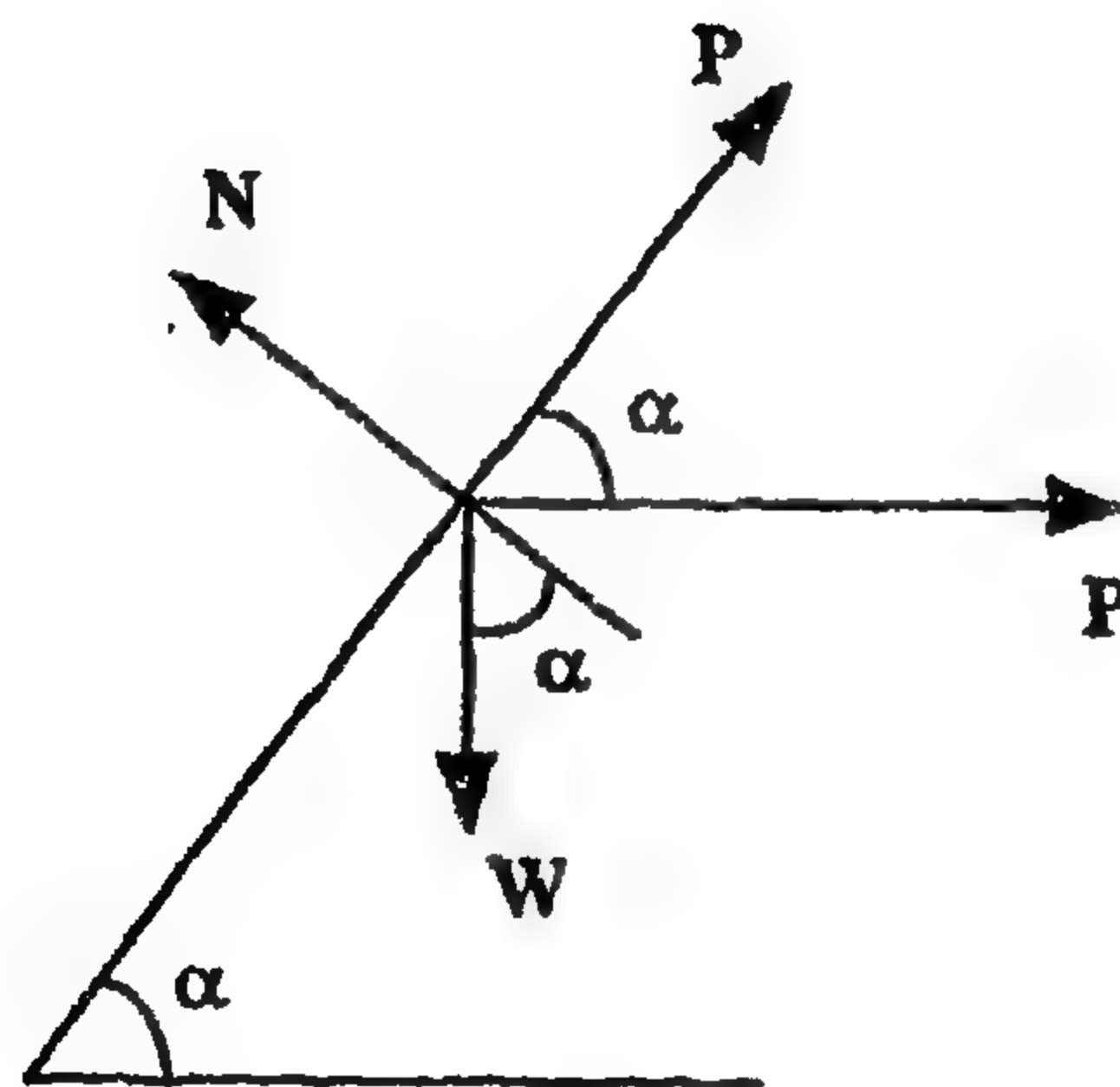
$$= 2.5 \text{ Kg}$$

## مثال ٢:

وضع جسم وزنه  $W$  على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية  $\alpha$  ومنع من الانزلاق بواسطة قوتين متساويتين مقدار كل منهما  $P$  أحدهما أفقية الاتجاه والثانية في اتجاه المستوى إلى أعلى كما في الشكل. أوجد  $P$  ومقدار رد فعل المستوى، حل تحليلياً وبيانياً.



الحل التحليلي:



نضع رد الفعل المستوي  
(ارتكاز بسيط) ثم نكتب  
معادلات اتزان الجسم كما في  
الشكل

بالتحليل في اتجاه المستوى

$$\sum X = 0$$

$$P + P \cos \alpha - W \sin \alpha = 0$$

$$P + \frac{3}{5}P = \frac{4}{3}Pw$$

$$\frac{8}{5}P = \frac{4}{3}w$$

$$P = \frac{w}{2}$$

بالتحليل في اتجاه العمودي على المستوى

$$\sum Y = 0$$

$$N - P \sin \alpha - w \cos \alpha = 0$$

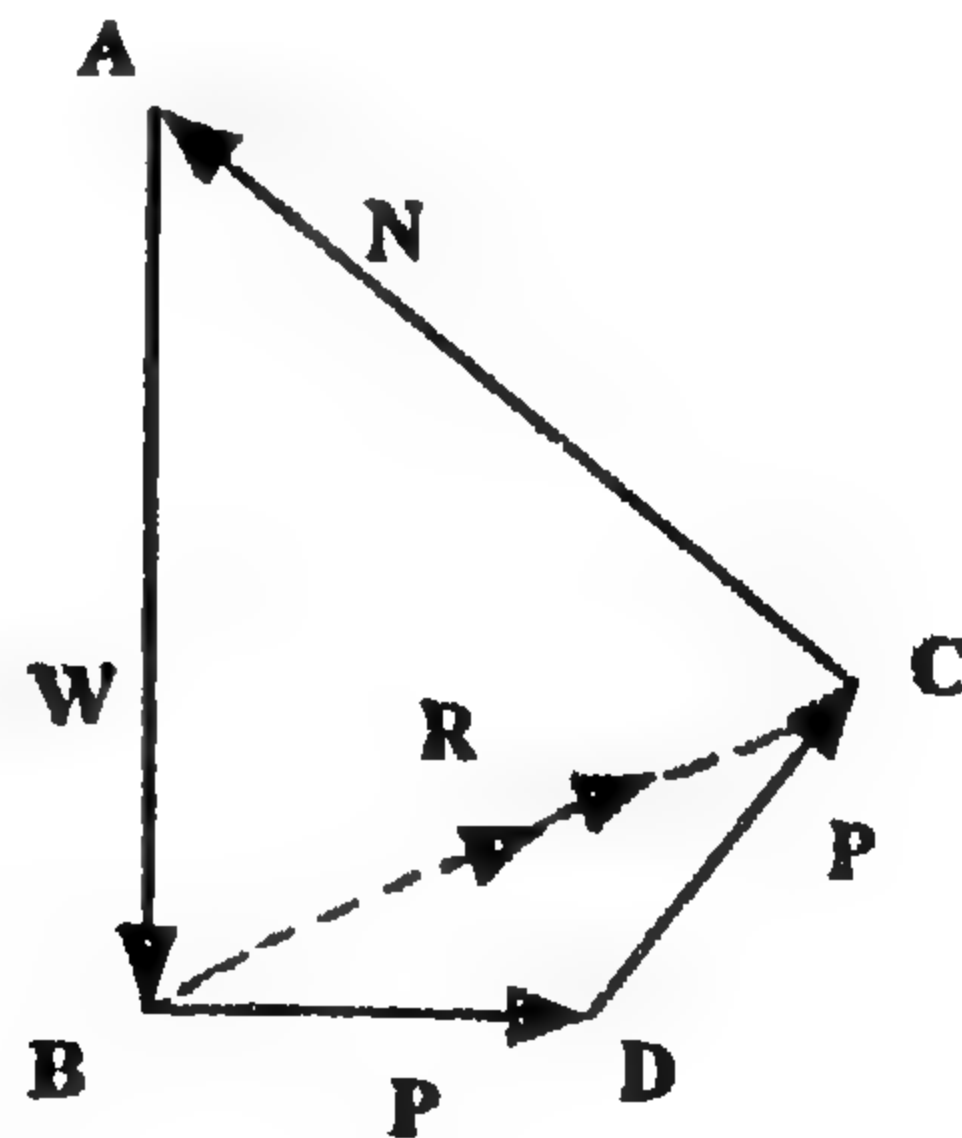
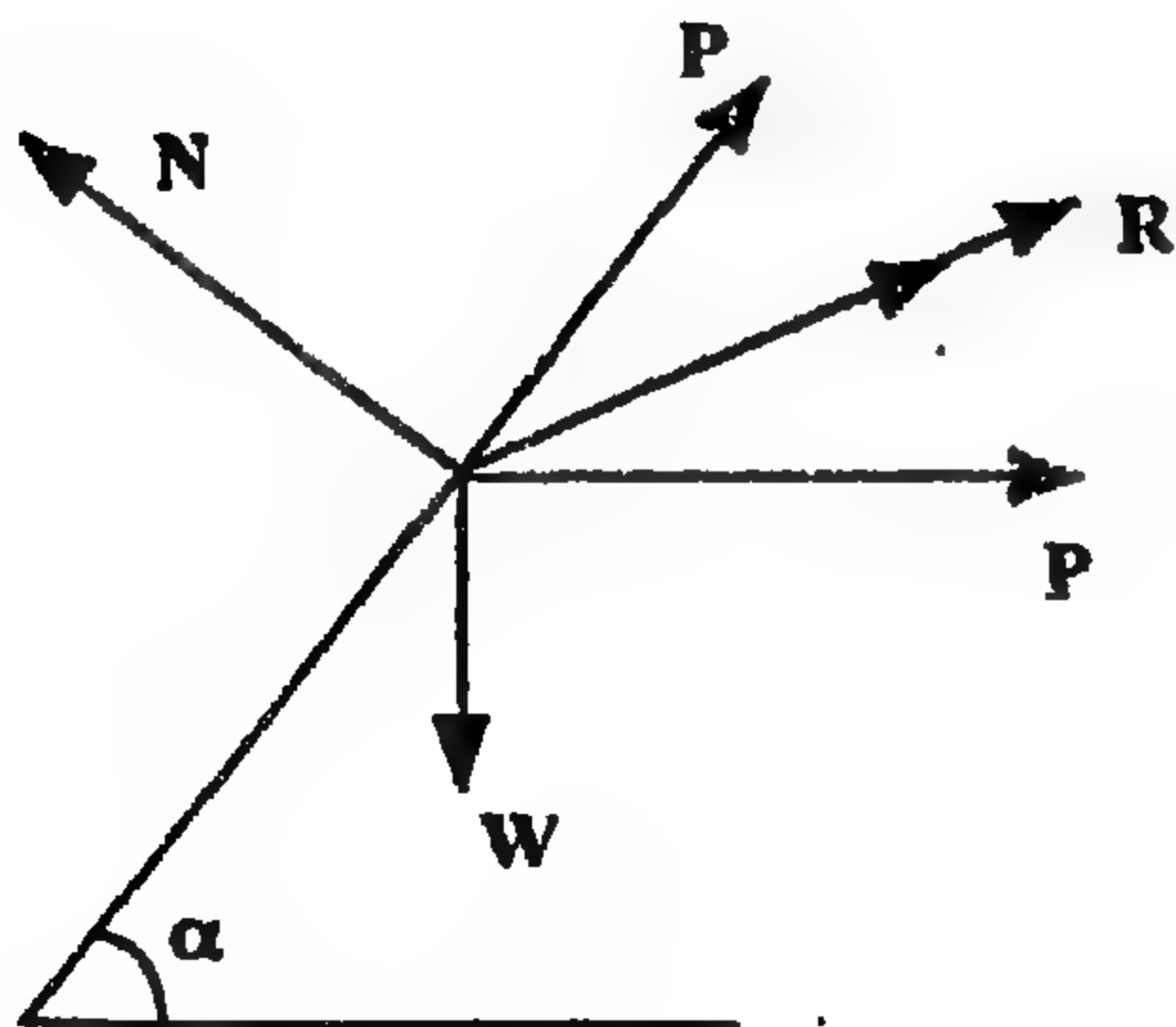
$$N = \frac{4}{5}P + \frac{3}{5}w = \frac{4}{5}\left(\frac{w}{2}\right) + \frac{3}{5}w$$

$$N = w$$

الحل البياني:

مقياس رسم القوى

نفرض أن  $w = 5 \text{ cm}$  ومنها  $1 \text{ cm} = w/5$



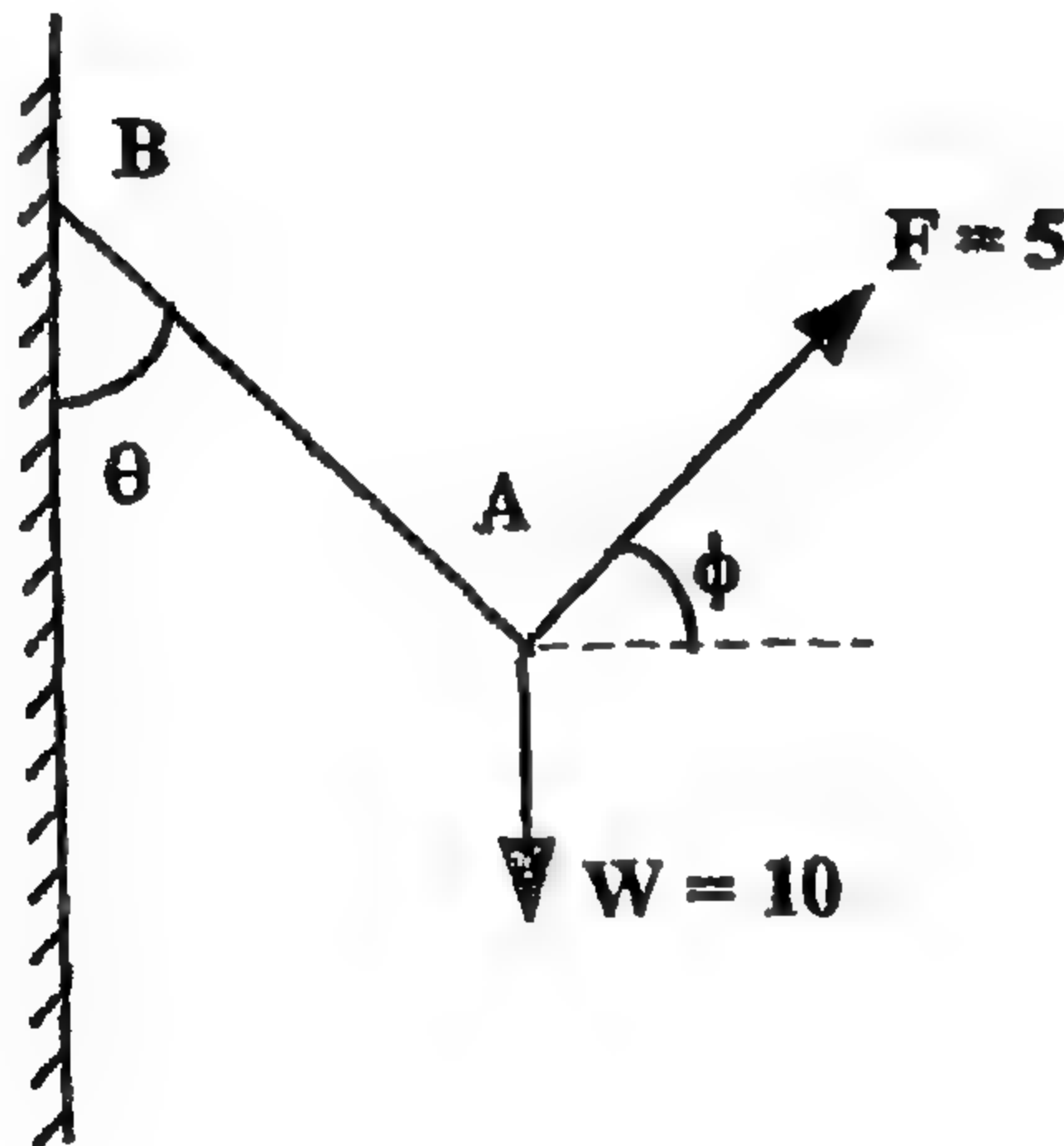
(ب)

شكل (أ) يمثل شكل خطوط العمل، شكل (ب) يمثل مضلع القوى المقفل وفيه  $\vec{AB}$  يمثل وزن الجسم  $W$ ،  $\vec{BC}$  يمثل محصلة القوتين المتساويتين  $P$  و  $P$ ،  $\vec{CA}$  يمثل رد فعل المستوى  $N$ ،  $\vec{DC}$  يمثل القوة المائلة  $P$ ،  $\vec{BD}$  يمثل القوة ناتج من مضلع القوة وبالقياس

$$N = 5 \text{ cm} = w, \quad P = 2.5 \text{ cm} = w/2$$

مثال ٣ :

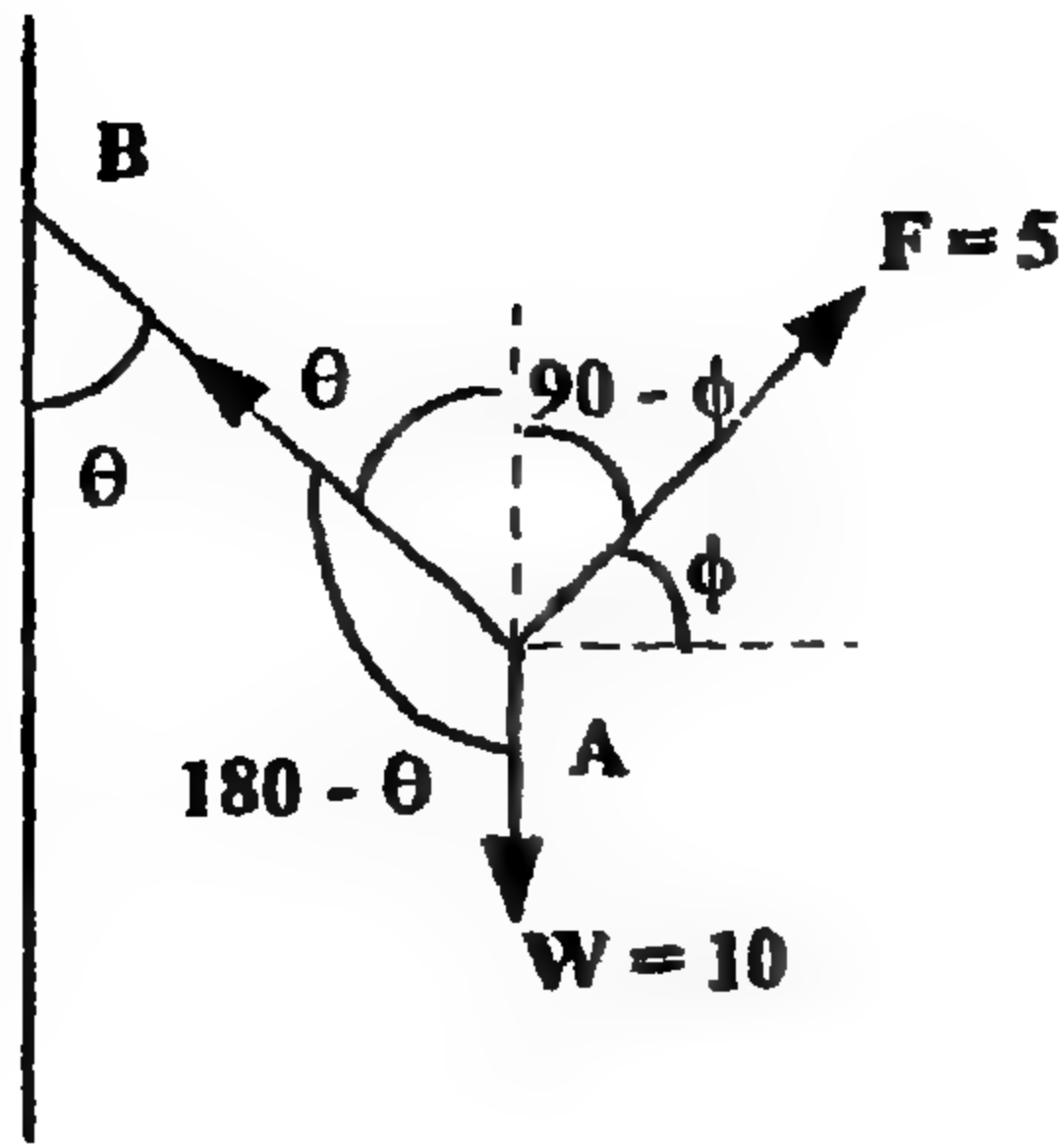
علق جسم وزنه  $10 \text{ N}$  بحيط خفيف غير مرن  $AB$  مثبت طرفه الآخر في نقطة ثابتة  $B$ . أثرت على الجسم قوة  $F$  مقدارها  $5 \text{ N}$  ليأخذ الحيط وضعاً مائلاً زاوية  $\theta$  على الرأس كما في الشكل. أوجد الاتجاه  $\phi$  الذي تؤثر فيه هذه القوة حتى يصنع الحيط مع الرأس في وضع الاتزان أكبر زاوية ممكنة. حل تحليلياً وبيانياً



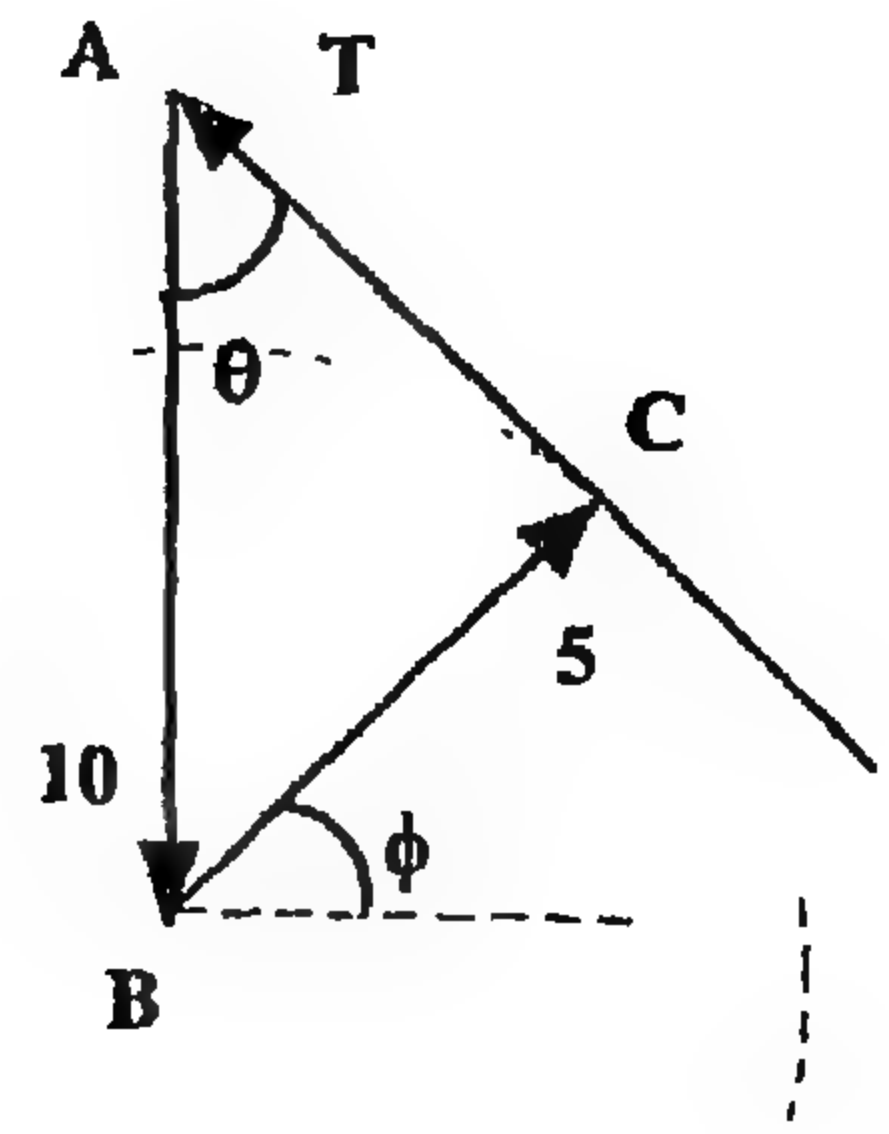
الحل التحليلي:

نضع رد فعل الحيط ثم نكتب معادلات اتزان الجسم كما في شكل (أ)

الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى فقط لذلك يمكن استخدام قاعدة لامي.



(أ)



(ب)

$$\frac{10}{\sin(\theta + 90 - \phi)} = \frac{5}{\sin(180 - \theta)}$$

$$2 \sin \theta = \cos(\theta - \phi)$$

بمفاضلة الطرفين بالنسبة إلى الزاوية  $\phi$

$$2 \cos \theta \frac{d\theta}{d\phi} = -\sin(\theta - \phi) \left\{ \frac{d\theta}{d\phi} - 1 \right\}$$

ولكي تكون  $\theta$  أكبر ما يمكن نضع  $\frac{d\theta}{d\phi} = 0$  ومنها

$$\sin(\theta - \phi) = 0$$

$$\theta = \phi$$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على أكبر قيمة للزاوية  $\theta$

$$2 \sin \theta_{\max} = 1$$

$$\theta_{\max} = 30^\circ = \phi$$



## الحل البياني:

مقياس رسم القوى  $1 \text{ cm} = 2 \text{ N}$

شكل (ب) يمثل مثلث القوى المقل  $ABC$  الذي فيه  $\vec{AB}$  يمثل الوزن  $10 \text{ N}$ ،  $\vec{BC}$  يمثل القوة  $F = 5 \text{ N}$  والمحل الهندسي للنقطة  $C$  هو دائرة مركزها  $B$

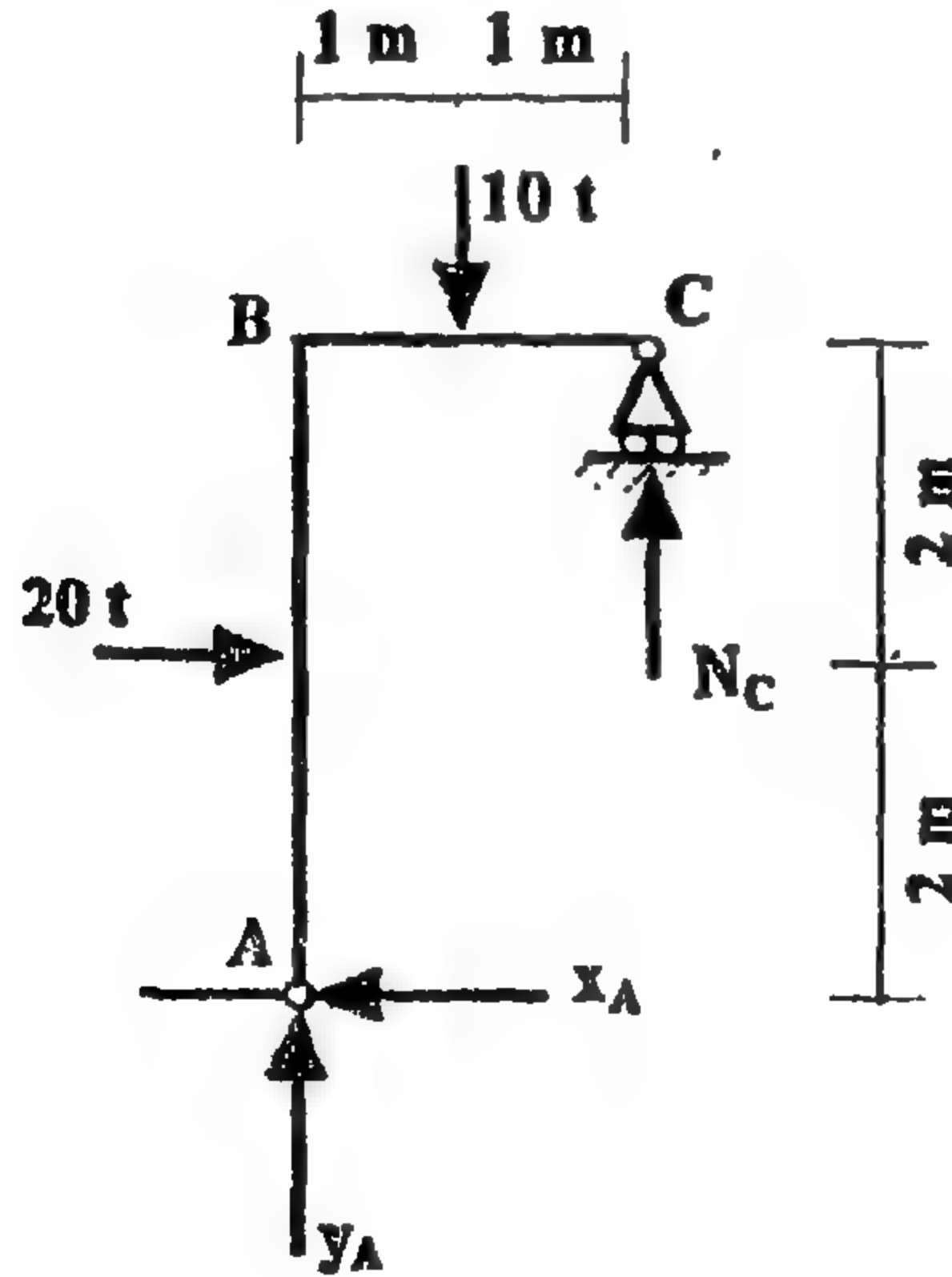
$\vec{CA}$  يمثل الشد  $T$  ولكي تكون الزاوية  $\theta$  أكبر ما يمكن يجب أن يكون  $AC$  مماس للدائرة.

من مثلث القوى وبالمقياس

$$\theta_{\max} = 30^\circ = \phi$$

مثال ٤ :

الجسم المتماثل  $ABC$  يتركز مفصليا في  $C$  عين ردود الفعل في كل من المفصل  $A$  و  $C$ .



الحل :

$$\therefore \sum M_A = 0$$

$$N_C(2) - 10(1) - 20(2) = 0$$

$$\therefore N_C = 25 \text{ t}$$

$$\therefore \sum X = 0$$

$$20 - X_A = 0$$

$$X_A = 20 \text{ t}$$

$$\therefore \sum Y = 0$$

$$y_A + N_C - 10 = 0$$

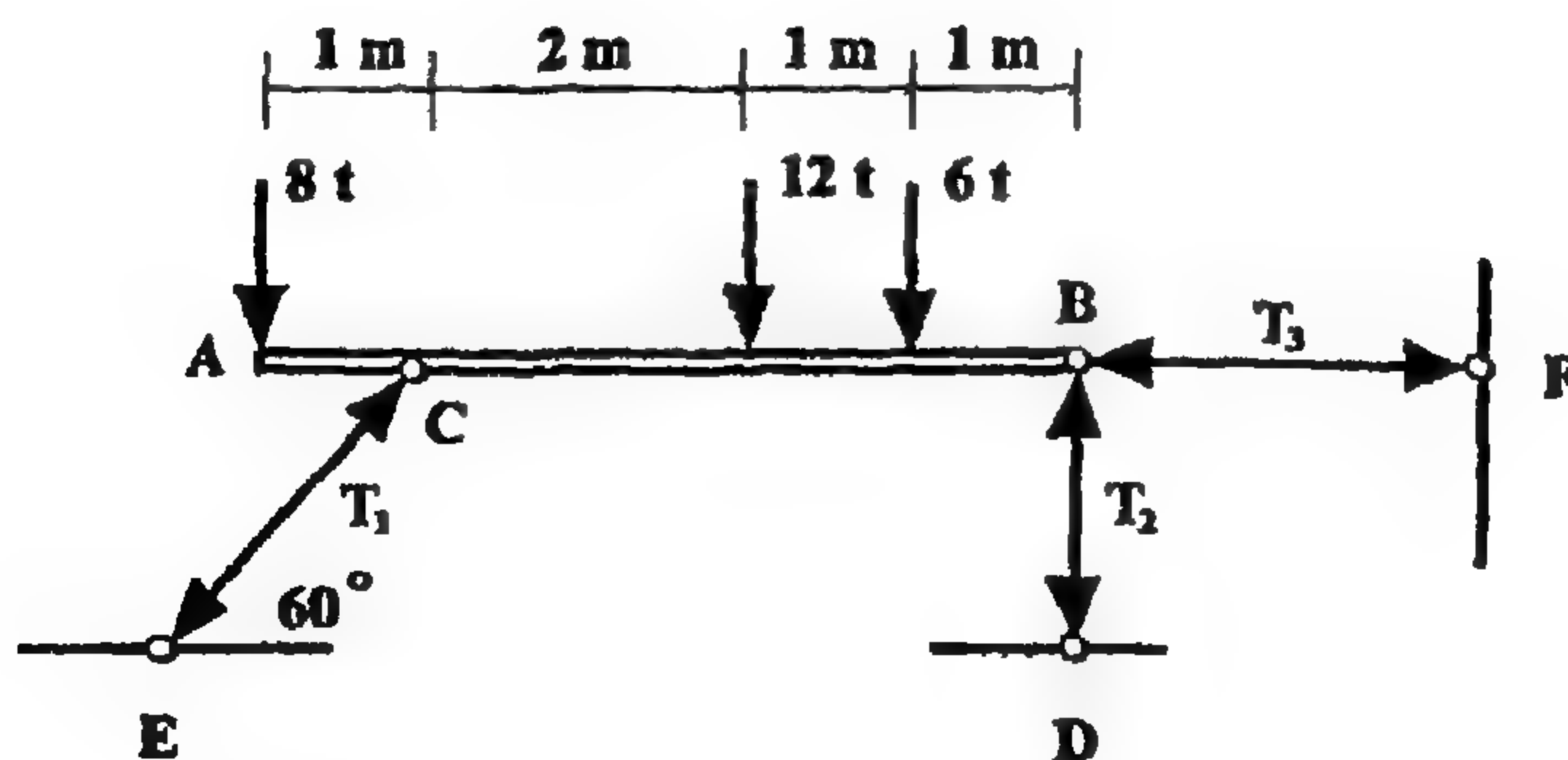
$$y_A + 25 - 10 = 0$$

$$\therefore y_A = -15 \text{ t}$$

أي أن اتجاه  $y_A$  عكس الاتجاه المفروض.

مثال ٥ :

القضيب B A محمول على ثلاث قضبان خفيفة و القضيب محمل بالقوى المبينة في الشكل ، يراد تعيين ردود الأفعال في القضبان الخفيفة .



الحل :

$$\therefore \sum M_C = 0$$

$$8(1) - 12(2) - 6(3) + T_2(4) = 0$$

$$T_2 = 8.5 \text{ t}$$

$$\therefore \sum Y = 0$$

$$-8 + T_1 \sin 60 - 12 - 6 + T_2 = 0$$

$$T_1 = 20.2 \text{ t}$$

$$\therefore \sum X = 0$$

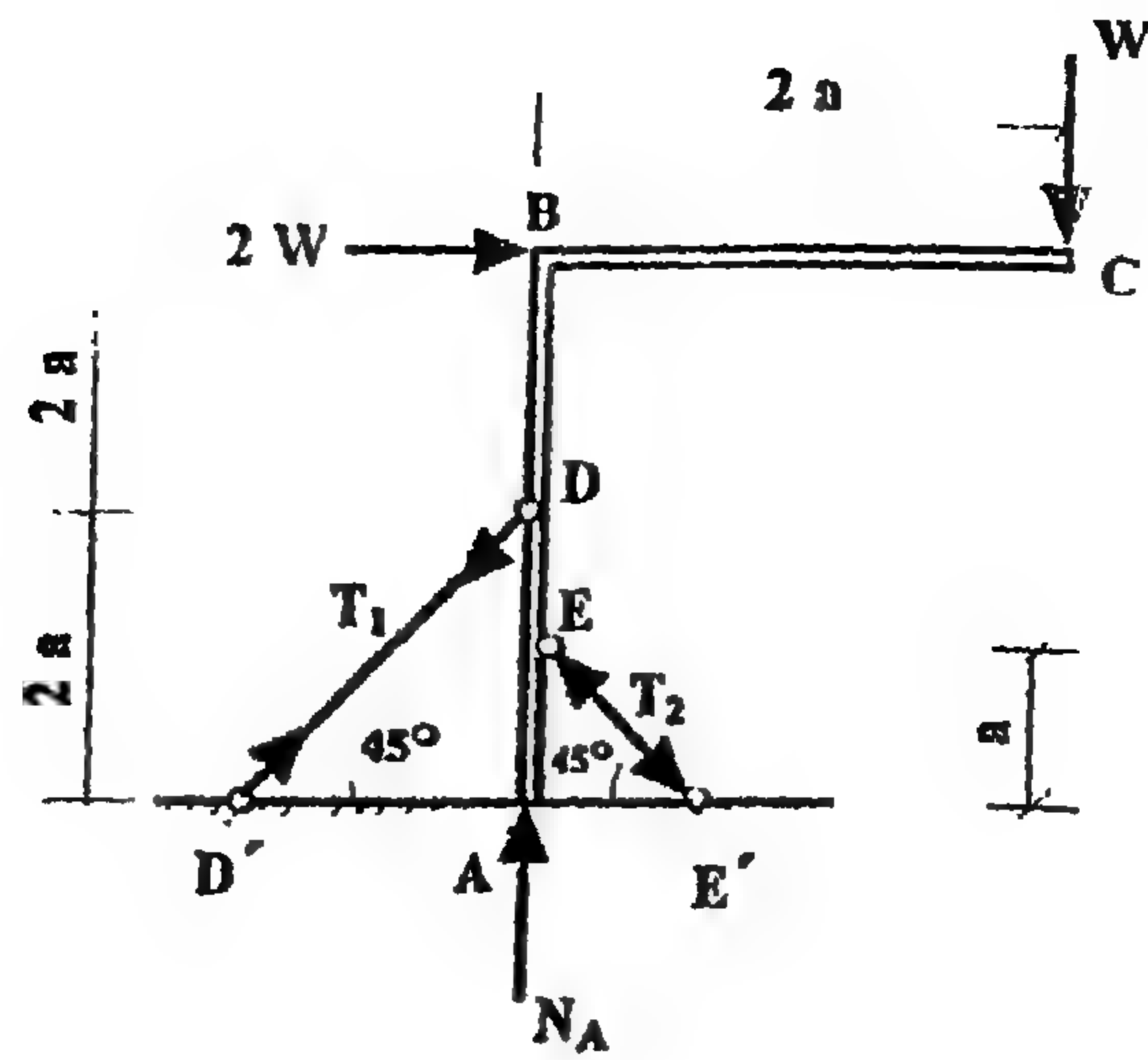
$$-T_3 + T_1 \cos 60 = 0$$

$$T_3 = 10.1 \text{ t}$$

مثال ٦ :

القضيب  $CBA$  الحمل كما في الشكل يرتكز ارتكاز بسيط عند  $A$  و يحتفظ بتوازنه القضبان الخفيفان  $DD'$  ،  $EE'$ . المطلوب : تعيين رد الفعل عند  $A$  و القوى المحورية في القضبان الخفيفان.

علماً بأن :  $AE = a$  ,  $AD = DB = 2a$  ,  $BC = 2a$



الحل :

$$\therefore \sum M_D = 0$$

$$- T_2 \sin 45(a) - 2w(2a) - w(2a) = 0$$

$$T_2 = -6\sqrt{2} w$$

اي ان اتجاه  $T_2$  عكس الاتجاه المفروض .

$$\therefore \sum X = 0$$

$$2w - T_1 \sin 45 - T_2 \sin 45 = 0$$

$$2w - \frac{T_1}{\sqrt{2}} - \left( -\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$T_1 = 8\sqrt{2} w$$

$$\therefore \sum Y = 0$$

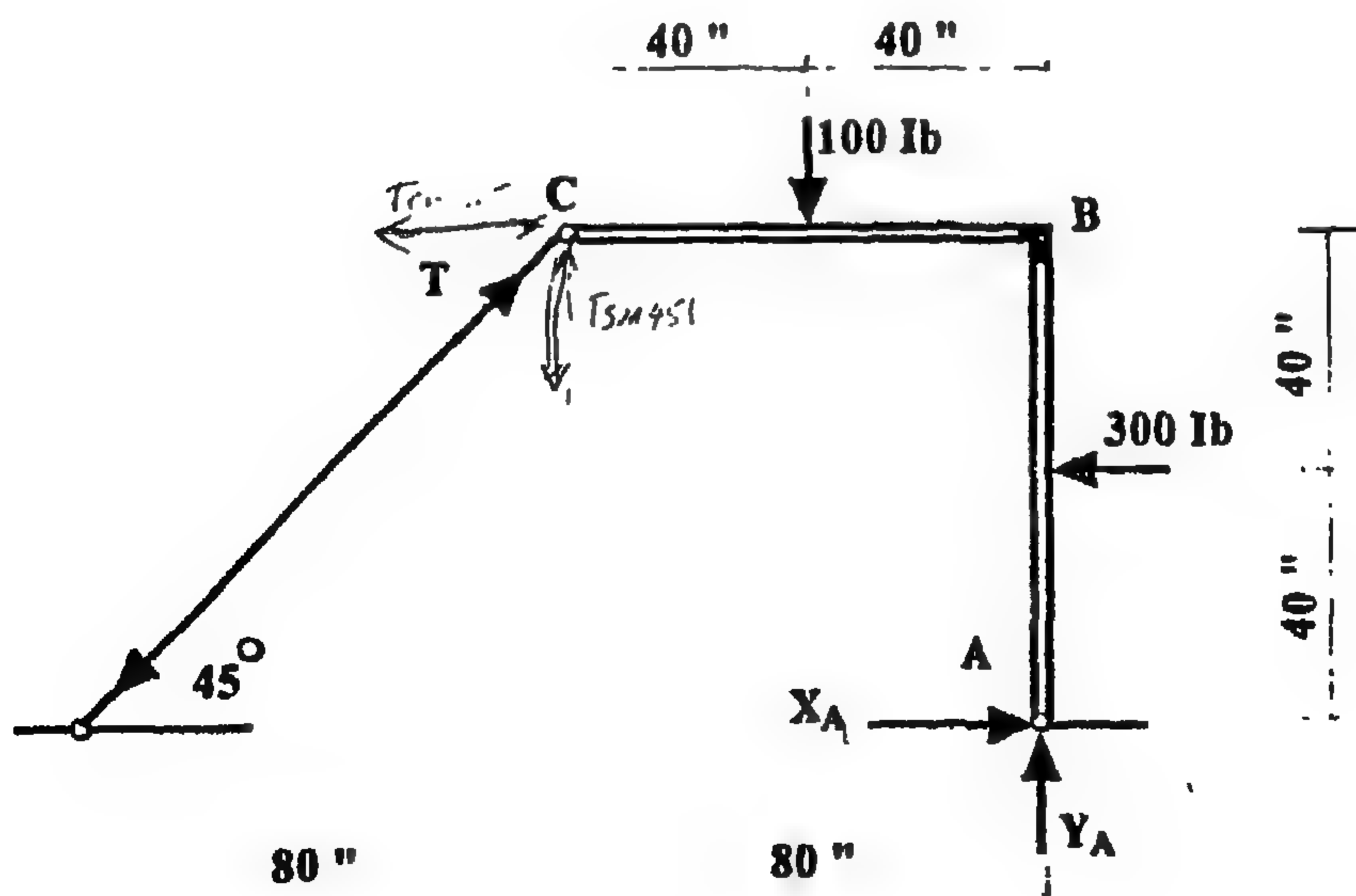
$$N_A - W - T_1 \sin 45 + T_2 \sin 45 = 0$$

$$N_A - W - \frac{8\sqrt{2}W}{\sqrt{2}} - \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} W = 0$$

$$N_A = 15 w$$

مثال ٧ :

جسم متماثل يرتكز على مفصل ثابت في A و يشده القضيب الخفيف DC و الجسم ABC يحمل كبا في الشكل عين ردود الفعل في المفاصل .



الحل :

$$\therefore \sum M_A = 0$$

$$300(40) + 100(40) + T \sin 45(80) + T \cos 45(80) = 0$$

$$T = -100\sqrt{2} \text{ lb}$$

$$\therefore \sum X = 0$$

$$T \sin 45 - 300 + X_A = 0$$

$$X_A = 200 \text{ lb}$$

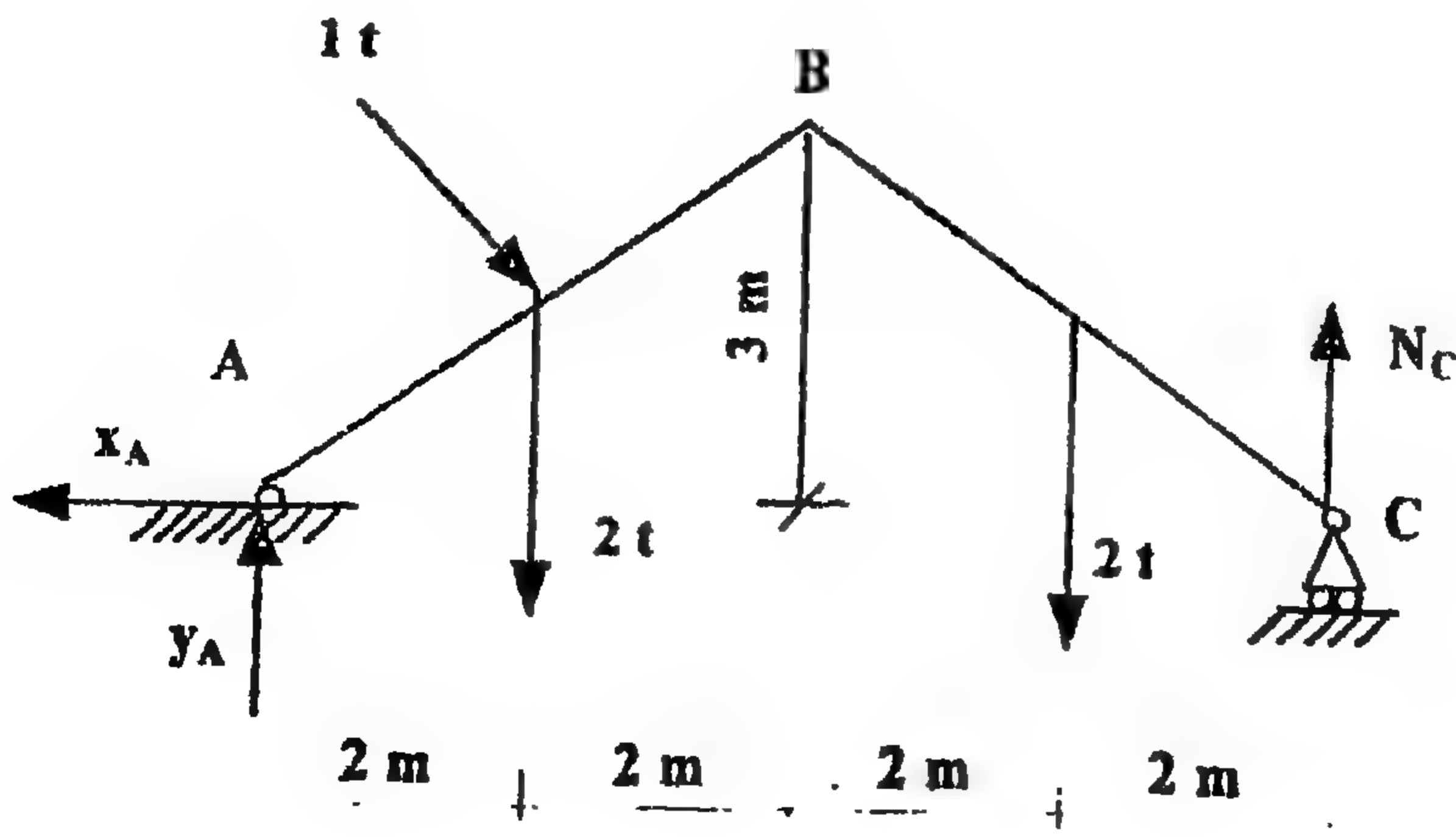
$$\therefore \sum Y = 0$$

$$T \cos 45 - 100 + Y_A = 0$$

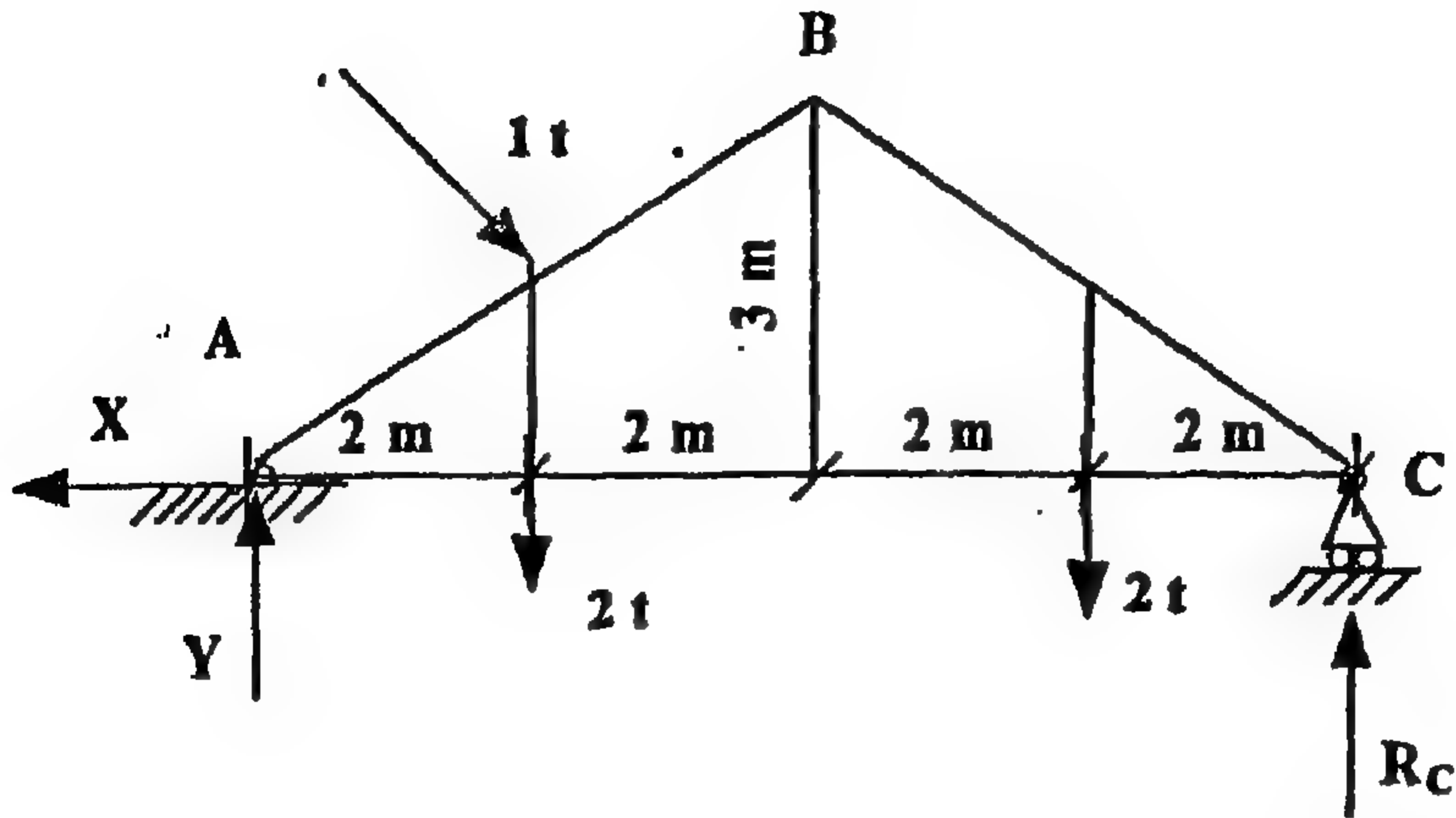
$$Y_A = 0 \text{ lb}$$

مثال ٨ :

ABC هيكل متماسك مثبت مفصلياً في A ويرتكز ارتكازاً حراً في C ويحمل الأحمال الموضحة بالأطنان. احسب ردود الفعل في A ، C وحقق النتائج بياناً



الحل:



بأخذ العزوم حول المفصل A نحصل على ردود الفعل  $R_c$

$$1 \times 2.5 + 2 \times 2 + 2 \times 6 = R_c \times 8$$

$$R_c = \frac{18.5}{8} t = 2.30 t$$

بالتحليل أفقياً ورأسياً نحصل على رد فعل المفصل A:

$$x = 1 \times \frac{1.5}{2.5} = 0.6 t$$

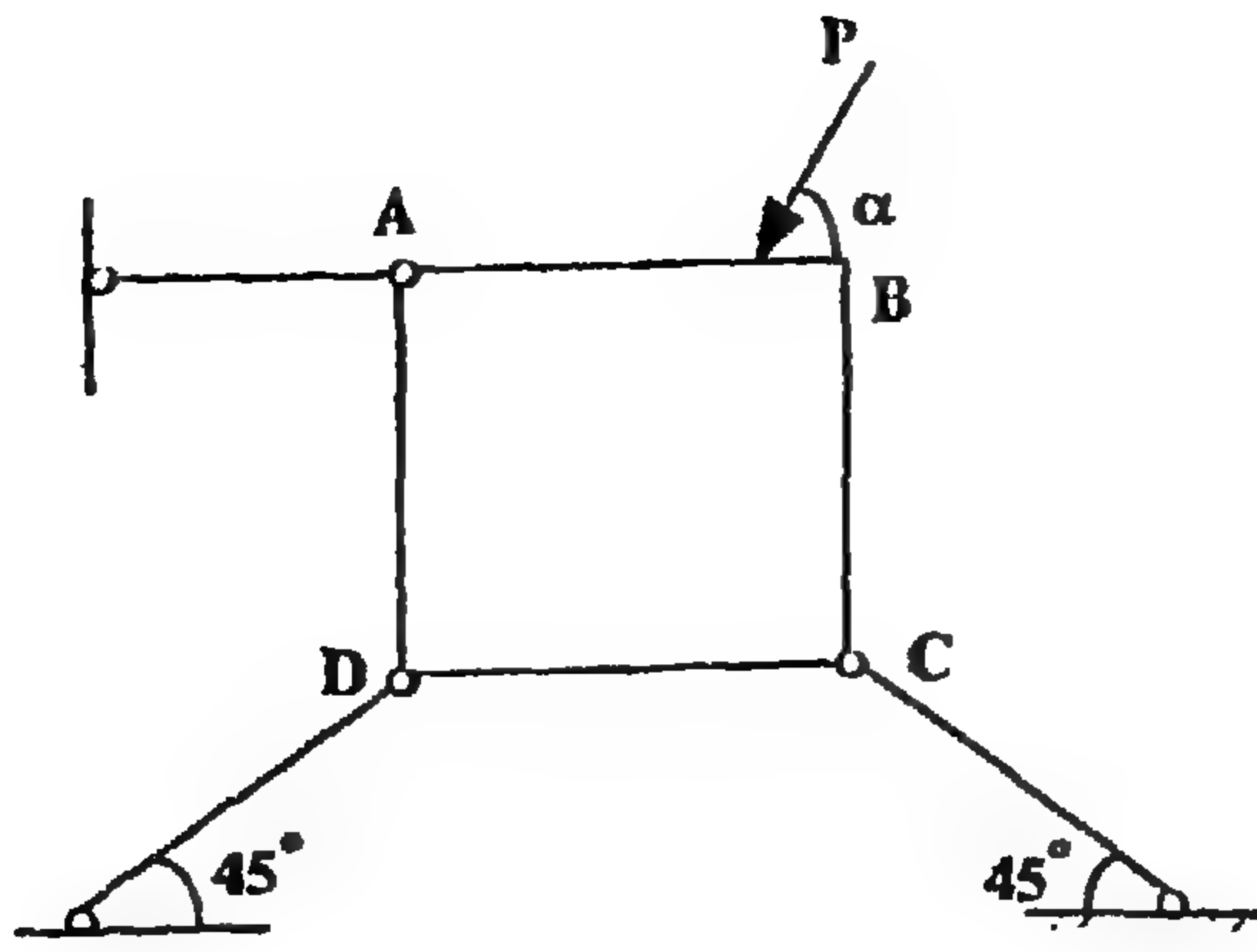
$$y + R_c = 2 + 2 + 1 \times \frac{2}{2.5}$$

$$y = 2.5 t$$

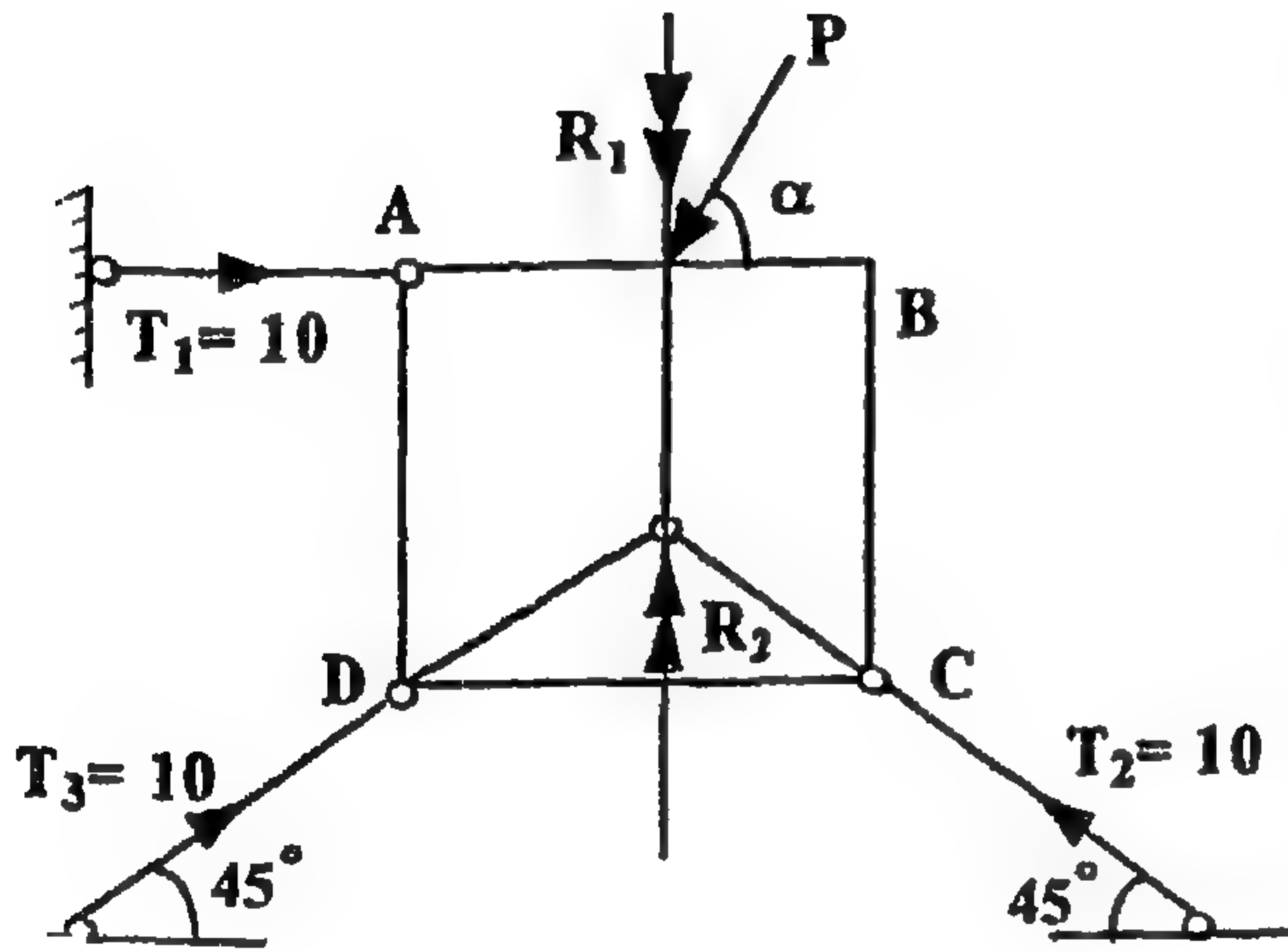
مثال ٩:

لوحة مربعة خفيفة ABCD تحملها من رؤوسها A ، C ، D ثلاثة سواند خفيفة وتؤثر عليها قوة P كما في الشكل، عين مقداراً واتجهاً بحيث يكون رد فعل كل من السواند مساوياً ١٠ كجم. حل بالطرق التحليلية والبيانية.





الحل:



ردود فعل الوصلات نفسها  
ومقدار كل منها ١٠ كجم كما  
هو معطى برأس السؤال. اللوحة  
متزنة تحت تأثير ٤ قوى هي  $T_1$  ،  
 $T_2$  ،  $T_3$  ،  $P$  من شرط اتزان  
القوى الأربع أن تكون محصلة  
أي اثنين منها مساوية ومضادة  
لمحصلة الإثنين الآخرين وبجمعها  
خط عمل واحد.

محصلة  $T_2$  ،  $T_3$  هي  $R_2$  المبينة بالشكل وهي رأسية وتقطع الضلع  $AB$  في منتصفه  $E$  وفيها  
تلتقي القوتان الأخريان  $T_1$  ،  $P$  كما تمر بها  $R_1$  محصلة هاتين القوتين وبذا تتحدد نقطة تأثير القوة  
المجهولة  $P$  وهي  $E$  منتصف  $AB$

أما مدار  $P$  فيمكنه التحليل الأفقي والرأسي للقوى الأربع المتزنة:

$$10 + \frac{10}{\sqrt{2}} - \frac{10}{\sqrt{2}} - P \cos \alpha = 0$$

$$\frac{10}{\sqrt{2}} + \frac{10}{\sqrt{2}} - P \sin \alpha = 0$$

$$\therefore P \cos \alpha = 10, P \sin \alpha = 10\sqrt{2}$$

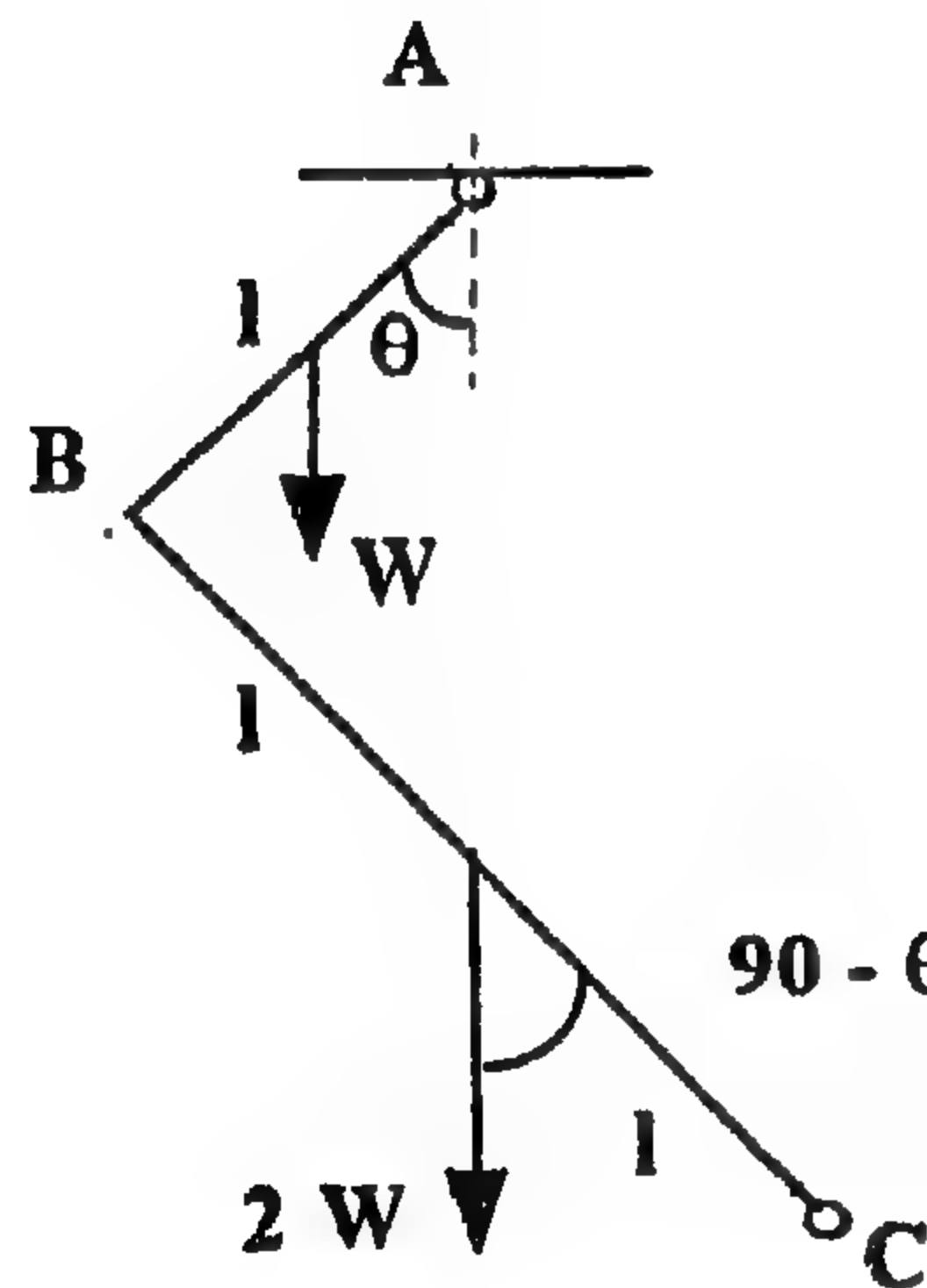
بالربيع والجمع نحصل على مقدار  $P$  :

$$P^2 = 100 + 200 = 300 \quad \therefore P = 10\sqrt{3}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{2}$$

وللحل بياناً يرسم مضلع قوى للأربع قوى المترنة

مثال ١٠ :



جسم متماسك على شكل زاوية قائمة ABC معلق مفصلياً في A ويرتكز على وتد أملس عند طرفه C. أوجد رد فعل الوتد بدلالة الزاوية  $\theta$  التي يتلاشى عندها رد الفعل هذا.

إذا كانت  $(\theta = 60^\circ)$  أوجد قيمة القوة  $P$  التي يلزم التأثير بها على خط العمل CB لحفظ الإتزان بدون الوتد وأوجد رد فعل المفصل A في هذه الحالة الأخيرة.

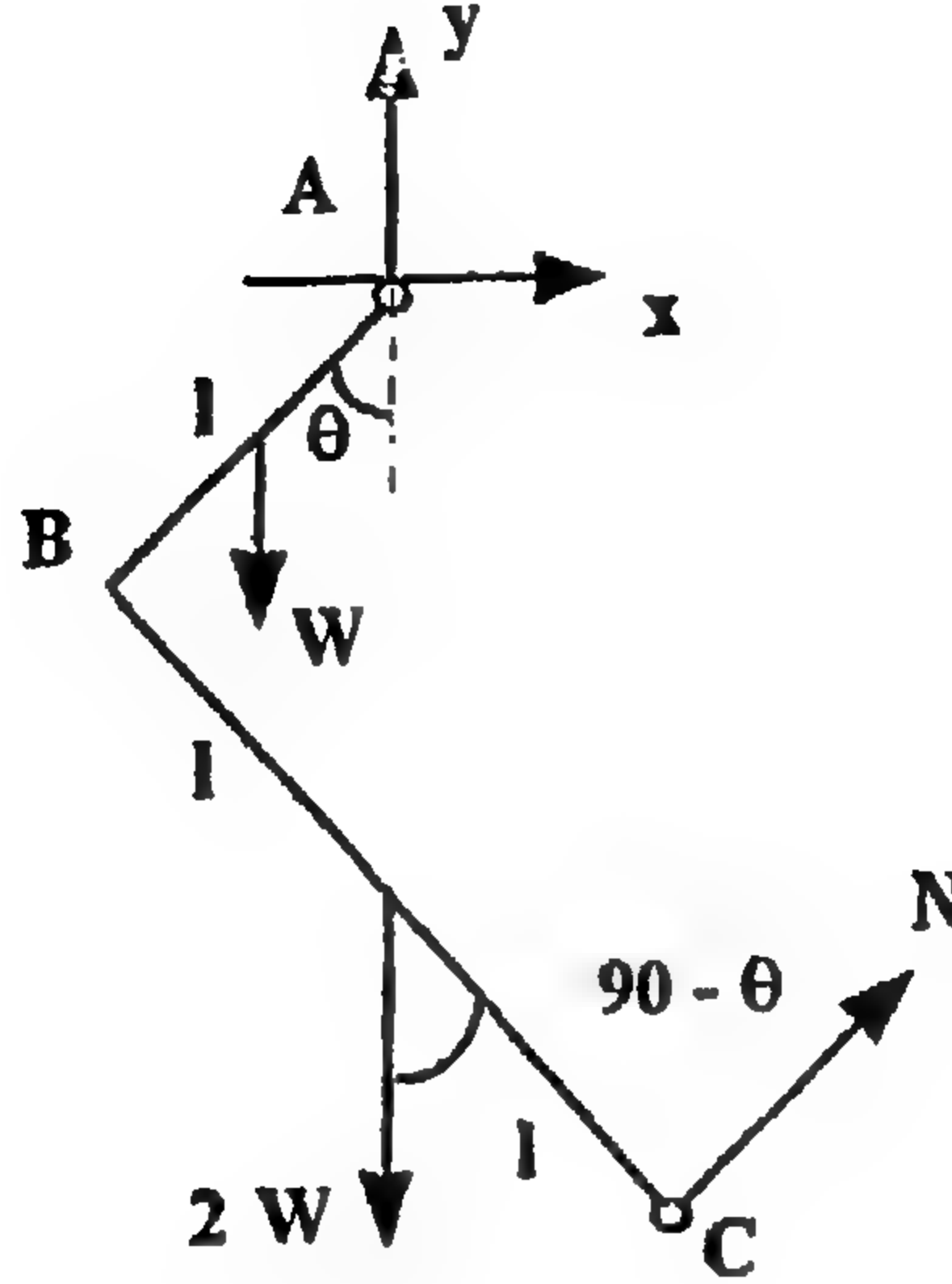
القوى المؤثرة على الجسم هي وزنه جزئية  $W$  ، ورد الفعل العمودي من الوتد الأملس  $2W$  ، رد فعل المفصل  $(x, y)$  ،  $N$  ،

$$N_2 = W \sin \theta \cdot \frac{1}{2} + 2W \sin \theta - 2W \cos \theta = 0$$

$$\therefore N = W \left( \cos \theta - \frac{5}{4} \sin \theta \right)$$

تتلاشى N عندما يكون:

$$\tan \theta = 4/5$$



الحالة الثانية: في حالة التأثير بقوة P في خط العمل CB نأخذ العزوم حول A

$$-P + W \sin 60^\circ \frac{1}{2} + 2W \sin 60^\circ - 2W \cos 60^\circ = 0$$

$$\therefore P = \left( \frac{5\sqrt{3}}{4} - 1 \right) W$$

بالتحليل أفقياً ورأسياً على مركبتي رد فعل المفصل:

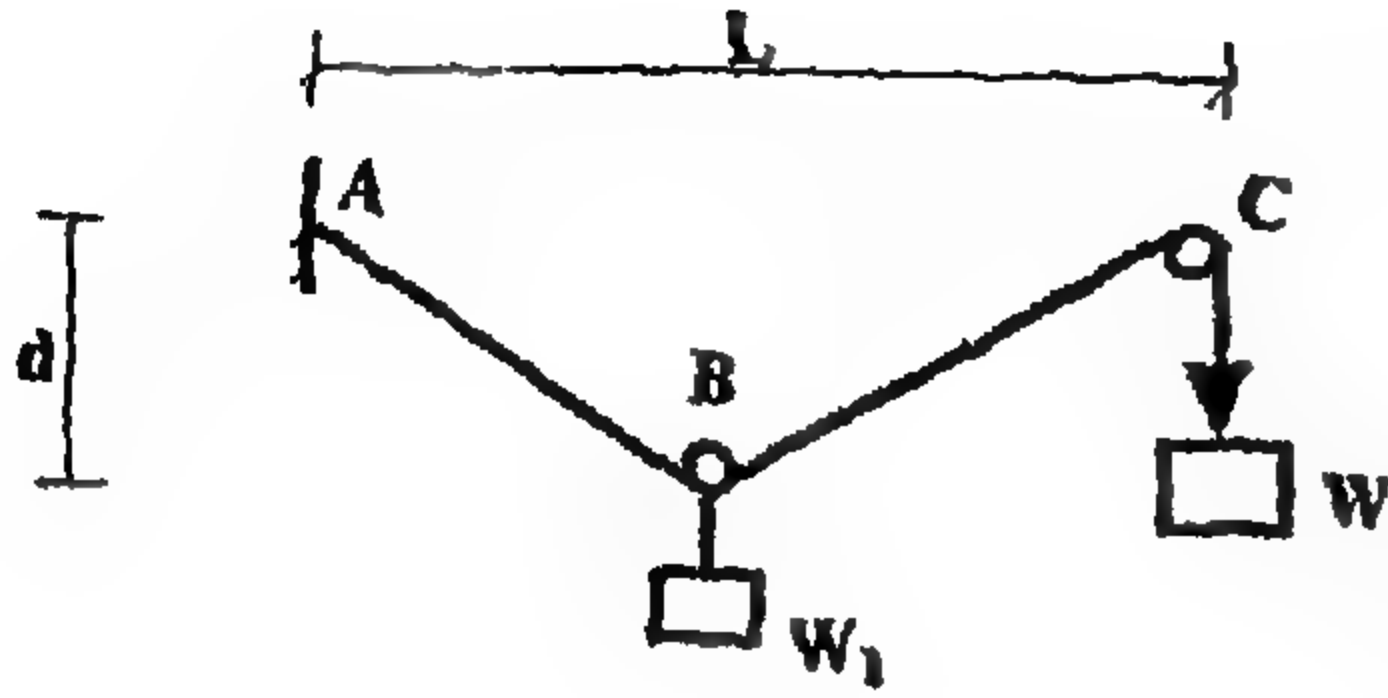
$$X - P \cos 60 = 0$$

$$Y - 3W + P \sin 60 = 0$$

$$\therefore X = \frac{1}{2} \left( \frac{5\sqrt{3}}{4} - 1 \right) W$$

$$Y = \left( \frac{9}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) W$$

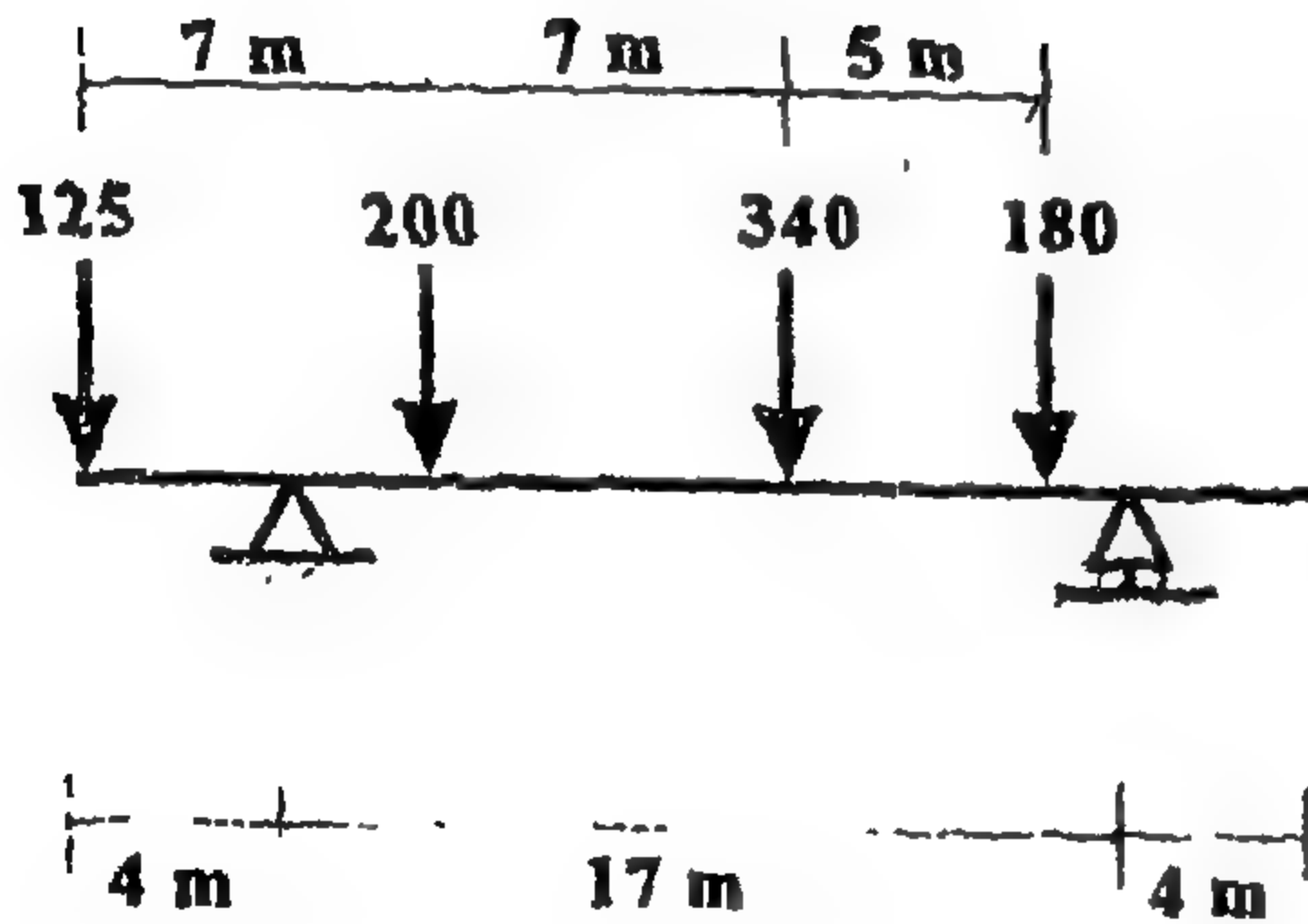
## تمارين



١ - بكرة خفيفة B معلق بها ثقل  $W_1$  وهي مركبة على حبل خفيف A B C مثبت طرفه A ويمر طرفه الآخر حول بكرة ثابتة صغيرة ملساء C ليتدلى منه ثقل W . عين المسافة L بدلالة  $W_1$  ، W ، L .

$$\left[ d = \frac{1}{2} L \sqrt{\left( \frac{2W}{W_1} \right)^2 - 1} \right]$$

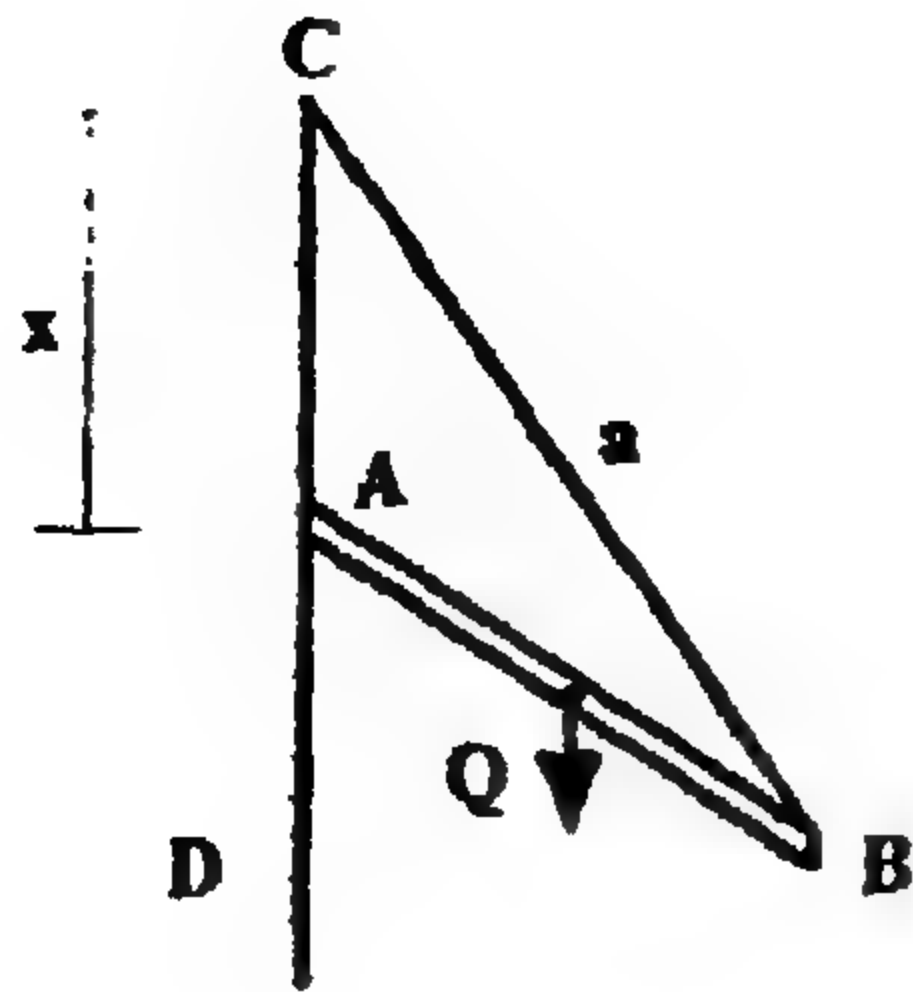
الجواب



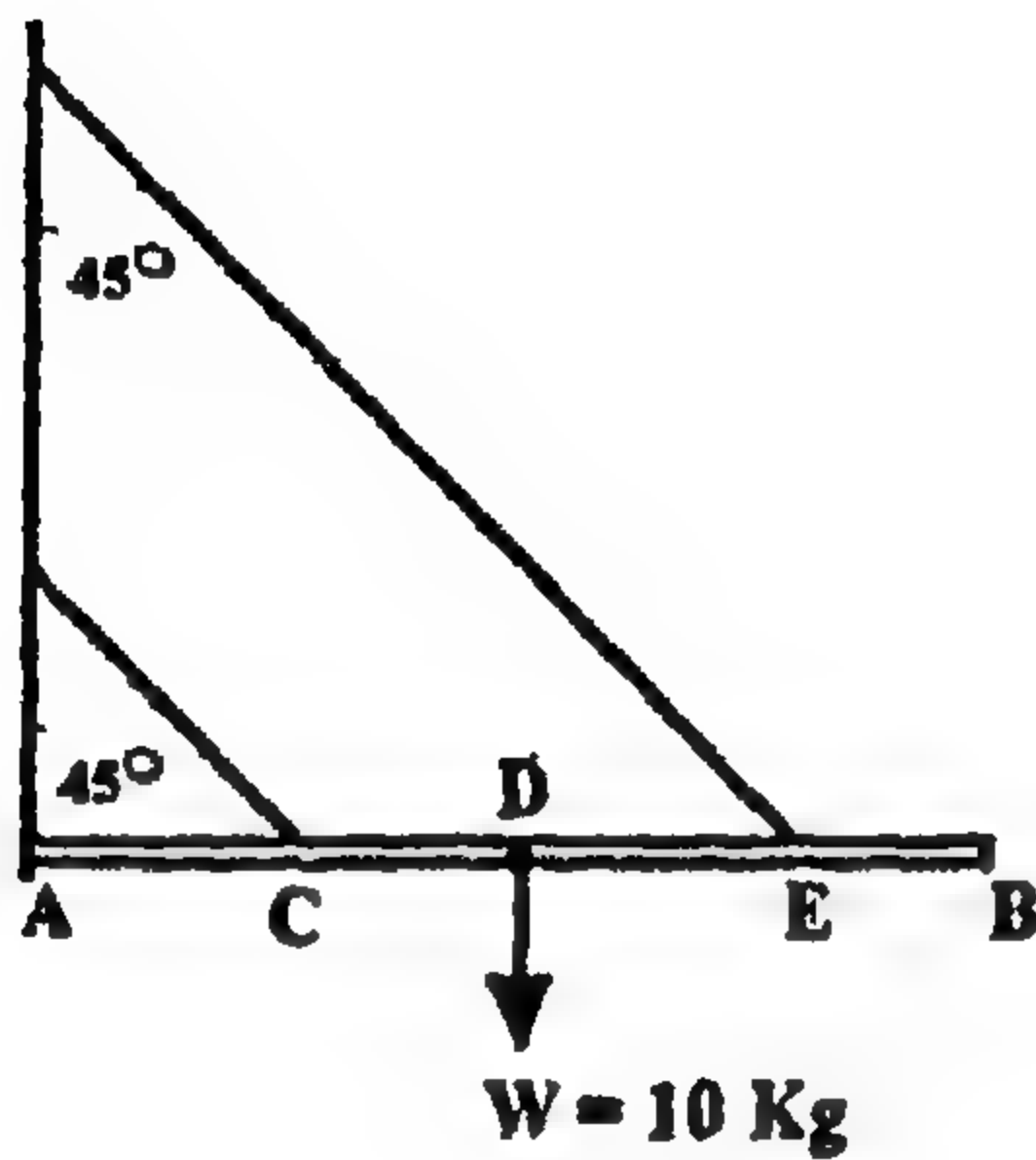
٢ - عين ردود فعل مرتكزي العنبر A B القوى بالكجم و الأبعاد بالمتر ، و ذلك بالطرق التحليلية و البيانية .

الجواب  $[R_A = 180 \text{ Kg} , R_B = 365 \text{ Kg}]$

٣- قضيب منتظم  $AB$  وزنه  $Q$ ، و طوله  $l$  محمول في إحدى نهايته  $B$  بخيط  $BC$  طوله  $a$  و يرتكز أيضا في  $A$  الموجودة رأسيا أسفل  $C$  على حائط رأسي أملس كما في الشكل . أوجد وضع الإتزان الممكن للقضيب بدلالة الطول  $x$  .



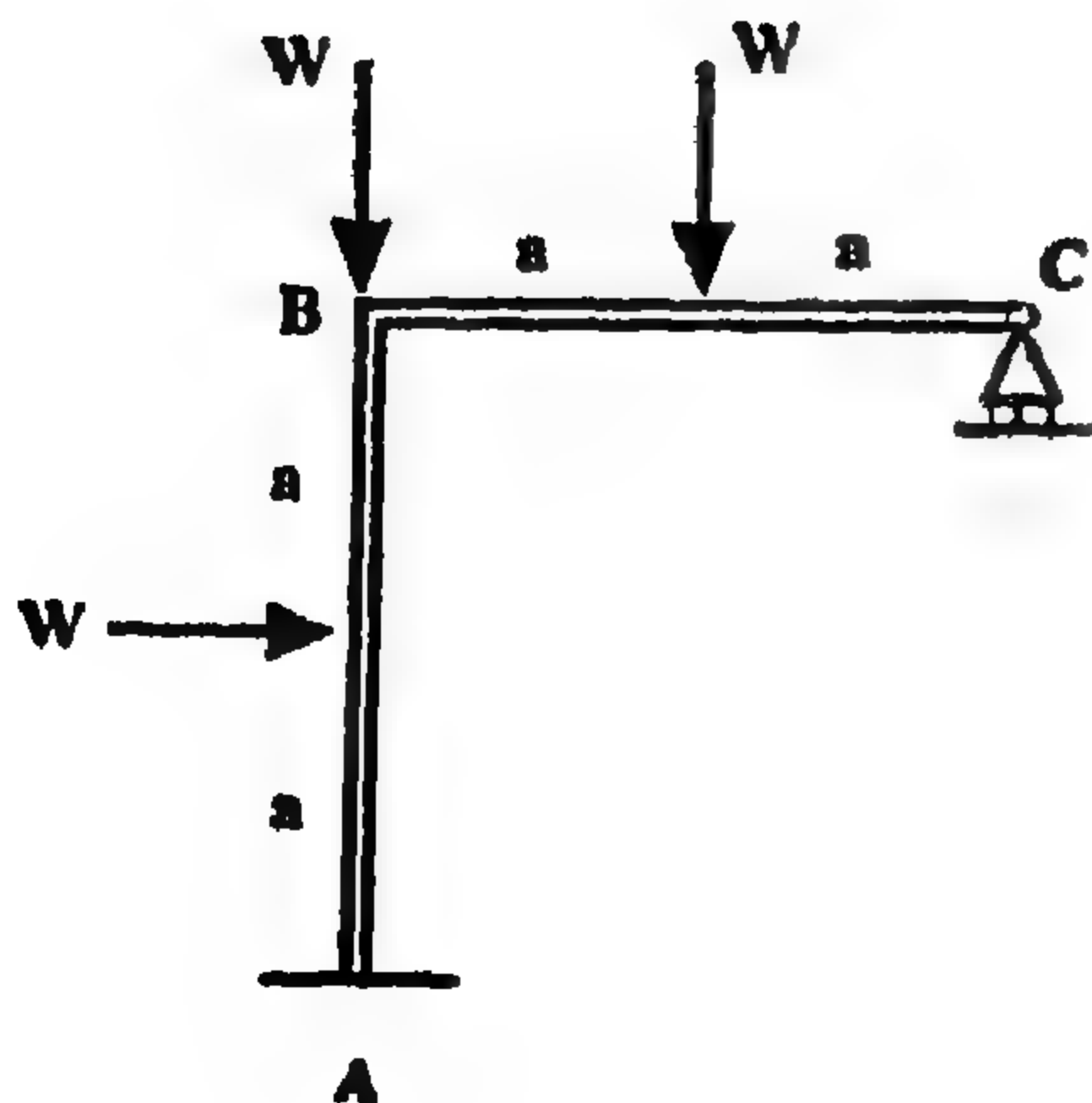
الجواب  $\left[ x = \sqrt{(a^2 - l^2)/3} \right]$



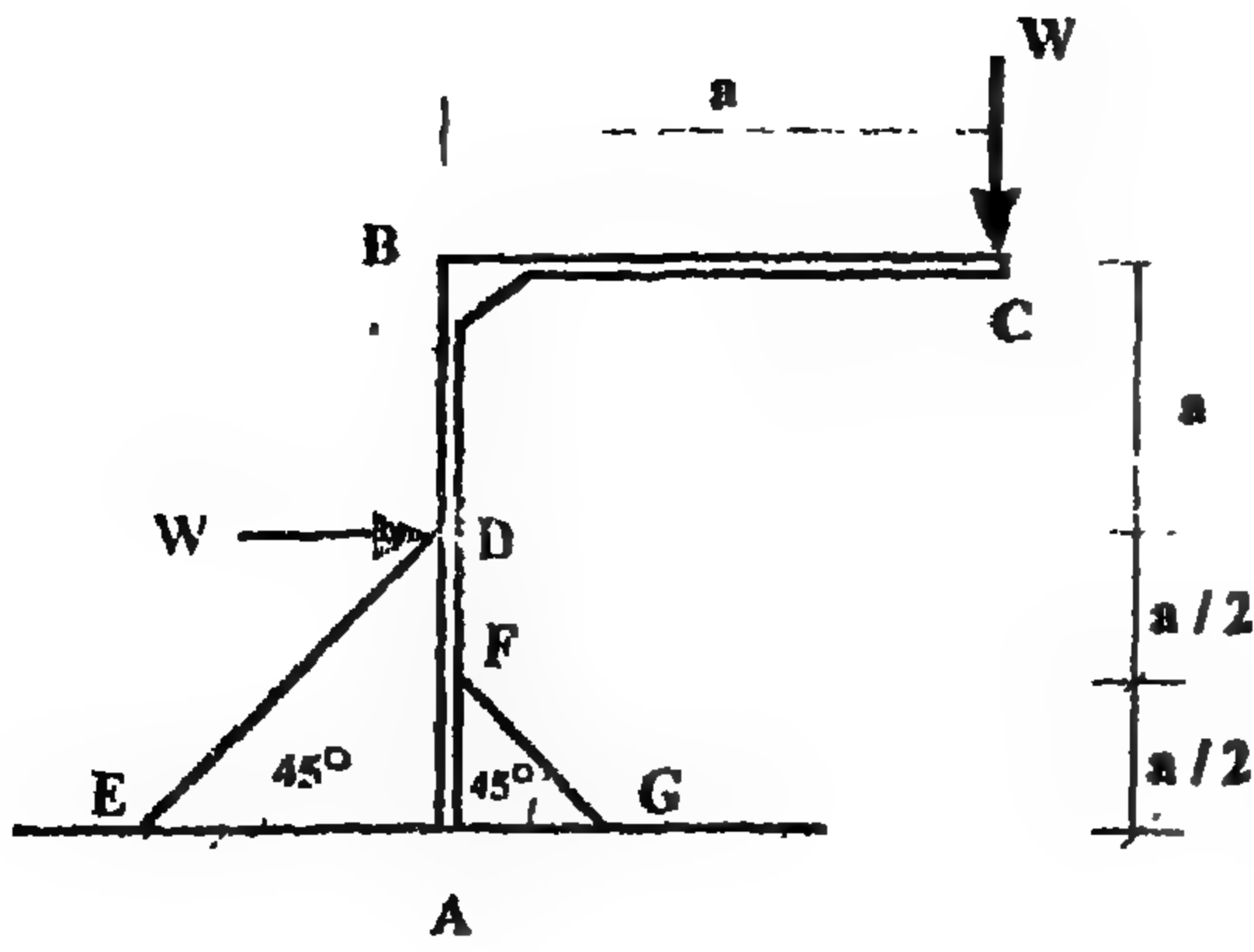
٤- قضيب منتظم  $AB$  وزنه  $10$  كجم معلق في وضع أفقي على حائط رأسي أملس . و يربطه الى الحائط خيطان كما في الشكل . عين رد فعل الحائط عند  $A$  وشدي الخيطين .

علما بأن طول  $AB = 4$  م

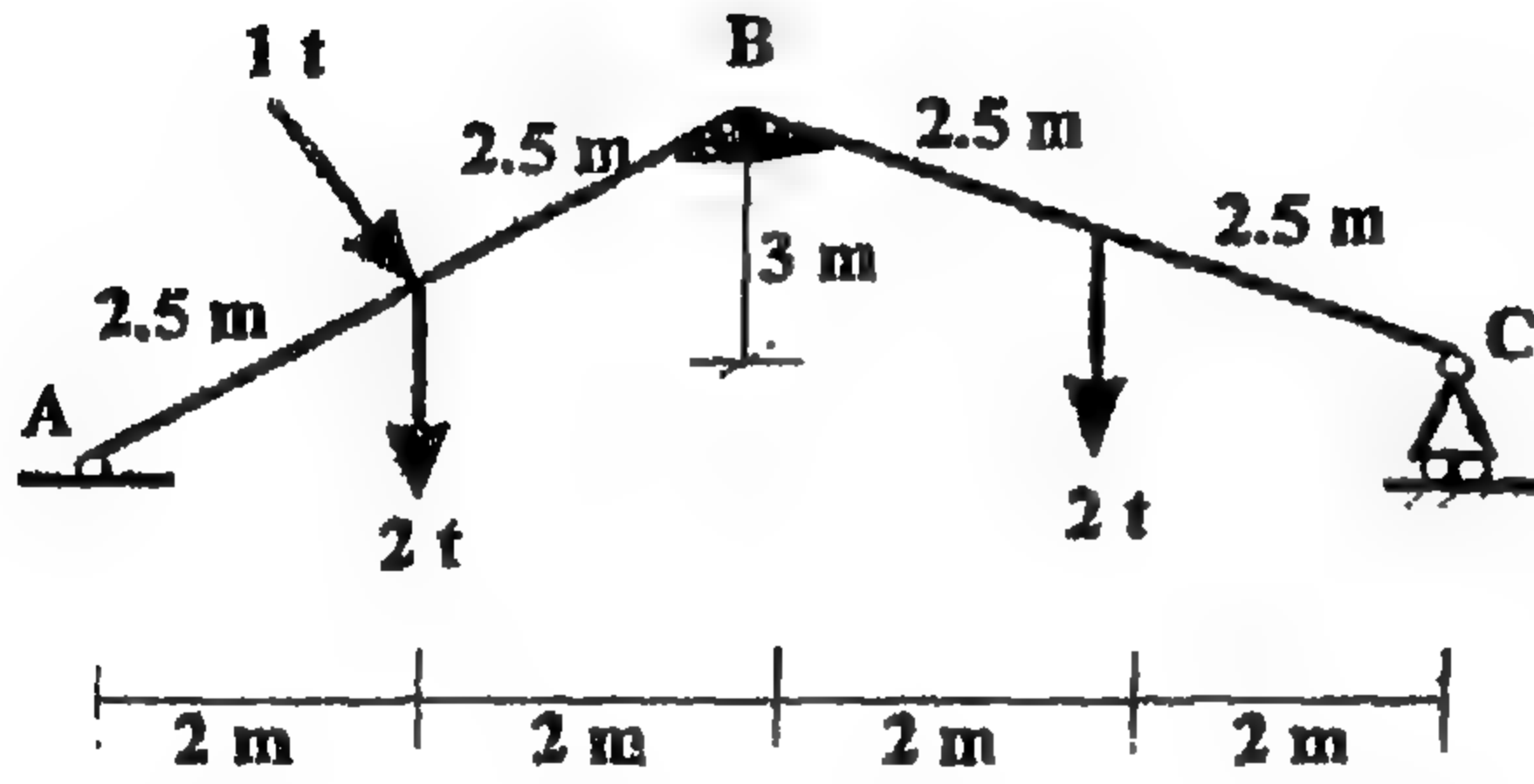
و أن  $AC = CD = DE = EB = 1$  m



٥- الجسم المتناسك  $ABC$  يرتكز مفصليا في  $A$  و ارتكاز حرا في  $C$  ، عين ردي الفعل في  $A$  ،  $C$  و ذلك تحليليا و بيانيا .



٦- ABC جسم متماسك خفيف قائم الزاوية في B يرتكز بطرفه A على أرض ملساء و ضلعه AB رأسي و يشده إلى الأرض شدادان ED ، EG كما في الشكل . أوجد شديهما ورد فعل الأرض في A نتيجة لتأثير القوتين الموضحتين .

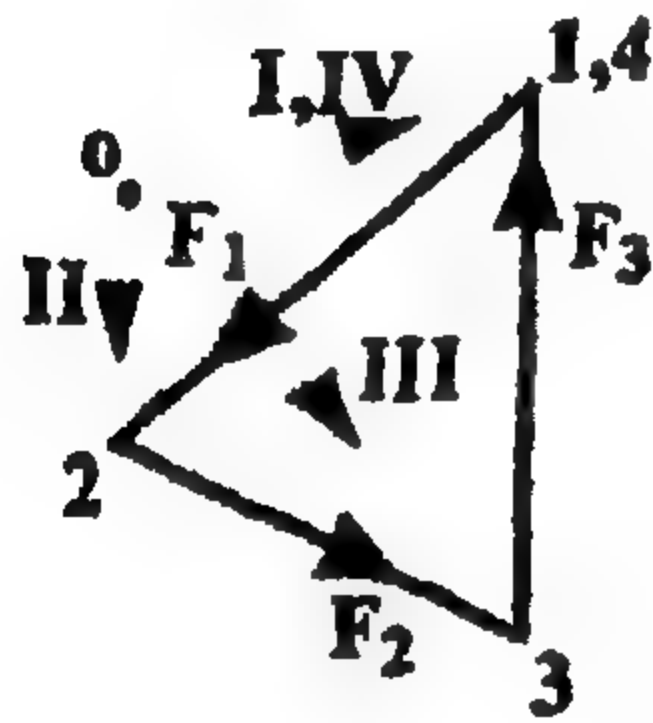


٧- ABC هيكل متماسك مثبت مفصلياً في A و يرتكز ارتكازاً حراً في C و يحمل الأحمال الموضحة بالشكل . أحسب ردود الفعل في A ، C .

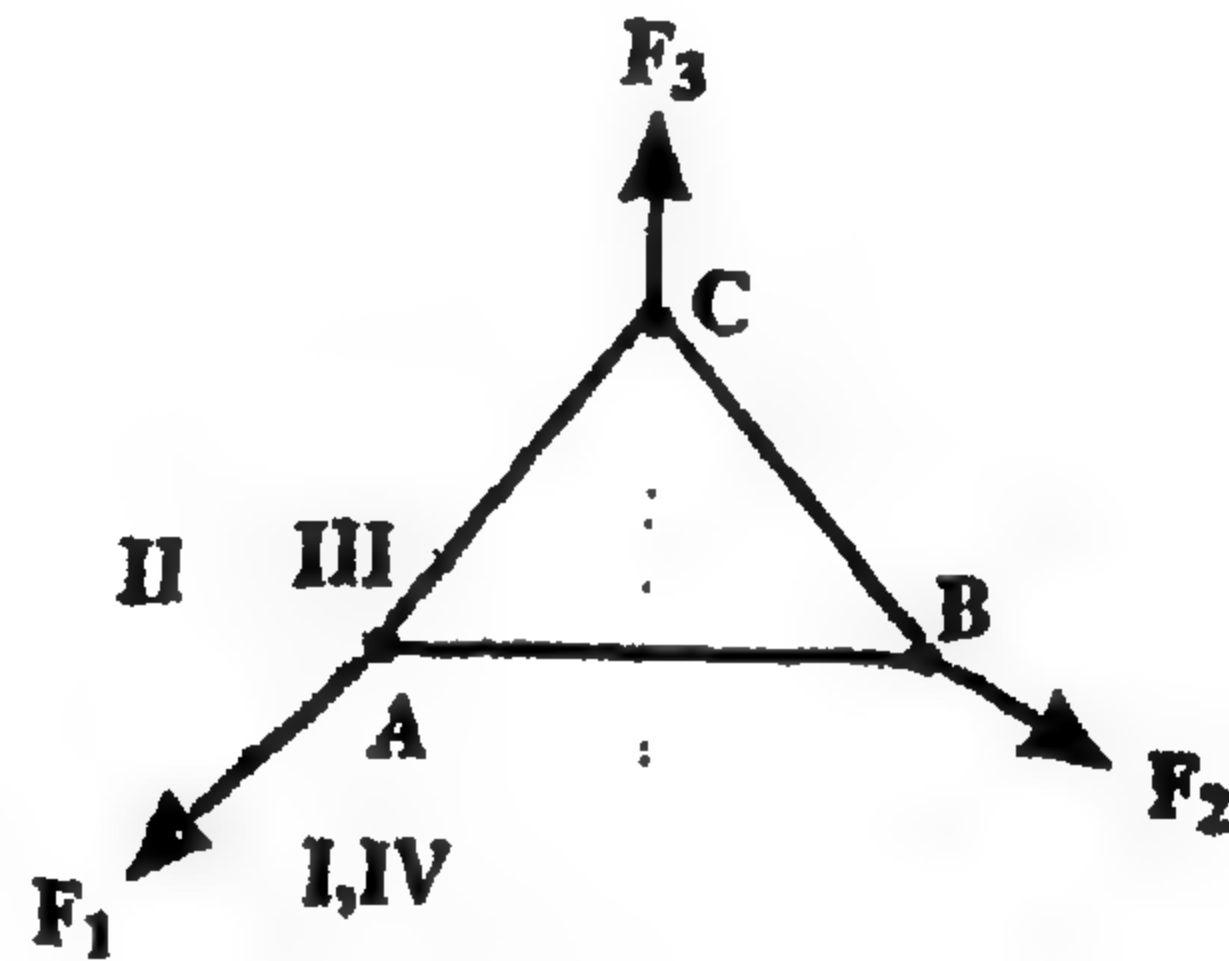
## إتزان مجموعة الجسيمات

إذا اتصلت مجموعة من الجسيمات المترنة فيما بينها بأعضاء خفيفة و أثرت القوى الخارجية على الجسيمات فقط دون الأعضاء فإن المجموعة ككل تزن تحت تأثير القوى الخارجية فقط بينما يتزن كل جسيم على حده تحت تأثير القوى الخارجية المؤثرة عليه فضلاً على ردود الأفعال للأعضاء الخفيفة التي يتصل بها و هي القوى المحورية في هذه الأعضاء .

و إتزان الجسم أو المجموعة ككل لها ثلاثة شروط تحليلية لإتزان القوى الخارجية على المجموعة و بيانياً يجب أن تمثل بمضلع قوى مقفل و مضلع جهلي مقفل كما في الشكل ( ٥ - أ ، ب ) .



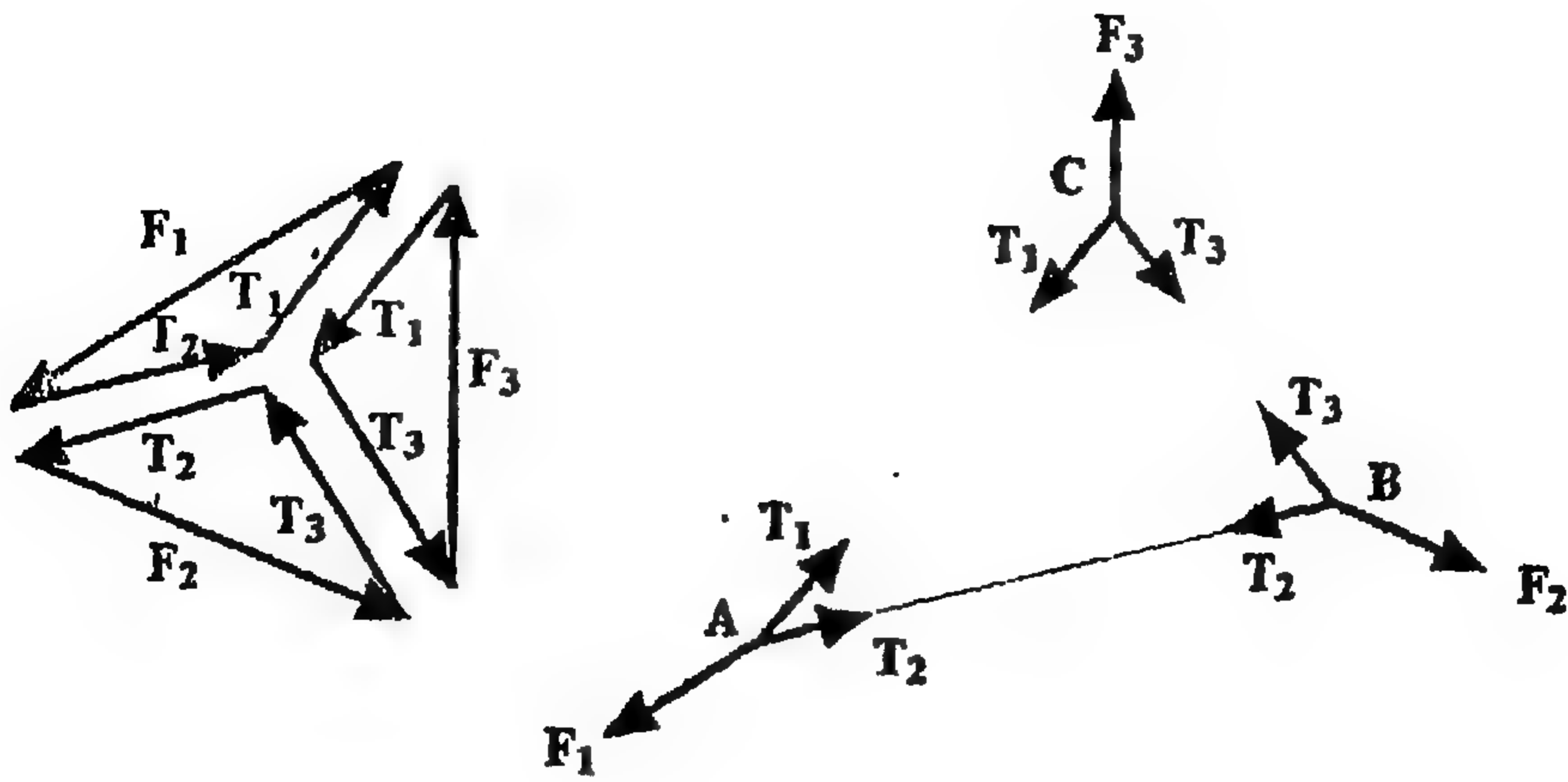
شكل ( ٥ - ب ) مضلع القوى مقفل



شكل ( ٥ - أ ) المضلع الجهلي مقفل

إتزان الجسم يتحقق بشرطين تحليليين فقط و بيانياً بشرط واحد فقط هو مضلع قوى مقفل للقوى الخارجية و القوى المحورية .

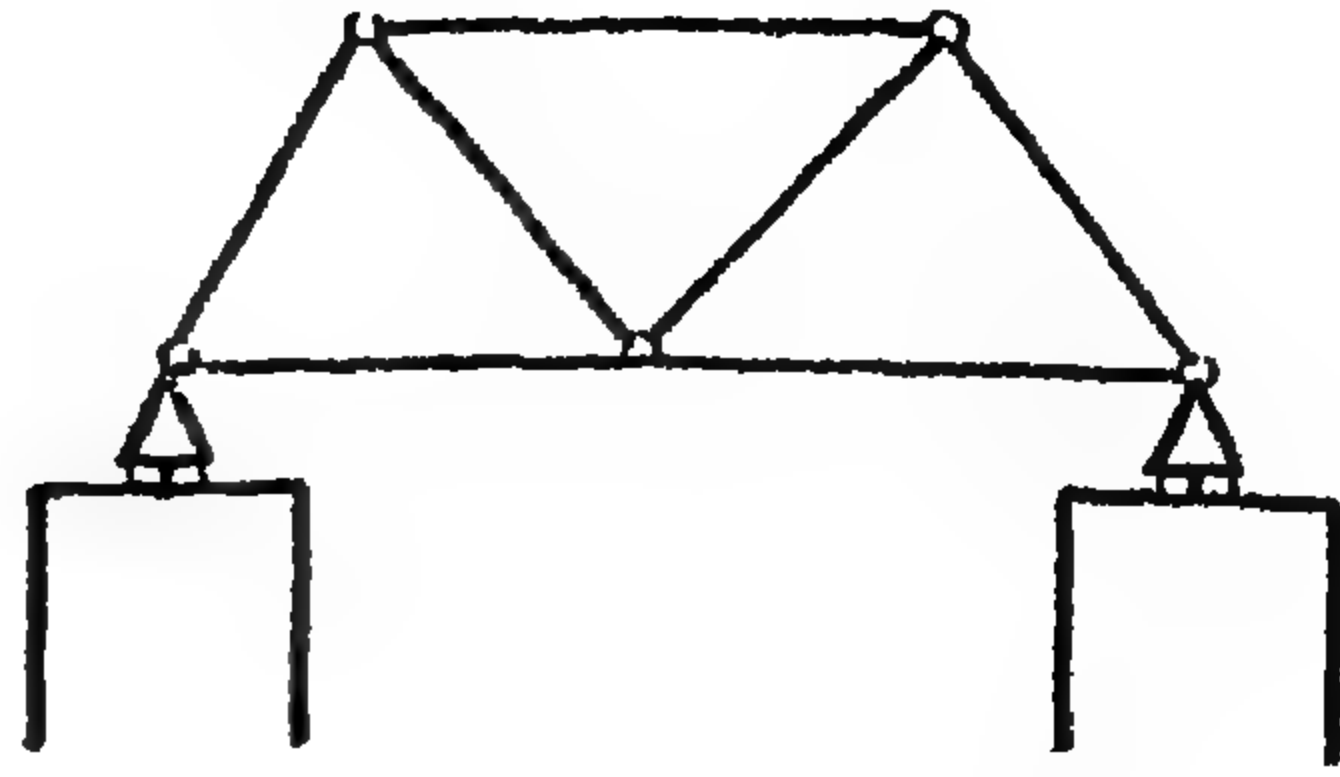
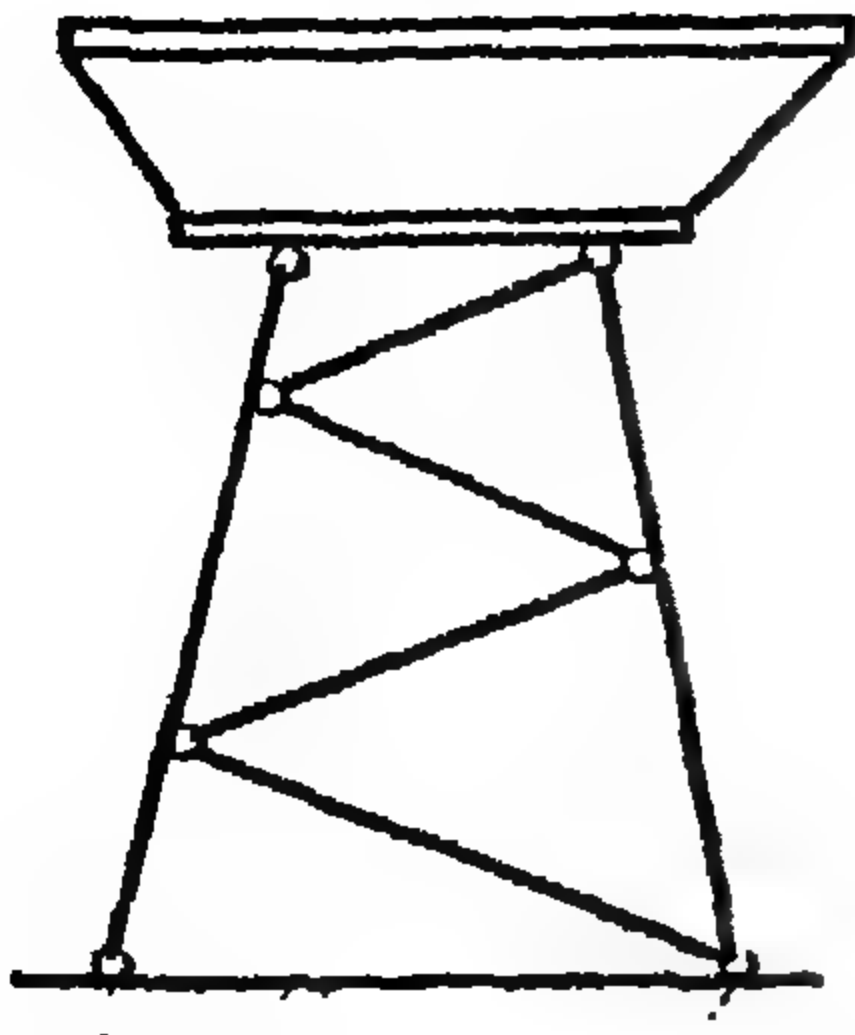




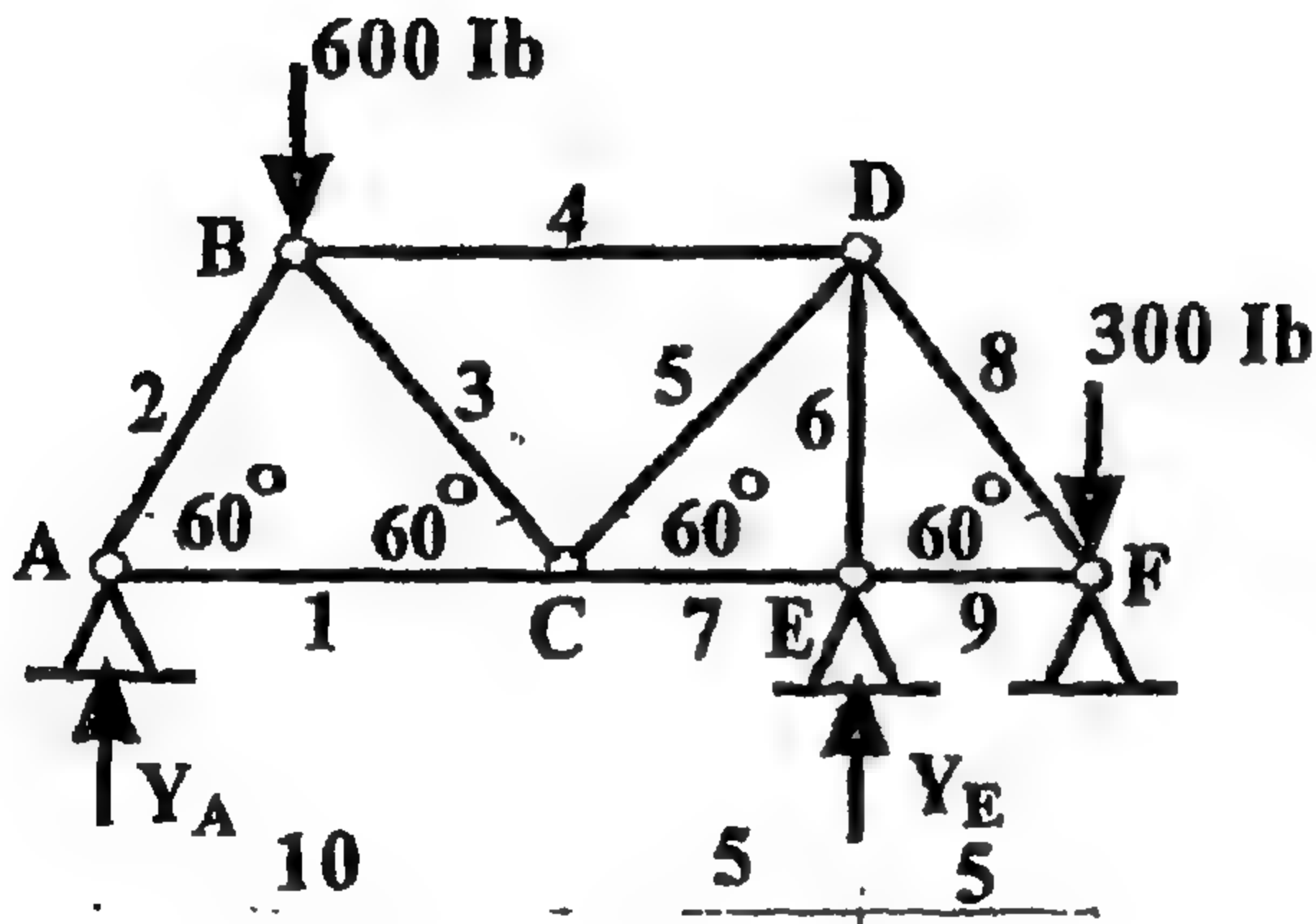
## الهياكل المحملة بالمفاصل ( الجمالونات أو الشبكيات

### Trusses :

تتكون الهياكل الإنشائية المستخدمة في الكبارى و الأبراج المعدنية العالية من مجموعة من القضبان المستقيمة الخفيفة الوزن بالنسبة لأحمال الواقعة على الهياكل ، و تتصل تلك القضبان مع بعضها البعض عن طريق مفاصل ملساء بقدر الإمكان و تسمى القضبان بأعضاء الهيكل . و يلاحظ أن الأحمال التي تؤثر على الهيكل تقع مباشرة على المفصل . و لذا فإن أعضاء الهيكل تعتبر خفيفة و غير محملة فتعمل أما سواند أو شدادات أي أنها أعضاء مضغوطة أى ضاغطة للمفصل أو أعضاء مشدودة أى تعمل كشداد للمفصل . و من حيث الدراسة الإستاتيكية فإنه يمكن اعتبار مفاصل الهيكل مجموعة من الجسيمات المتزنة تحت تأثير الأحمال الخارجية و قوى الشد أو الضغط ( القوى المحورية ) الناتجة من الأعضاء المتصلة بالمفاصل . و أبسط وحدة هندسية من عدة خلايا مثلثة . و نظرا لأن الأحمال الخارجية المؤثرة على هذه الهياكل تؤثر على المفاصل فقط فيطلق عليها بالهياكل المحملة بالمفاصل . و لهذا فيدرس اتزان كل مفصل باعتباره جسيم واقع تحت تأثير مجموعة من القوى المتتيه في المفصل ذاته و هذه القوى تتألف من الأحمال الخارجية و كذا ردود فعل الأعضاء المتصلة بالمفاصل من شدود أو ضغوط .



## أمثلة



مثال ١:

في الهيكل المفصلي المبين بالشكل أوجد جميع القوى المحورية في جميع أعضاء الهيكل:

الحل:

بدراسة اتزان المجموعة ككل يتم الحصول على  $y_A$  ،  $y_E$  كما يلي :

$$\sum M_A = 0$$

$$y_E \times 15 - 300 \times 20 - 600 \times 5 = 0$$

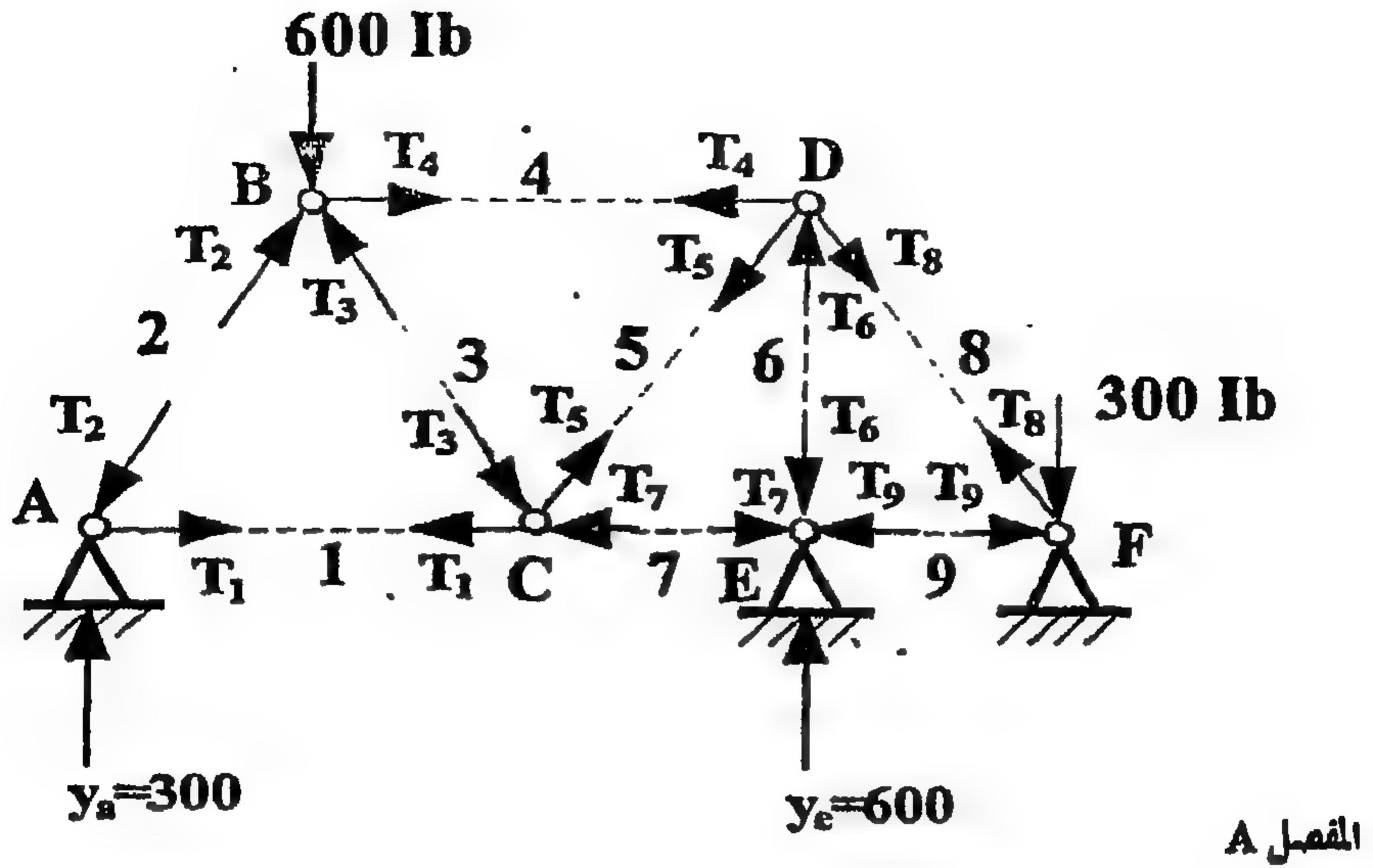
$$y_E = 600 \text{ lb}$$

$$\sum M_E = 0$$

$$y_A \times 15 = 600 \times 10 - 300 \times 5 = 0$$

$$y_A = 300 \text{ lb}$$

ثم بدراسة كل مفصل على حده :



$$\sum y = 0$$

$$300 - T_2 \sin 60 = 0$$

$$T_2 = 346 \text{ lb} \quad \text{قوة ضغط}$$

$$\sum x = 0$$

$$T_1 - T_2 \cos 60 = 0$$

$$T_1 = 173 \text{ lb} \quad \text{قوة شد}$$

مفصل B

$$\sum y = 0$$

$$T_2 \sin 60 + T_3 \sin 60 - 600 = 0$$

$$T_3 = 346 \text{ lb} \quad \text{قوة ضغط}$$

$$\sum x = 0$$

$$T_4 + 346 \cos 60 - 346 \cos 60 = 0$$

$$T_4 = 0 \text{ lb}$$

$$\sum x = 0$$

$$T_4 + 346 \cos 60 - 346 \cos 60 = 0$$

$$T_4 = 0 \text{ lb}$$

مفصل C

$$\sum y = 0$$

$$T_3 \sin 60 - T_5 \sin 60 = 0$$

$$T_3 = 346 \text{ lb} \quad \text{قوة شد}$$

$$\sum x = 0$$

$$T_3 \cos 60 + T_5 \cos 60 - T_7 - T_1 = 0$$

$$T_7 = 173 \text{ lb} \quad \text{قوة ضغط}$$

مفصل D

$$\sum y = 0$$

$$T_5 \sin 60 + T_8 \sin 60 - T_6 = 0$$

$$\sum x = 0$$

$$T_8 \cos 60 - T_5 \cos 60 - T_4 = 0$$

$$T_8 = 346 \text{ lb} \quad \text{قوة شد}$$

$$T_6 = 600 \text{ lb} \quad \text{قوة ضغط}$$

المفصل E

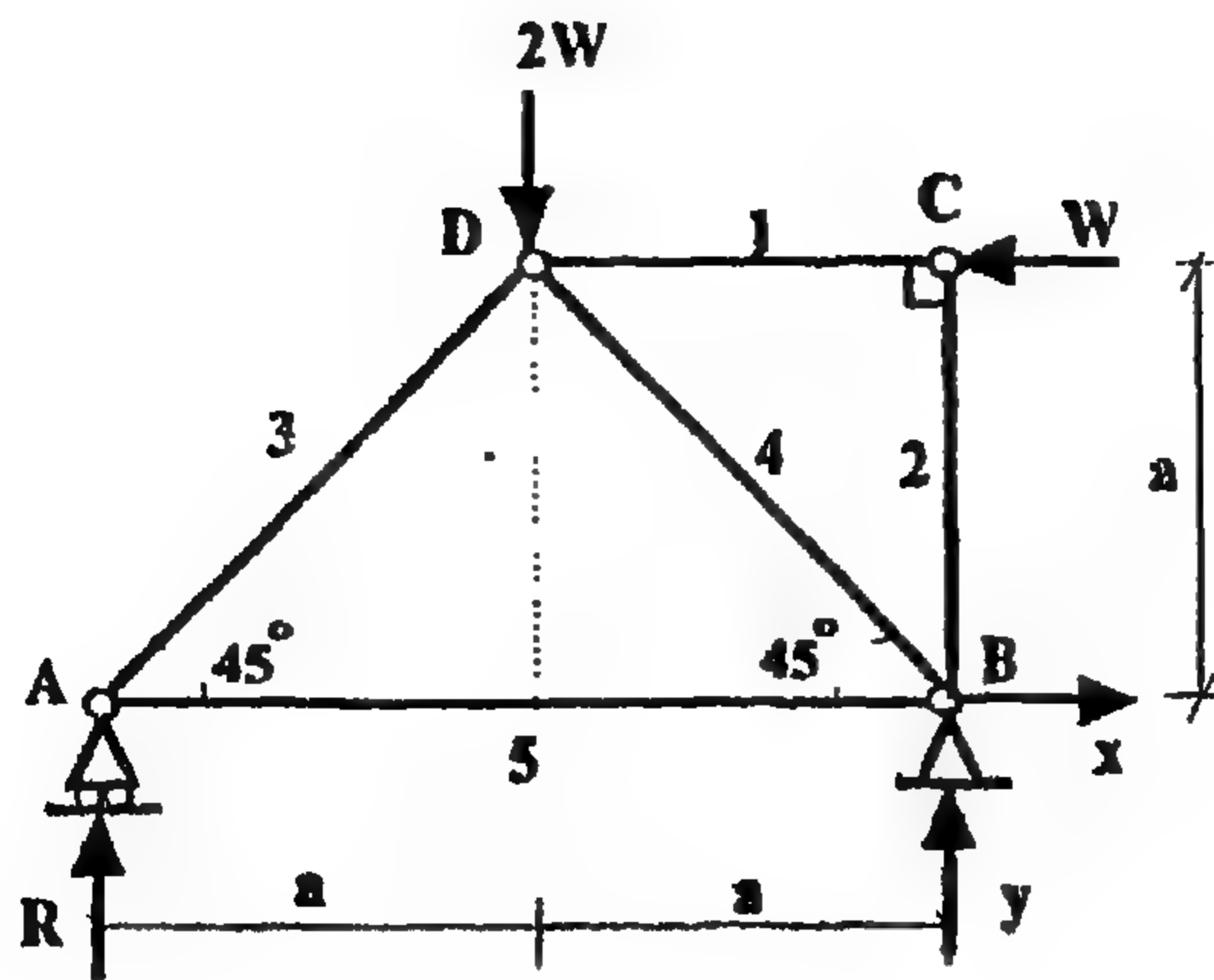
$$\sum x = 0$$

$$T_7 - T_9 = 0$$

$$T_9 = 173 \text{ lb} \quad \text{قوة ضغط}$$

مثال ٢:

المبكل المفصلي المبين يوتكز ارتكاز بسيط في A و على مفصل ثابت B أوجد ردي فعل المرتكزين و القوى المحورية في القضبان.



الحل :

بدراسة اتران المجموعة ككل يتم الحصول على  $x$  ،  $y$  ،  $R$  وذلك باخذ العزوم حول B

$$\Sigma M_B = 0$$

$$Wa + 2Wa - R2a = 0$$

$$R = \frac{3}{2} W$$

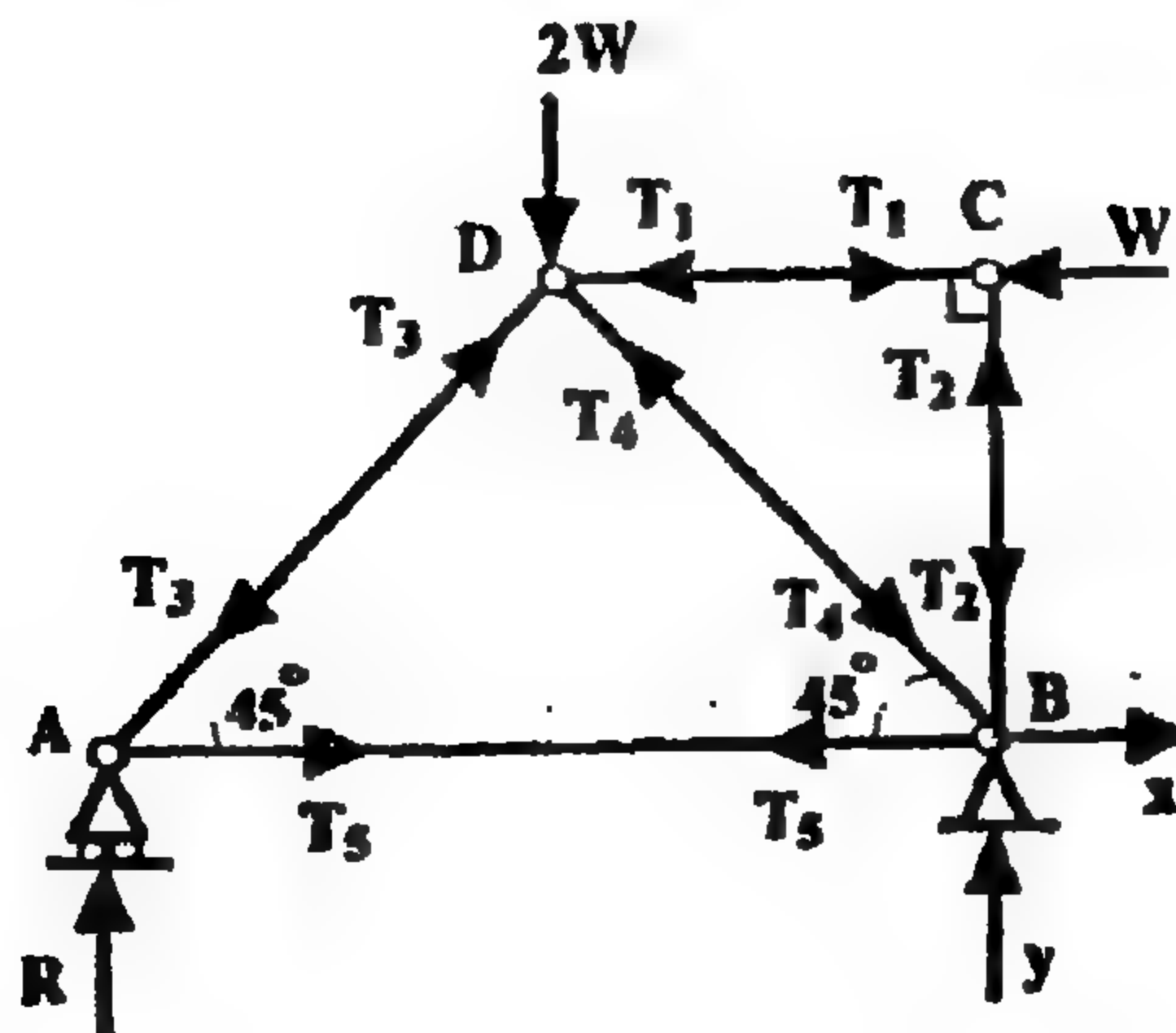
$$\Sigma x = 0$$

$$X = W$$

$$\Sigma y = 0$$

$$Y = 2W - 1.5W$$

$$= 0.5W$$



$$\Sigma x = 0$$

$$T_1 - W = 0$$

$$T_1 = W$$

$$\Sigma y = 0$$

$$T_2 = 0$$

### اتزان المفصل D

$$\Sigma x = 0$$

$$T_3 \cos 45 - T_1 - T_4 \cos 45 = 0$$

$$\frac{T_3}{\sqrt{2}} - \frac{T_4}{\sqrt{2}} = W$$

$$\Sigma y = 0$$

$$\frac{T_3}{\sqrt{2}} + \frac{T_4}{\sqrt{2}} = 2W$$

من المعادلتين السابقتين نجد أن :

$$T_3 = \frac{3W}{\sqrt{2}} \quad , \quad T_4 = \frac{W}{\sqrt{2}}$$

### اتزان المفصل A

$$\Sigma x = 0$$

$$T_5 - \frac{T_3}{\sqrt{2}} = 0$$

$$T_5 = \frac{T_3}{\sqrt{2}} = \frac{3W}{2}$$

و لما سبق يمكن تلخيص خطوات الحل فيما يلي :

## خطوات حل المسائل المتعلقة بإتزان الجسيمات

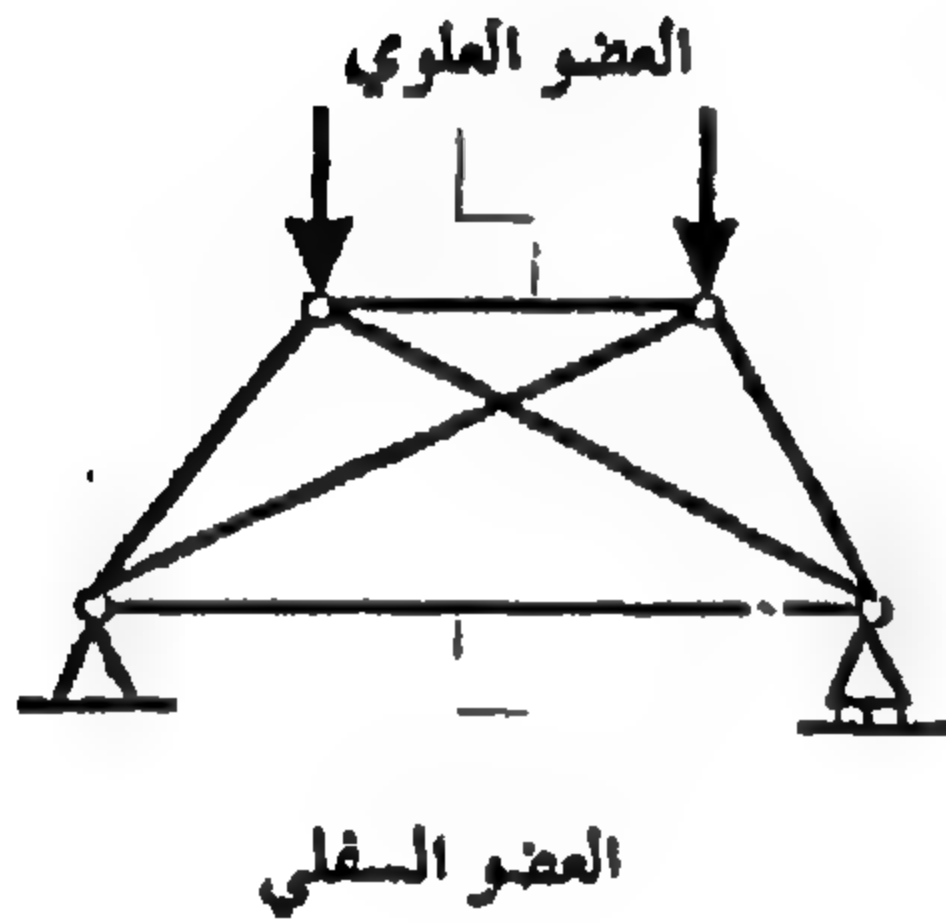
١ - يأخذ إتزان المجموعة ككل كما لو كانت جسم واحد متماسك و نعين من إتزانه ردود الأفعال الخارجية و ذلك بتطبيق "  $\sum M = 0$  و  $\sum F_y = 0$  و  $\sum F_x = 0$  مع ملاحظة أنه لا تظهر القوى المحورية في الهيكل "

٢ - يؤخذ إتزان عدد من الجسيمات كل منها على حده بما يعطي عدد من المعادلات مساويا لعدد المجاهيل .

أ - و يفضل أن نبدأ بجسيم يلتقي فيه مجهولان فقط أو أقل .

ب - ثم نسلسل من الجسيم الأول الى جسيم آخر لا يزيد مجاهيله عن اثنين و هكذا "...." الجسيم هو المفصل " علما بأنه في إتزان الجسيم يطبق  $\sum F_y = 0$  و  $\sum F_x = 0$  .

٣ - نتأكد من الحل بأن أي مفصل من المفاصل في حالة إتزان .



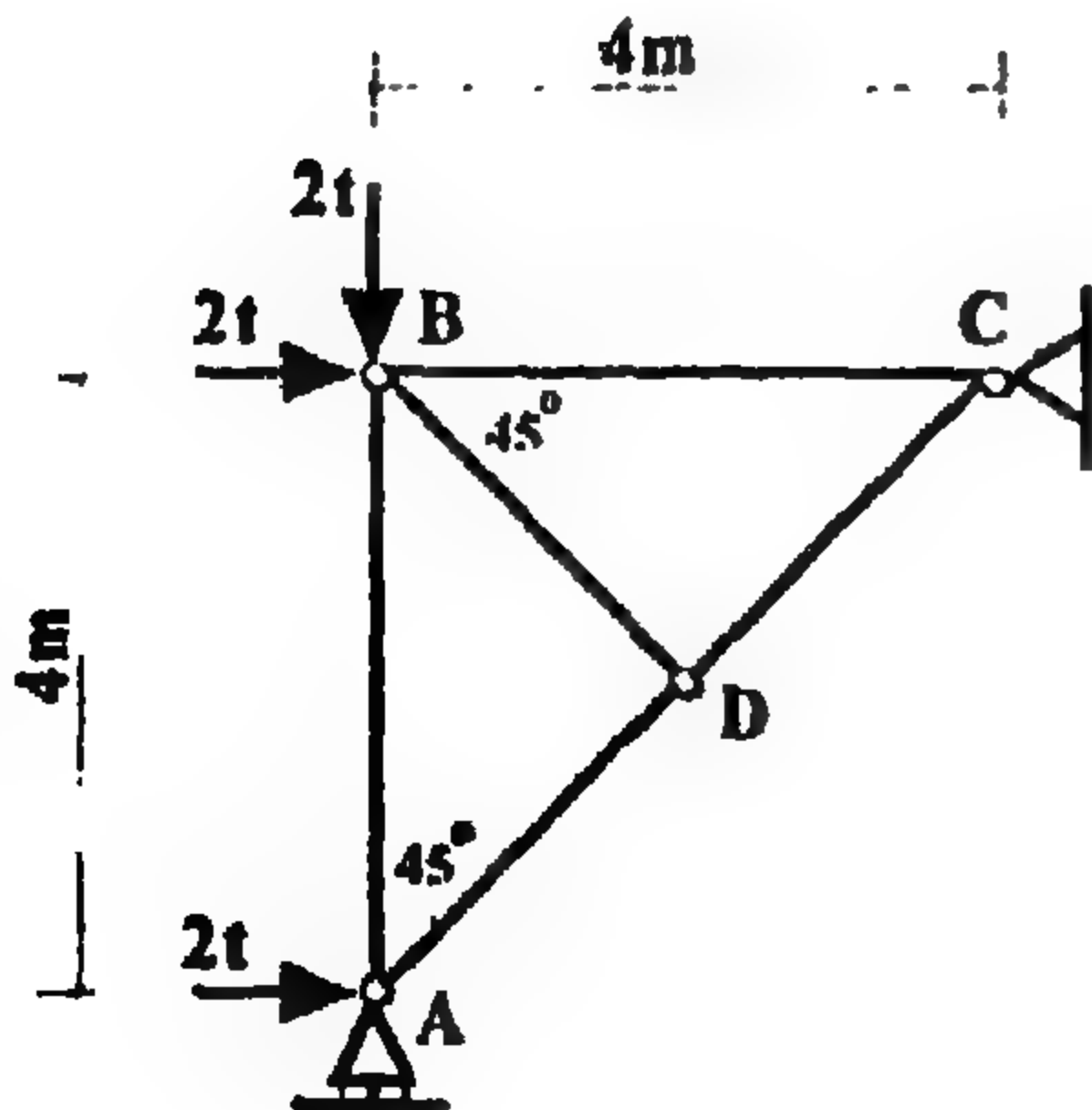
ملاحظة : يجب أن نتذكر قانون الفعل ورد الفعل عند الانتقال من جسيم إلى جسيم آخر .

ملاحظة : غالبا في الجمالونات " Trusses "

المضغ الخفيف العلوي غالبا ما يكون ضغط

المضغ الخفيف السفلي غالبا ما يكون شد

مثال ٣ :



هيكل مفصلي يحمل المفاصل و يرتكز على

ركائز خارجية.

١ - عين ردود فعل الارتكاز عند A و C .

٢ - عين القوى المحورية في القضبان الخفيفة AB و

AC و DC و BC .



الحل:

١ - يأخذ اتزان الهيكل ككل كأنه جسم متماسك و نعين من اتزانه ردود الأفعال الخارجية (لا تظهر القوى المحورية في الهيكل).

$$\Sigma M_C = 0$$

$$2(4) + 2(4) - N_A(4) = 0$$

$$N_A = 4 \text{ t}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

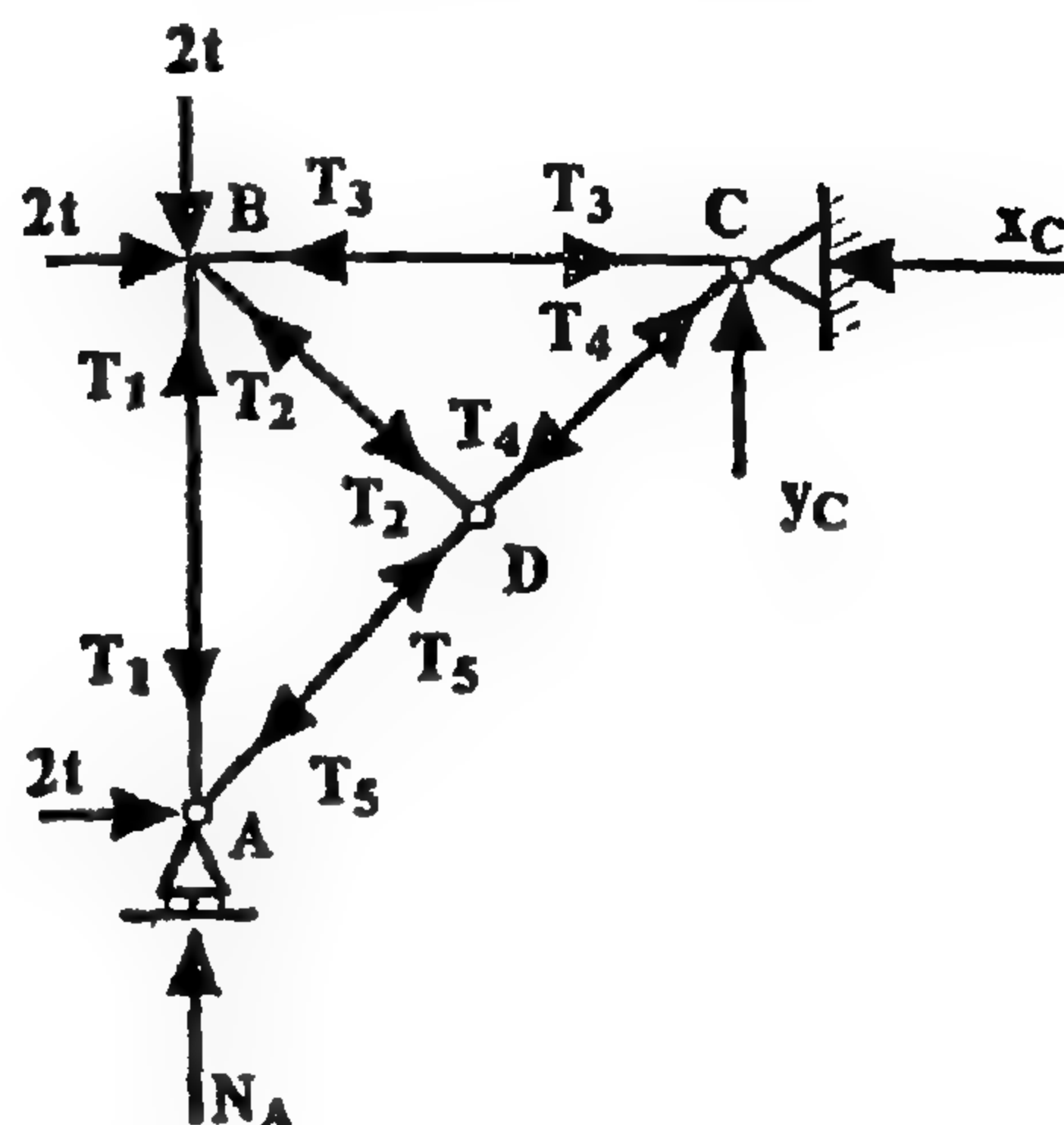
$$2 - x_C + 2 = 0$$

$$x_C = 4 \text{ t}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_A - 2 + y_C = 0$$

$$y_C = -2 \text{ t}$$



٢ - للحصول على القوى المحورية للقطبان الخفيفة ، نأخذ اتزان المفصل كل على حده باعتبار أن كل مفصل جسم متزن .

المفصل A

$$\Sigma F_x = 0$$

$$2 - T_5 \sin 45 = 0$$

$$T_5 = 2\sqrt{2} \cdot t$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_A - T_1 - T_5 \sin 45 = 0$$

$$4 - T_1 - 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$T_1 = 2t$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_1 - 2 + T_2 \sin 45 = 0$$

$$2 - 2 + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$T_2 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$y_C + T_4 \sin 45 = 0$$

$$-2 + \frac{T_4}{\sqrt{2}} = 0$$

$$T_4 = 2\sqrt{2} \text{ t}$$

٣ - وللتأكد من الإجابة : نجري الإتران على أي مفصل من المفصل .

إتران المفصل D :

Check :

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \frac{T_1}{\sqrt{2}} + \frac{T_3}{\sqrt{2}} - \frac{T_4}{\sqrt{2}} \\ &= 0 + \frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned}$$

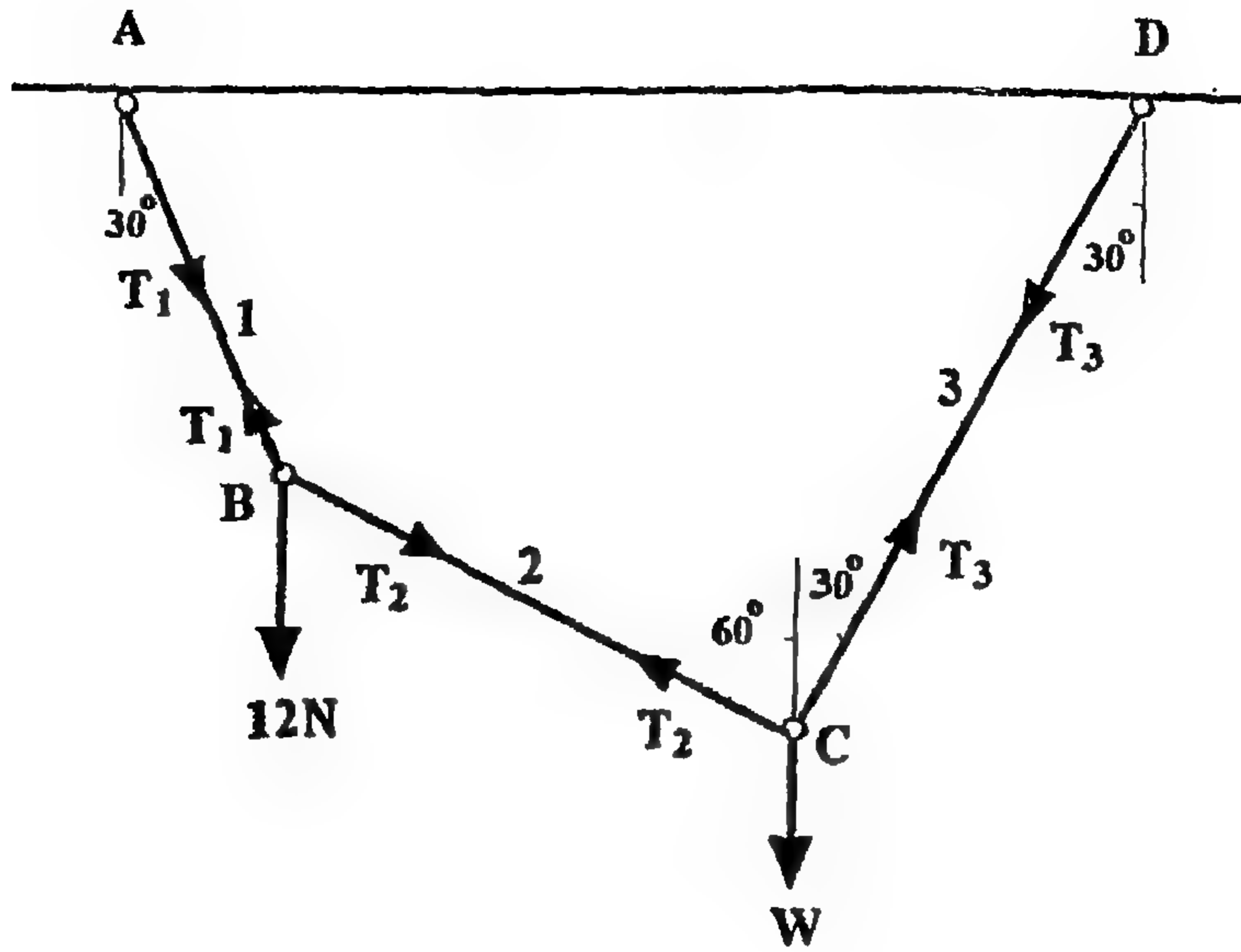
$$\Sigma F_y = 0$$

الناتج  $T_2$  و  $T_5$  و  $T_4$  صحيحة .

مثال ٤ :

خيط عفيف ABCD يحمل ثقلين أحدهما قيمته ( ١٢ نيوتن ) في B ، الآخر W في C ، و كانت اجزاء الخيط AB ، BC ، CD تميل على الرأسى بزاوية ٣٠ ، ٦٠ ، ٣٠ على الترتيب .

أوجد W و الشد في أجزاء الخيط الثلاثة .



الحل :

دراسة اتزان العقدة " B " : بتطبيق قاعدة لامي

$$\frac{12}{\sin 150} = \frac{T_1}{\sin 60} = \frac{T_2}{\sin 150}$$

$$T_1 = \frac{12 \sin 60}{\sin 150} = 12\sqrt{3} \text{ N}$$

$$T_2 = \frac{12 \sin 150}{\sin 150} = 12 \text{ N}$$

دراسة اتزان العقدة " C " : بتطبيق قاعدة لامي

$$\frac{12}{\sin 150} = \frac{T_3}{\sin 120} = \frac{W}{\sin 90}$$

$$T_3 = 12\sqrt{3} \text{ N}$$

$$W = 24 \text{ N}$$

## التمائل الإستاتيكي حول محور :

يلزم أن تتوفر فيه شرطين :

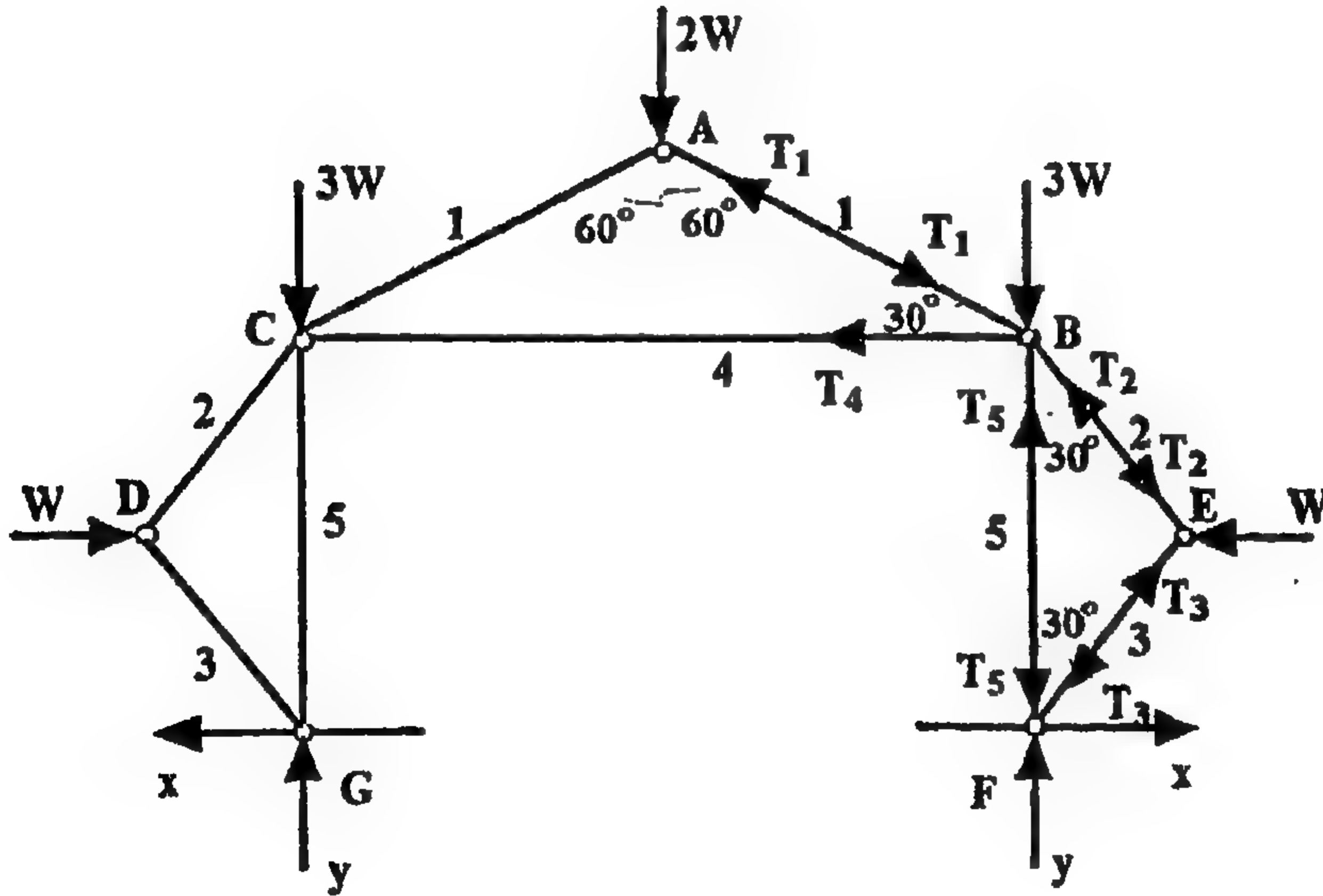
أ - تماثل هندسي ( زوايا و أبعاد ) .

ب - تماثل في القوى .

\* في هذه الحالة يكفي بأخذ اتزان نصف المجموعة فقط مع مراعاة أن نتيجة للتماثل يتبع ذلك تماثل في ردود الأفعال .

مثال ١ :

عين القوى المحورية و كذلك ردود فعل المفصلين F و G في الهيكل المحمل المفاصل المبين بالشكل تحليليا و بيانيا .



الحل :

أولا تحليليا :

∴ هناك تماثل هندسي ، تماثل للقوى .

∴ تماثل القوى المحورية في الأعضاء المتناظرة على جانبي محور التماثل .

∴ أنه لم يعطى أبعاد الهيكل لاستخدام اتزان الجسم ككل أولا .

نبدا بدراسة اتزان المفصل التي لايزيد عدد القوى المجهولة فيها عن اثنان .

اتزان المفصل A .

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_1 \cos 60 + T_1 \cos 60 - 2W = 0$$

$$T_1 = 2W$$

اتزان المفصل E

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_3 \cos 30 - T_2 \cos 30 = 0$$

$$T_3 = T_2$$

$$\Sigma X = 0$$

$$T_2 \cos 60 + T_3 \cos 60 - W = 0$$

$$\frac{T_2}{2} + \frac{T_3}{2} - W = 0$$

$$T_2 = T_3 = W$$

اتزان المفصل B

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\therefore T_1 \cos 30 - T_2 \sin 30 - T_4 = 0$$

$$T_4 = \left( \sqrt{3} - \frac{1}{2} \right) W$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_5 + T_2 \cos 30 - T_1 \sin 30 - 3W = 0$$

$$T_5 = \left(4 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) W$$

اتزان المفصل F

$$\Sigma F_x = 0$$

$$X - T_3 \sin 30 = 0$$

$$X = \frac{W}{2}$$

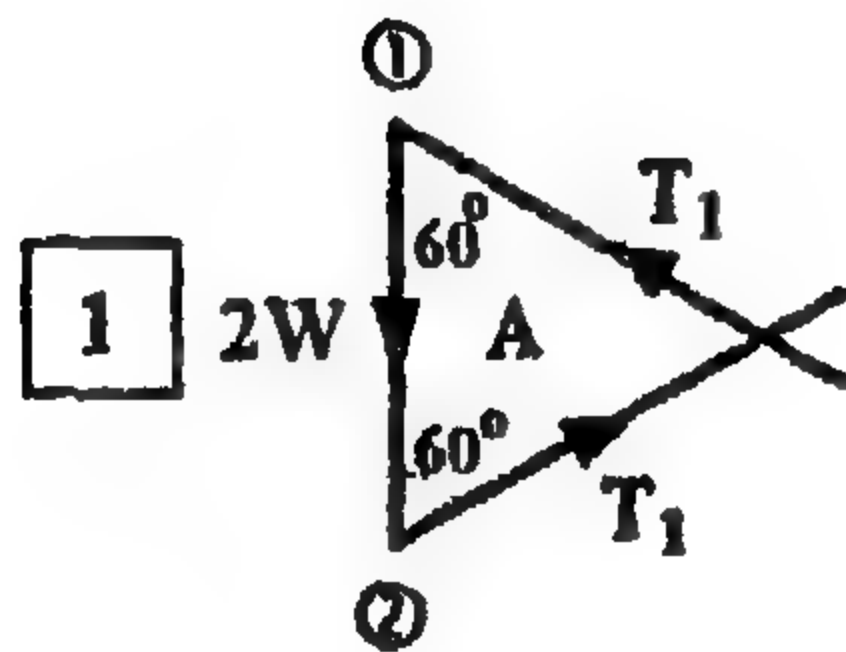
$$\Sigma F_y = 0$$

$$Y - T_5 - T_3 \cos 30 = 0$$

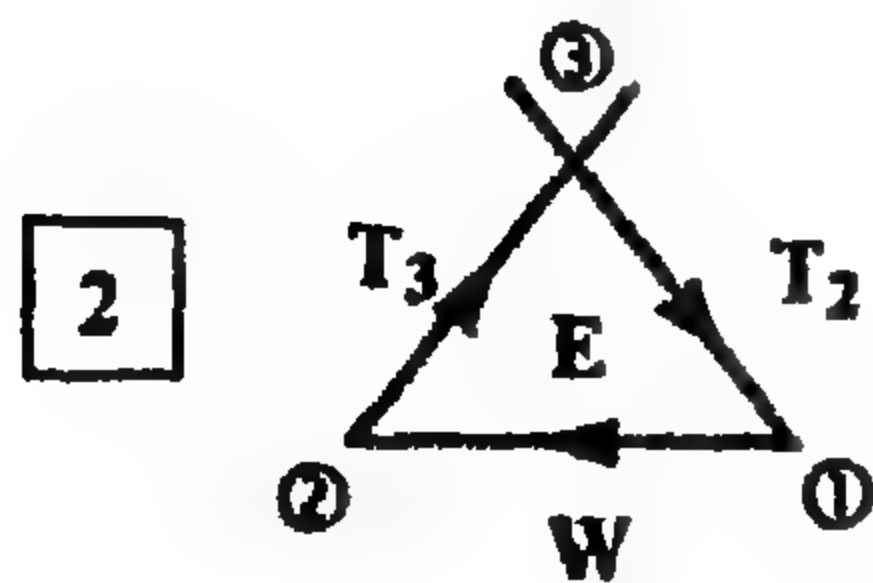
$$Y = 4W$$

ثانياً بيانياً :

برسم مقياس رسم القوى  $1 \text{ cm} = W$

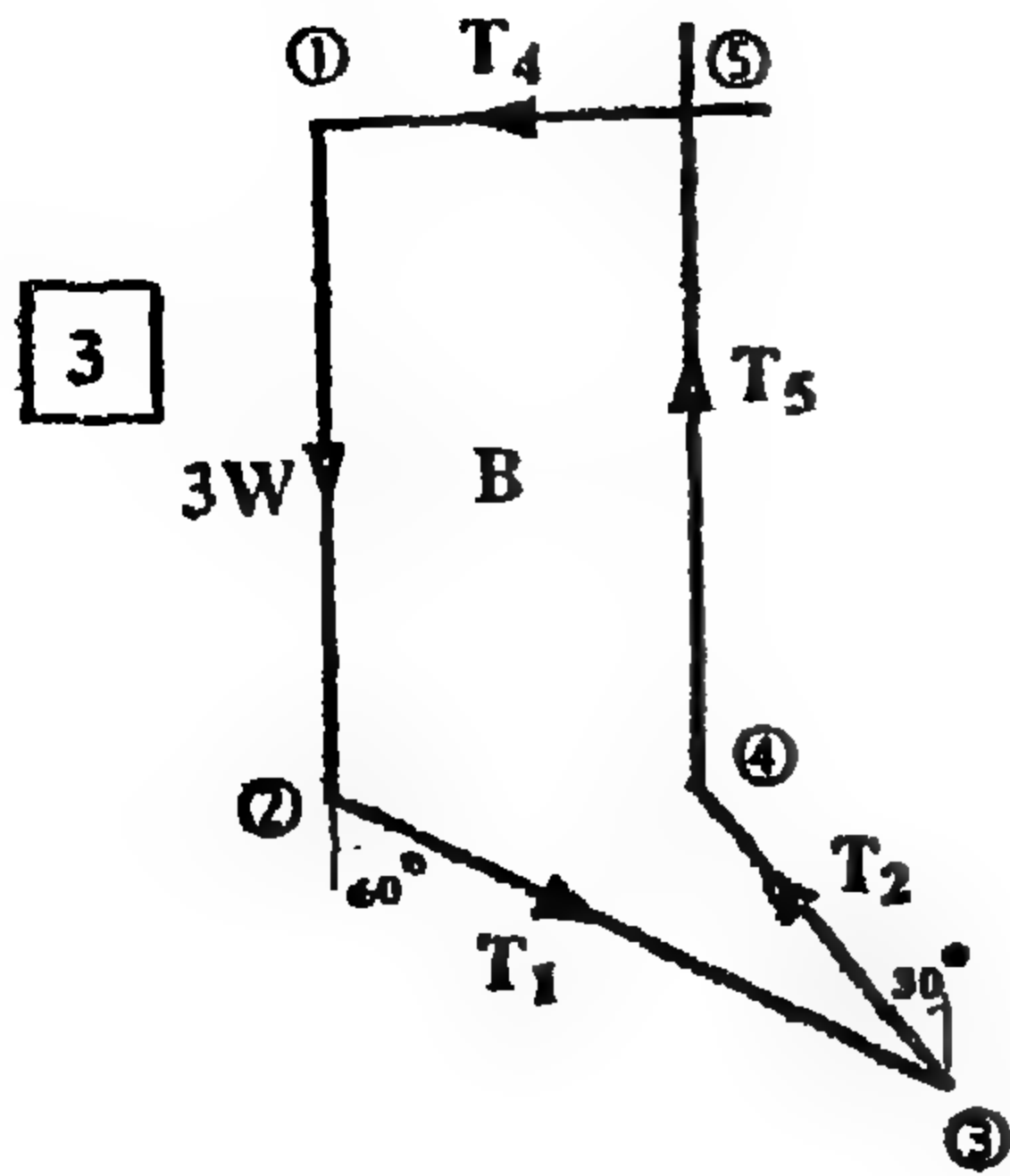


$$T_1 = 2 \text{ cm} \times \frac{W}{1 \text{ cm}} = 2W$$



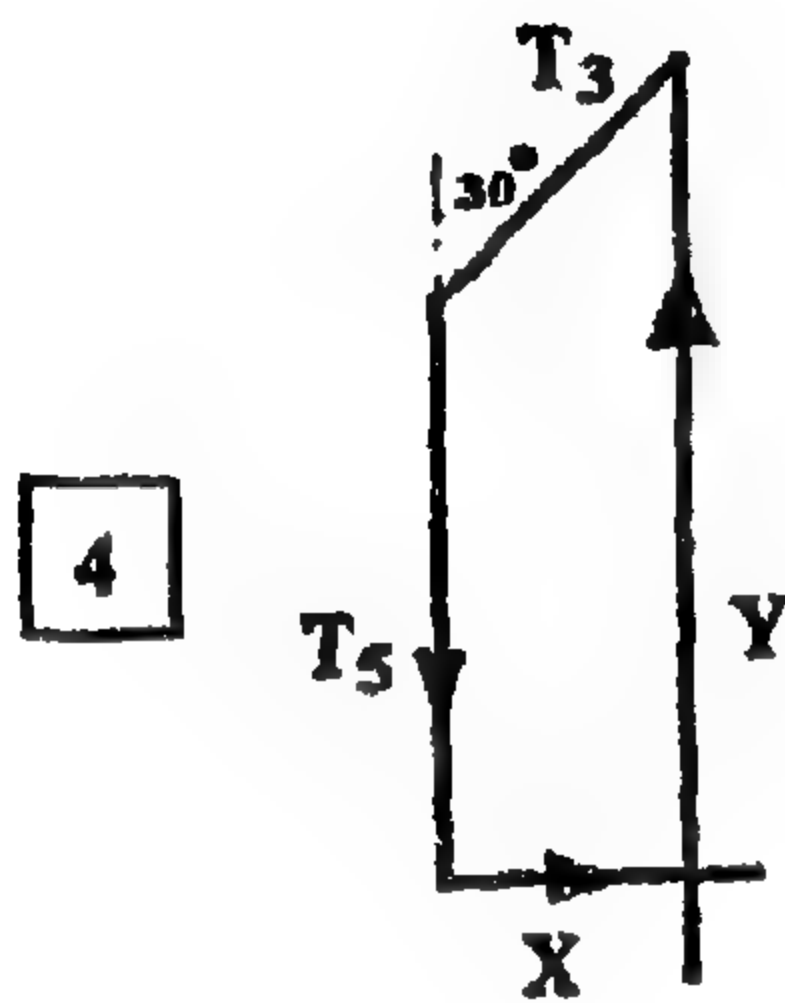
$$T_3 = 1 \text{ cm} \times \frac{W}{1 \text{ cm}} = W$$

$$T_2 = 1 \text{ cm} \times \frac{W}{1 \text{ cm}} = W$$



$$T_5 = 3.15 \text{ cm} \times \frac{W}{1 \text{ cm}} = 3.15W$$

$$T_4 = 1.2 \text{ cm} \times \frac{W}{1 \text{ cm}} = 1.2W$$

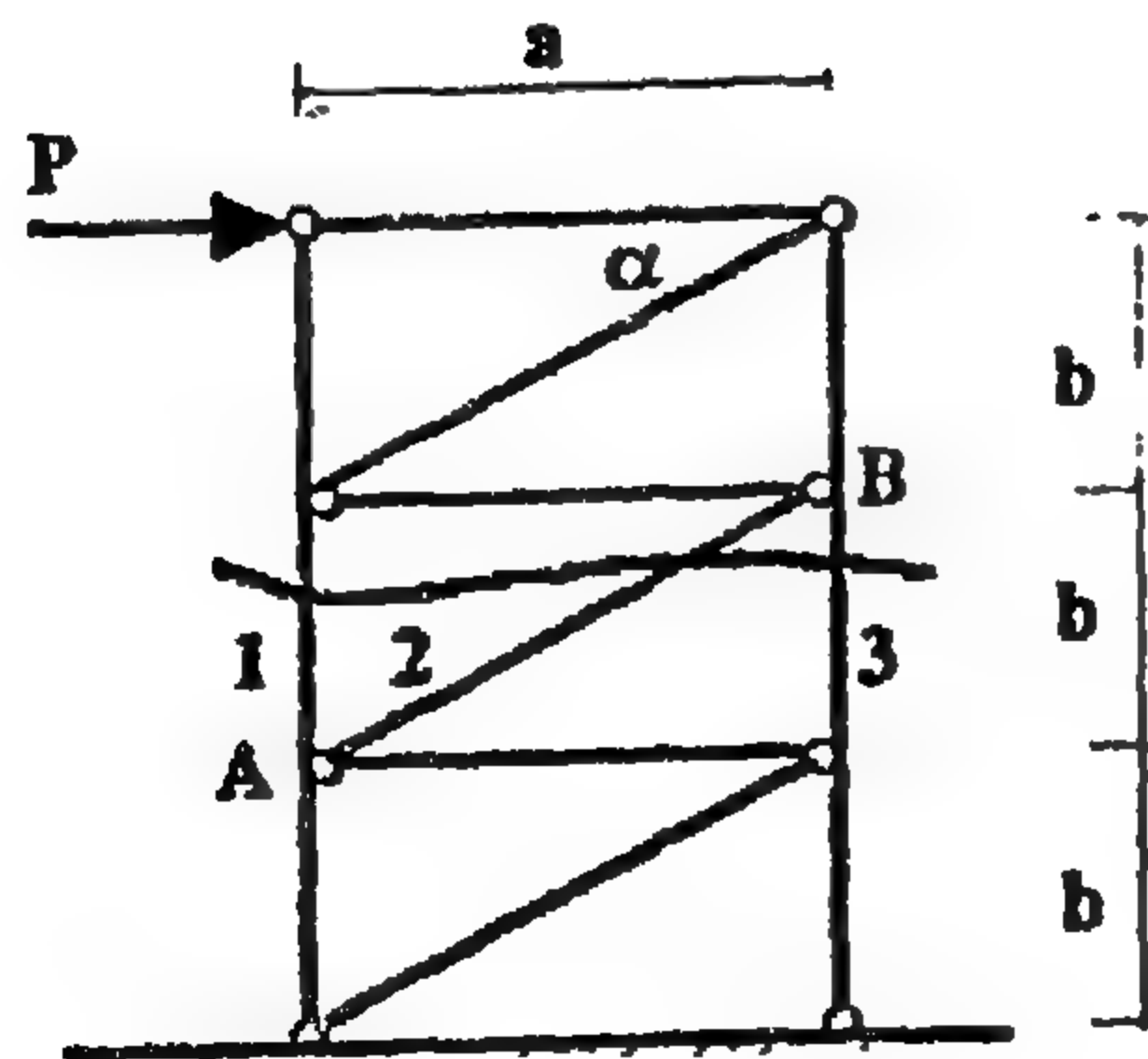


$$X = 0.5 \text{ cm} \times \frac{W}{1 \text{ cm}} = 0.5W$$

$$Y = 4 \text{ cm} \times \frac{W}{1 \text{ cm}} = 4W$$

مثال ٢ :

عين القوى المحورية في الأعضاء ١ ، ٢ ، ٣ .





الحل :

لتعين القوى المحورية المطلوبة نتخيل مستوى قاطع للقضبان الثلاثة .  
دراسة اتزان المستطيل العلوى

$$\sum M_B = 0$$

$$T_1(a) - P(b) = 0$$

$$T_1 = \frac{b}{a} P$$

$$\sum M_A = 0$$

$$T_3(a) - P(2b) = 0$$

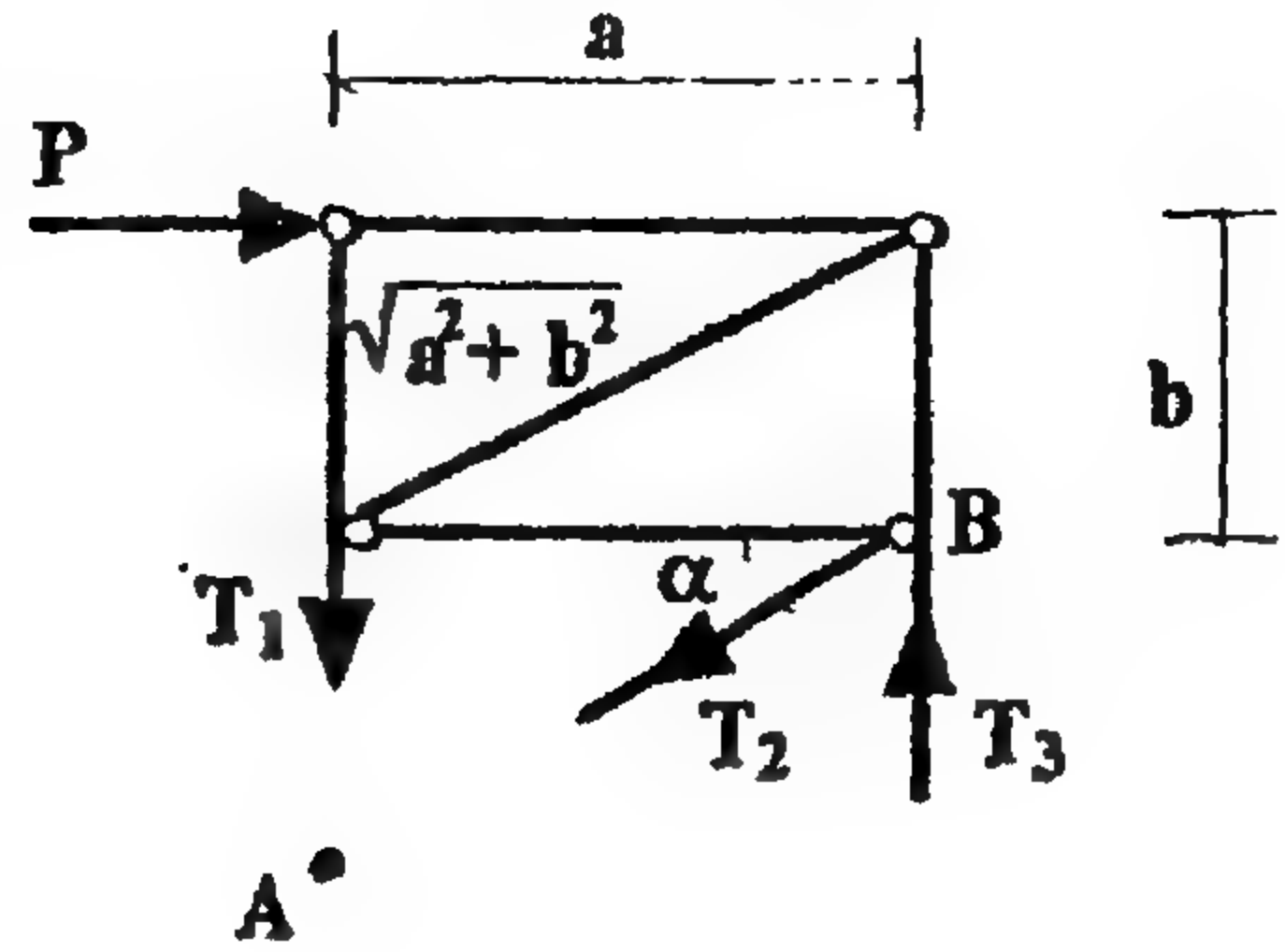
$$T_3 = \frac{2b}{a} P$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-T_2 \cos \alpha + P = 0$$

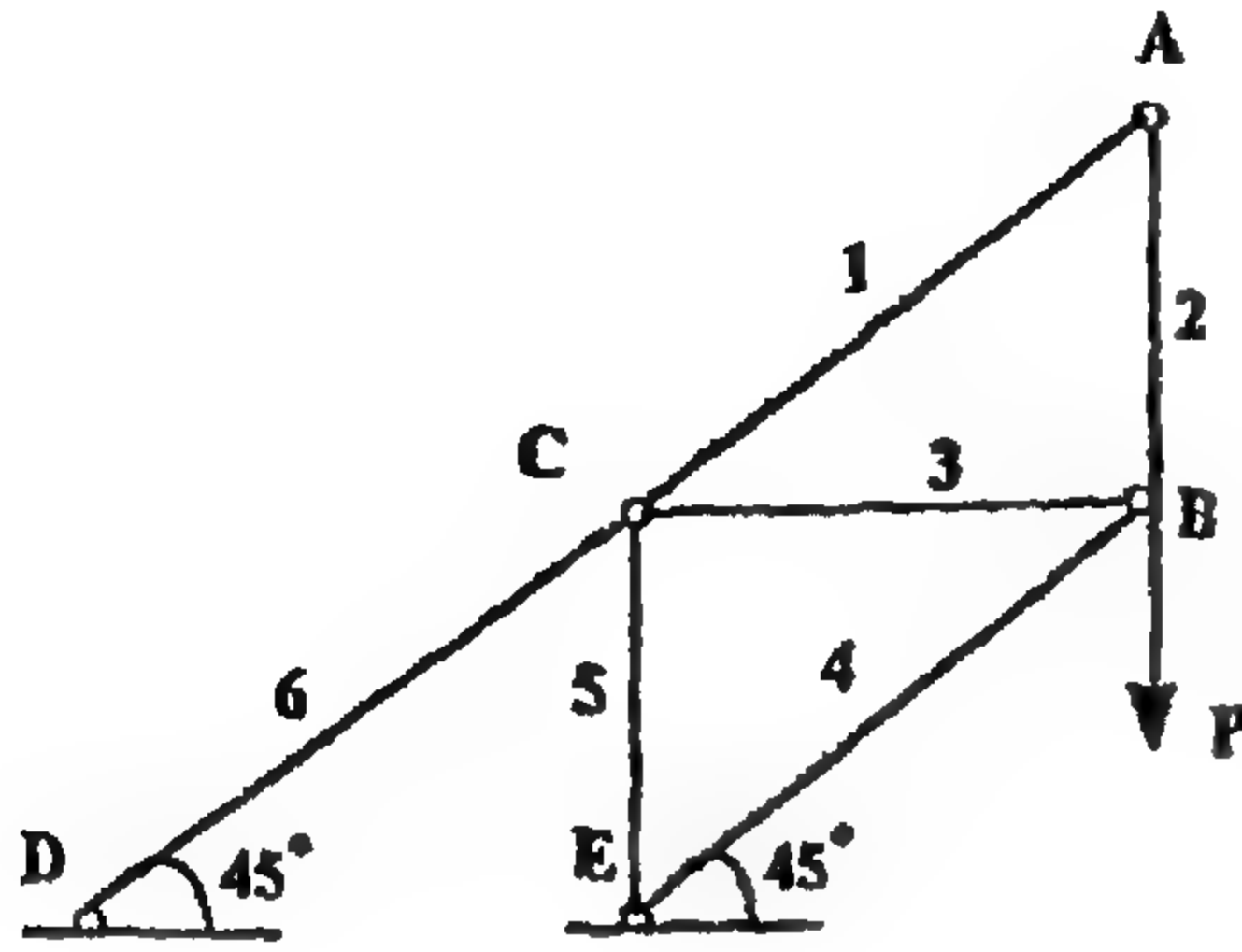
$$-T_2 \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + P = 0$$

$$T_2 = P \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$



# أمثلة محلولة

مثال ١:

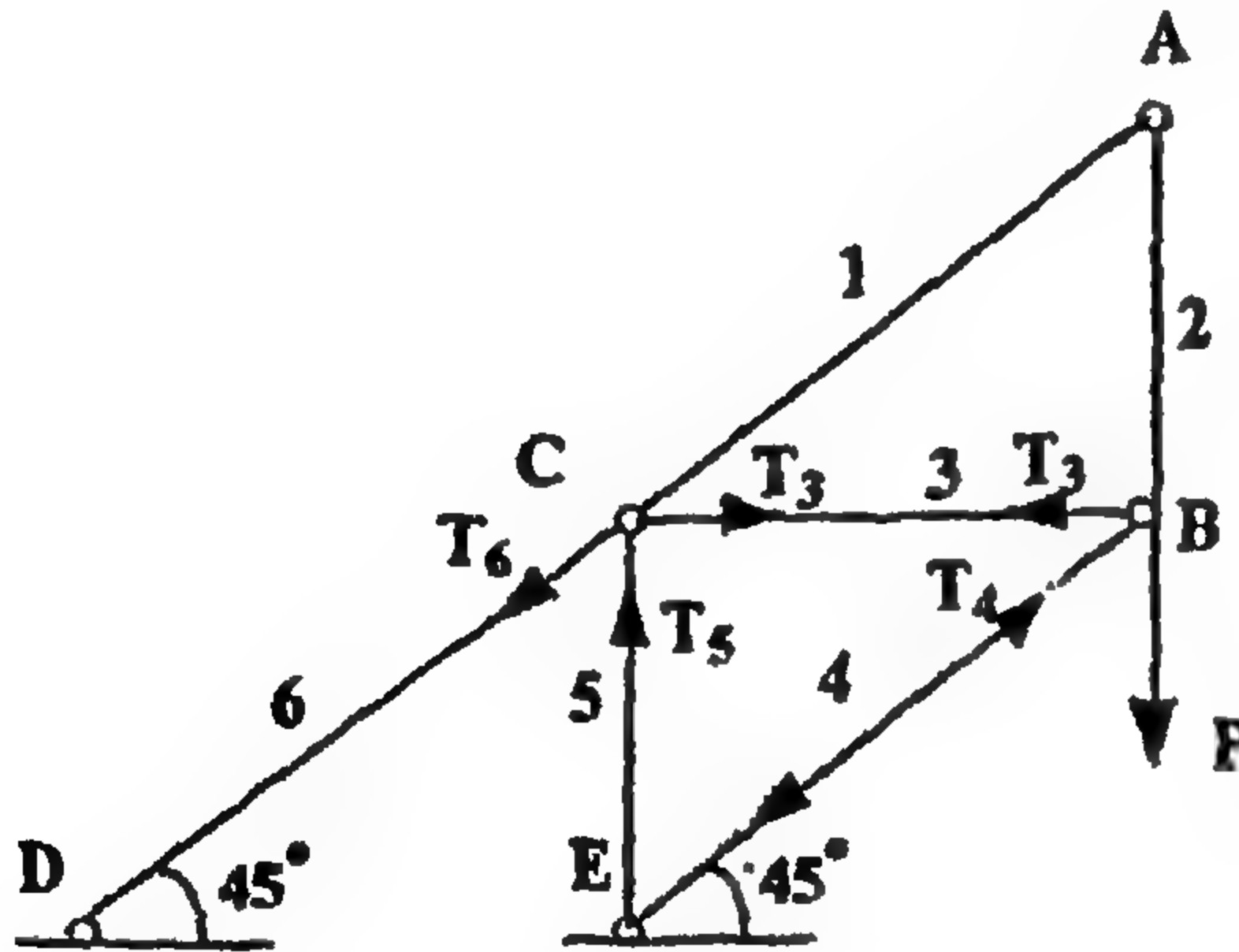


عين تحليلياً القوى المحورية في أعضاء الهيكل المفصلي المرتكز والمحمل كما في الشكل.

اتزان المفصل A:

هذا المفصل متزن تحت تأثير قوتين محورتين في العضوين الملتقين فيه وحيث أن هاتين القوتين ليستا على استقامة واحدة إذن فالإتزان غير ممكن إلا إذا تلاشت القوتان معاً.

اتزان المفصل B:



القوى المؤثرة هي  $P$ ،  $T_3$ ،  $T_4$  بالتحليل أفقياً ورأسياً:

$$T_4 \cos 45^\circ = T_3$$

$$T_4 \sin 45^\circ = P$$

$$T_4 = P\sqrt{2} \text{ ، } T_3 = P \text{ ومنهما}$$

اتزان المفصل C:

القوى المؤثرة هي  $T_3$ ،  $T_5$ ،  $T_6$  بالتحليل أفقياً ورأسياً:

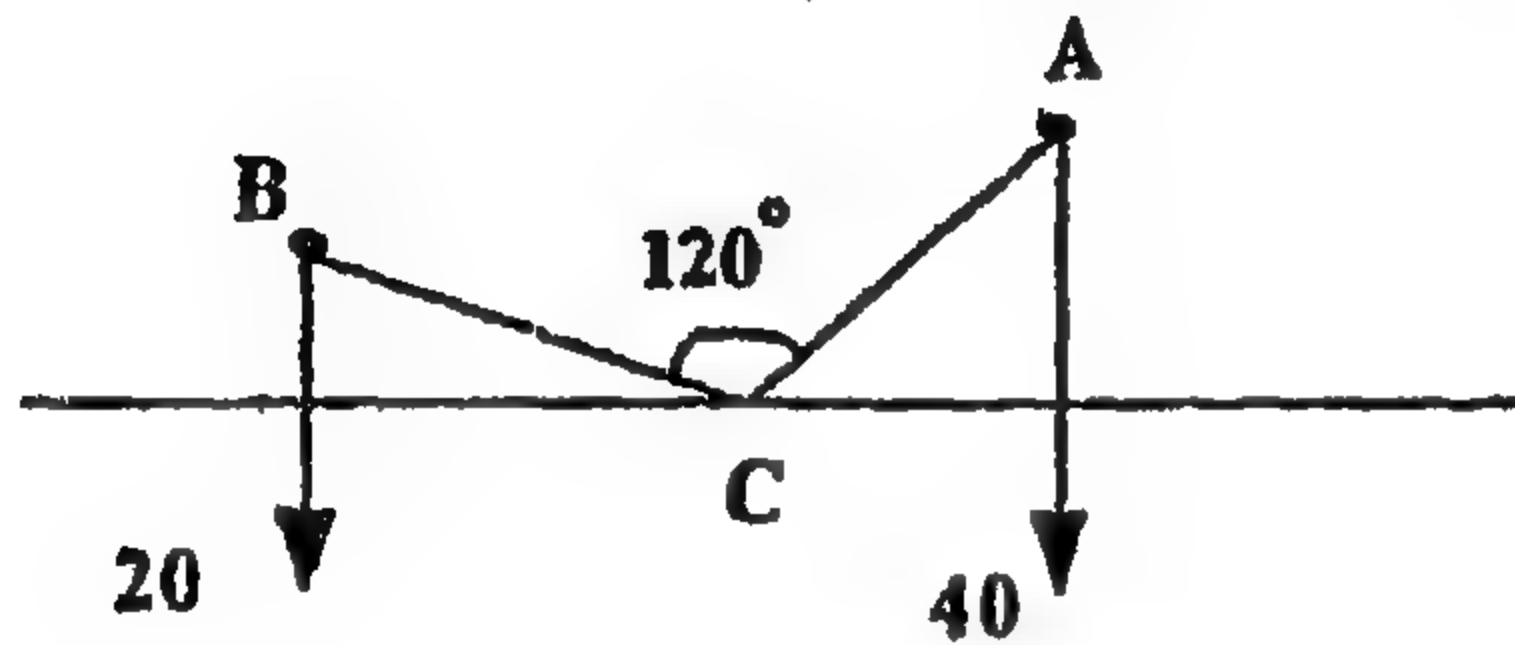
$$T_6 \cos 45^\circ = T_3$$

$$T_6 \sin 45^\circ = T_5$$

$$T_6 = P\sqrt{2} , \quad T_5 = P$$

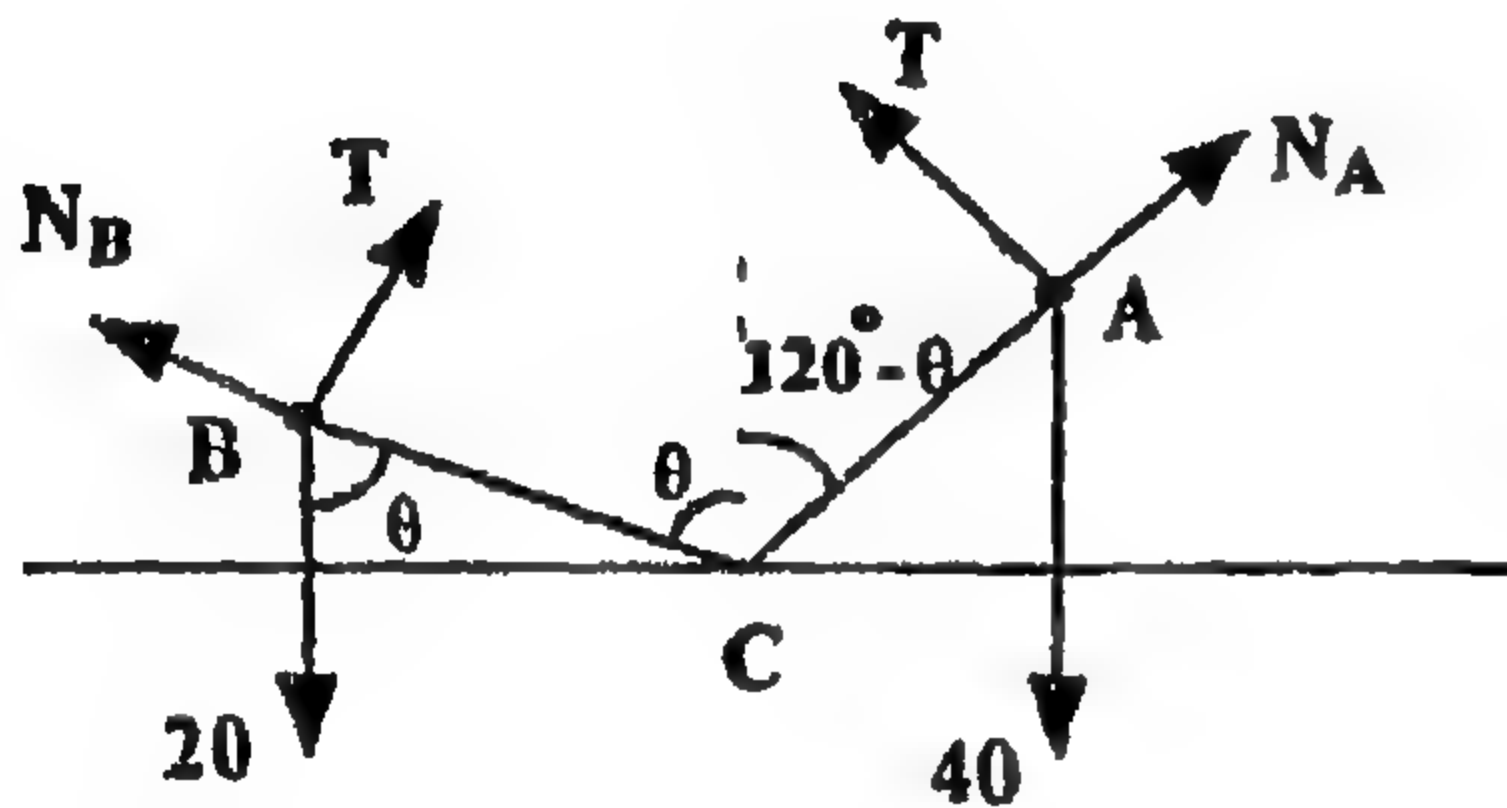
مثال ٢ :

جسمان A , B وزن كل منهما 40 N , 20 N يربطهما خيط خفيف يمر فوق أسطوانة أفقية



ملساء ويقابل زاوية مركزة مقدارها  $120^\circ$  كما في الشكل، أوجد موضع الاتزان والشد في الخيط ورد فعل الاسطوانة.

الحل:



الشكل المقابل يمثل خطوط العمل في وضع عام.

اتزان الجسم A

بتطبيق قاعدة لامي نحصل على

$$\frac{40}{\sin 90} = \frac{T}{\sin(60 + \theta)} = \frac{N_A}{\sin(210 - \theta)} \quad (1)$$

اتزان الجسم B:

بتطبيق قاعدة لامي نحصل على:

$$\frac{20}{\sin 90} = \frac{T}{\sin(180 - \theta)} = \frac{N_B}{\sin(90 + \theta)} \quad (2)$$

من (١) و (٢) بالقسمة نحصل على :

$$\frac{40}{20} = \frac{\sin(180 - \theta)}{\sin(60 + \theta)}$$

$$\sin \theta = 2(\sin 60 \cos \theta + \cos 60 \sin \theta)$$

$$\sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta$$

$$\therefore \cos \theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ$$

ثم بالتعويض في (١)

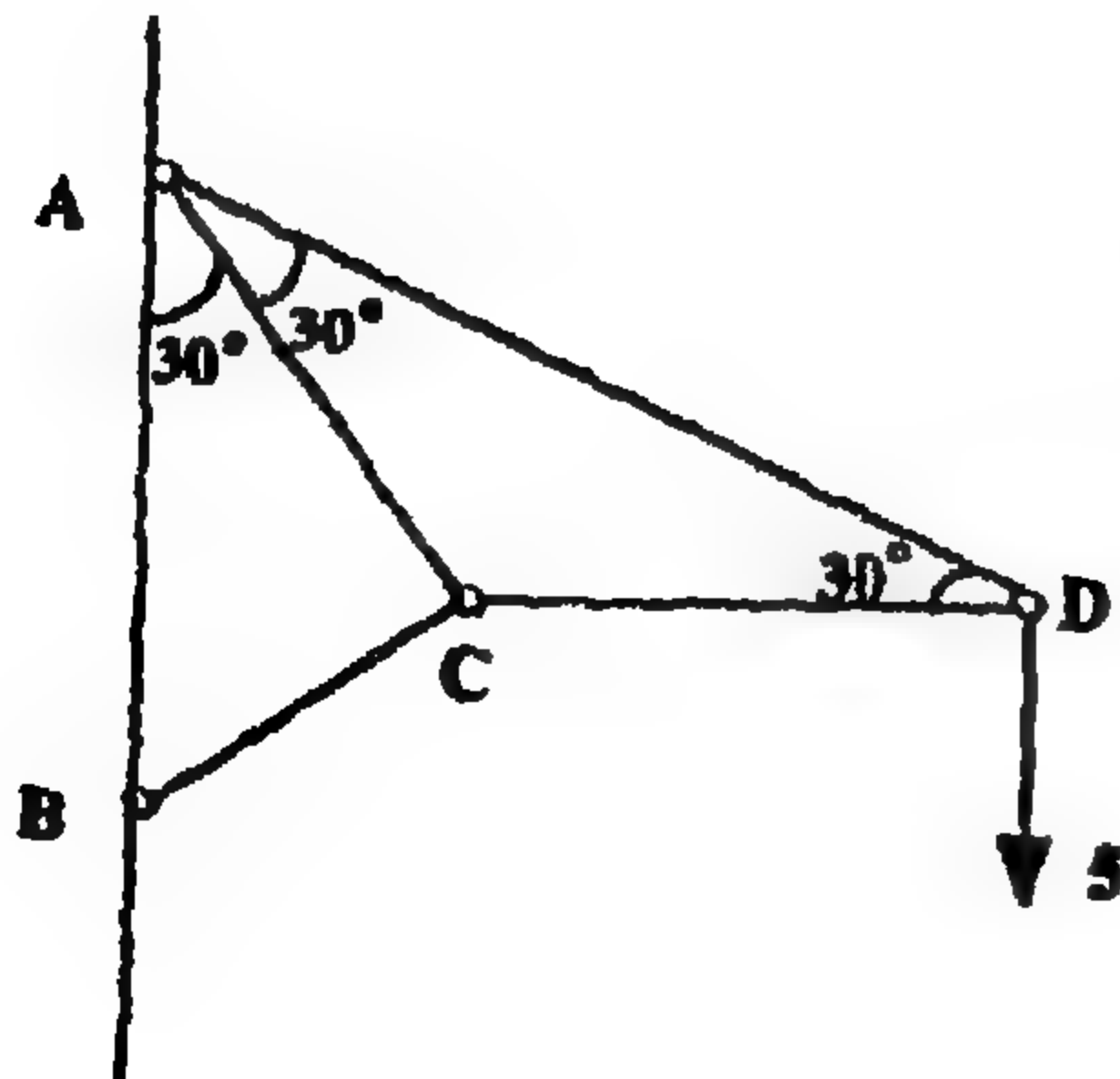
$$T = 20 \text{ N}$$

$$N_A = 20\sqrt{3} \text{ N}$$

وبالتعويض في (٢)

$$N_B = 0$$

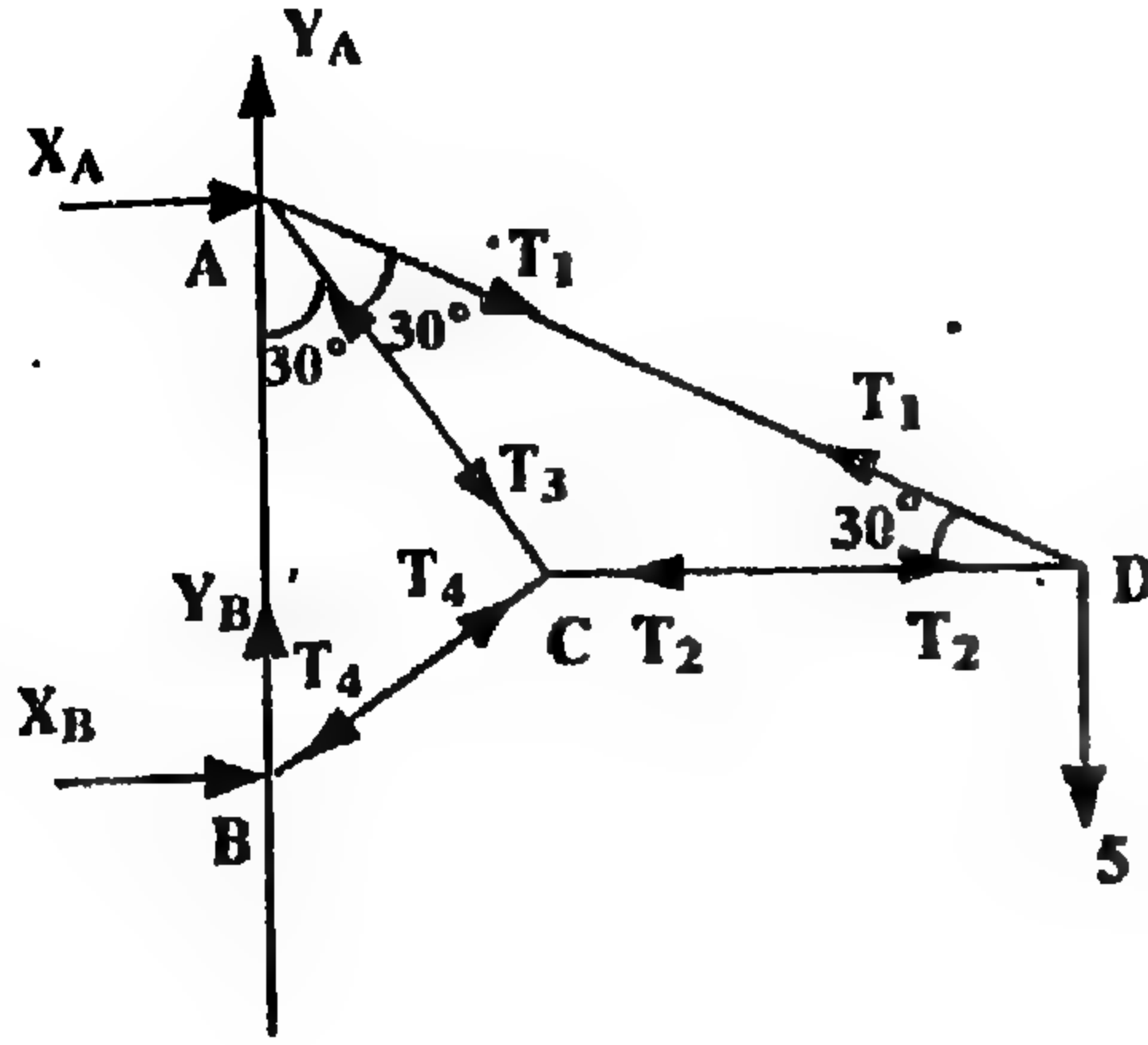
مثال ٣:



المبكل المفصلي المبين بالشكل مبست  
مفصلياً في حائط رأسي عند B و A وعلق من  
المفصل D ثقل قدره 5 kN . أوجد القوى  
المحورية وردود الفعل عند A, B . حل تحليلياً  
وباناً

الحل التحليلي:

شكل (أ) يمثل خطوط العمل للقوى  
المؤثرة على الهيكل المفصلي (القوى  
ورددود الأفعال).



اتزان المفصل D

القوى المؤثرة هي 5،  $T_1$ ،  $T_2$  بالتحليل أفقياً  
ورأسياً نحصل على:

شكل (أ)

$$\sum Y = 0$$

$$T_1 \sin 30 - 5 = 0$$

$$\therefore T_1 = 10 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0$$

$$-T_1 \cos 30 + T_2 = 0$$

$$\therefore T_2 = 5\sqrt{3} \text{ kN}$$

اتزان المفصل C:

القوى المؤثرة هي  $T_2$ ،  $T_3$ ،  $T_4$  بالتحليل أفقياً ورأسياً نحصل على:

$$\sum X = 0$$

$$T_4 - T_3 \cos 30 = 0$$

$$T_4 = 705 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0$$

$$T_1 + T_2 \sin 30 = 0$$

$$T_2 = 2.5 \sqrt{3} \text{ kN}$$

اتزان المفصل B:

القوى المؤثرة هي  $T_4$  ،  $X_B$  ،  $Y_B$  بالتحليل أفقياً ورأسياً نحصل على:

$$\sum X = 0$$

$$X_B - T_4 \cos 30 = 0$$

$$X_B = 3.75 \sqrt{3} \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0$$

$$Y_B - T_4 \cos 60 = 0$$

$$Y_B = 3.75 \text{ kN}$$

اتزان المفصل A:

القوى المؤثرة هي  $T_1$  ،  $T_3$  ،  $X_A$  ،  $Y_A$  بالتحليل أفقياً ورأسياً نحصل على:

$$\sum X = 0$$

$$X_A + T_1 \cos 30 - T_3 \cos 60 = 0$$

$$X_A = 3.75 \sqrt{3} \text{ kN}$$

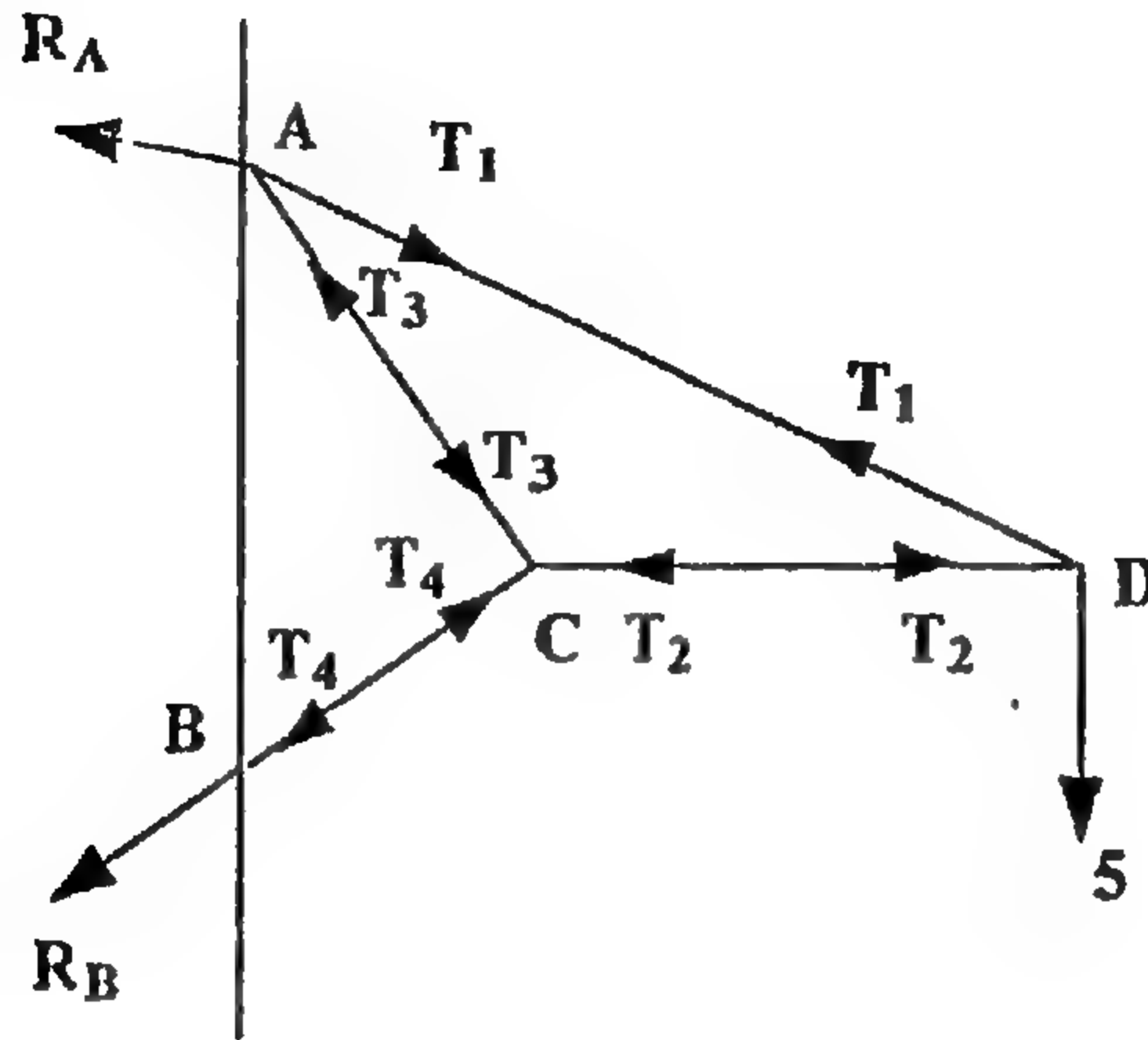
$$\sum Y = 0$$

$$Y_A + T_3 \cos 30 - T_1 \cos 60 = 0$$

$$Y_A = 3.25 \text{ kN}$$

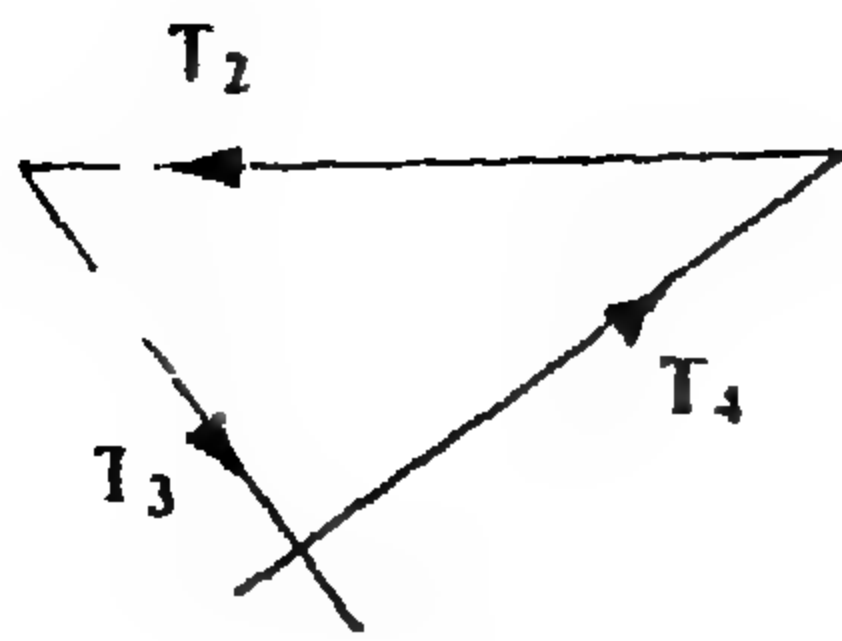
### الحل البياني:

**مقياس رسم القوى 1 cm = 2 kN**

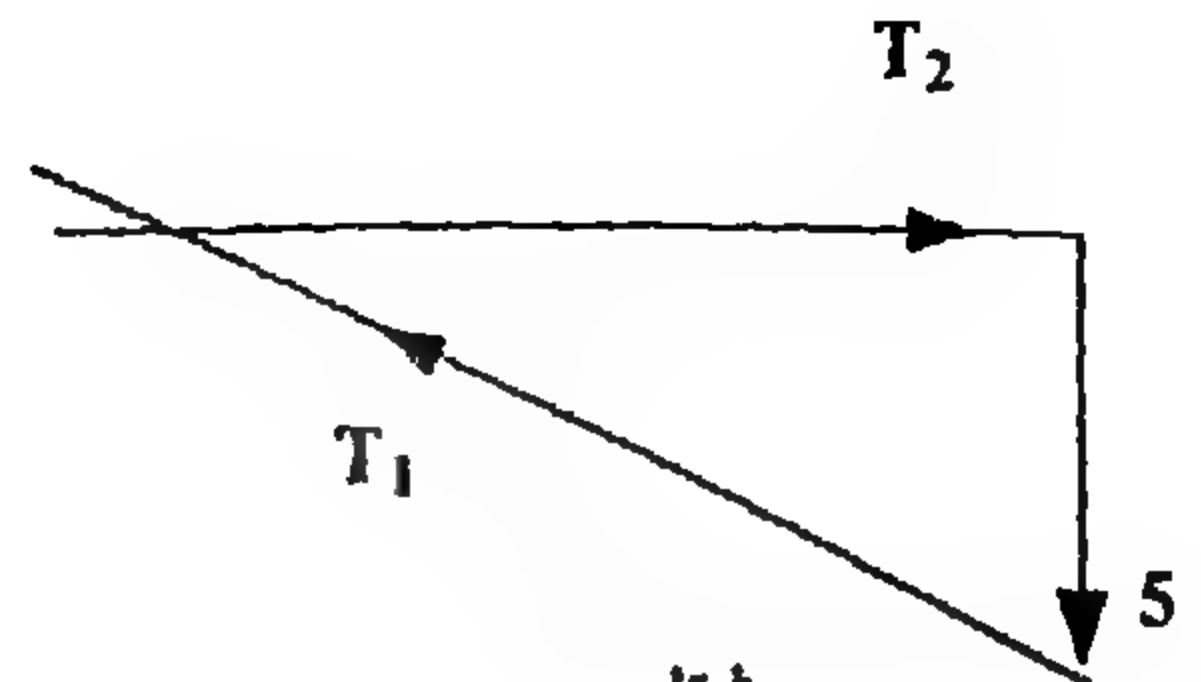


شكل (ب) يمثل شكل خطوط العمل للقوى المؤثرة على الهيكل المفصلي. يمكن الحل بياناً وذلك برسم مثلثات قوى للمفاصل D كما في شكل (جـ) ، C كما في شكل (د) ، A كما في شكل (و) ومضلع قوى المفصل B كما في شكل (هـ). وفي كل منها نبدأ بتمثيل القوى المعروفة عند المفصل ويفلق المثلث أو المضلع باتجاهات القوى المجهولة في المقدار.

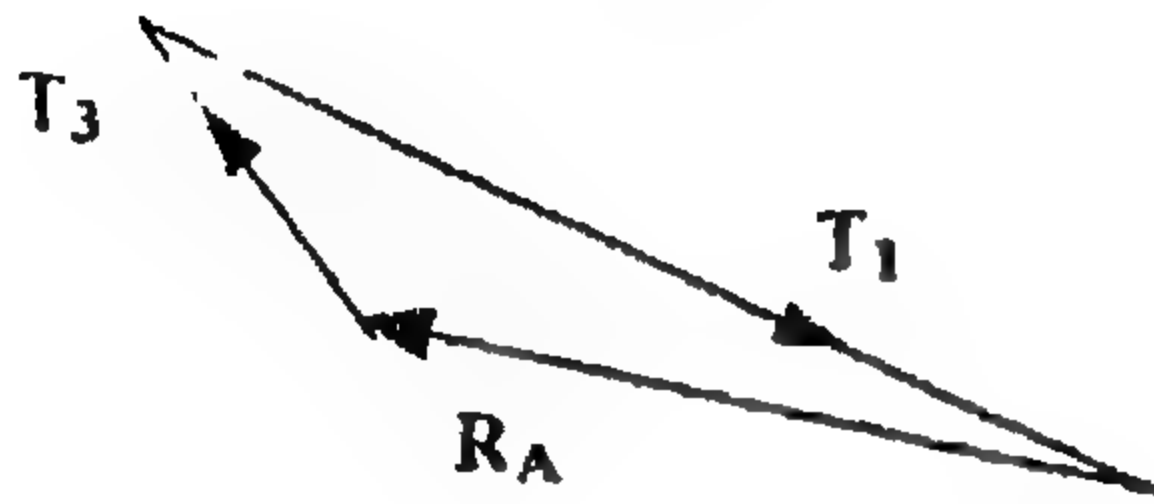




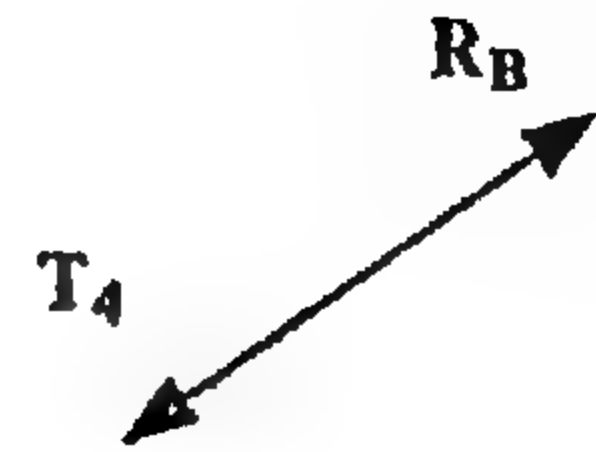
شكل د



شكل جـ



شكل و



شكل هـ

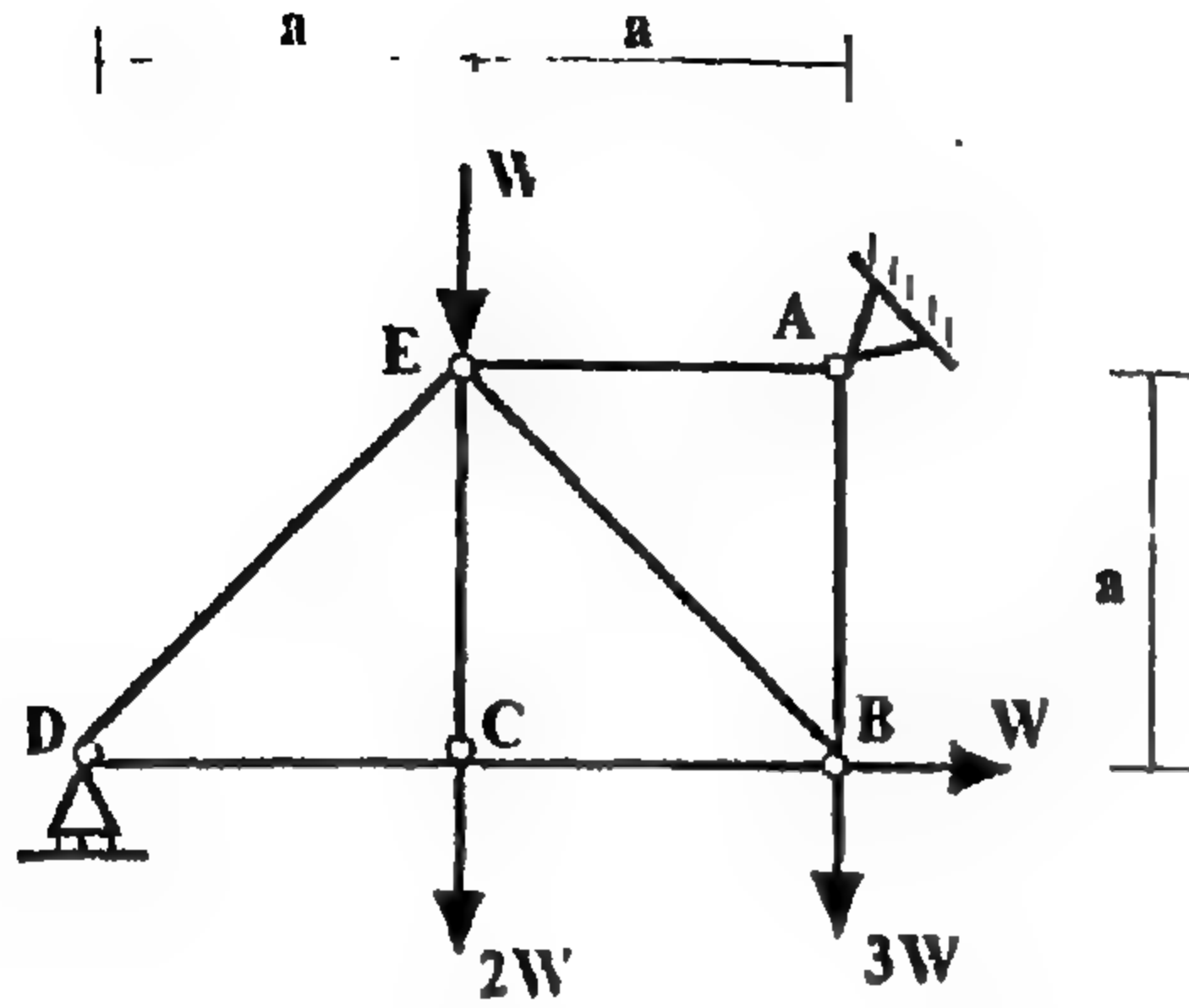
النتائج من الرسم بالقياس:

$$T_1 = 10 \text{ kN} , T_2 = 8.6 \text{ kN}$$

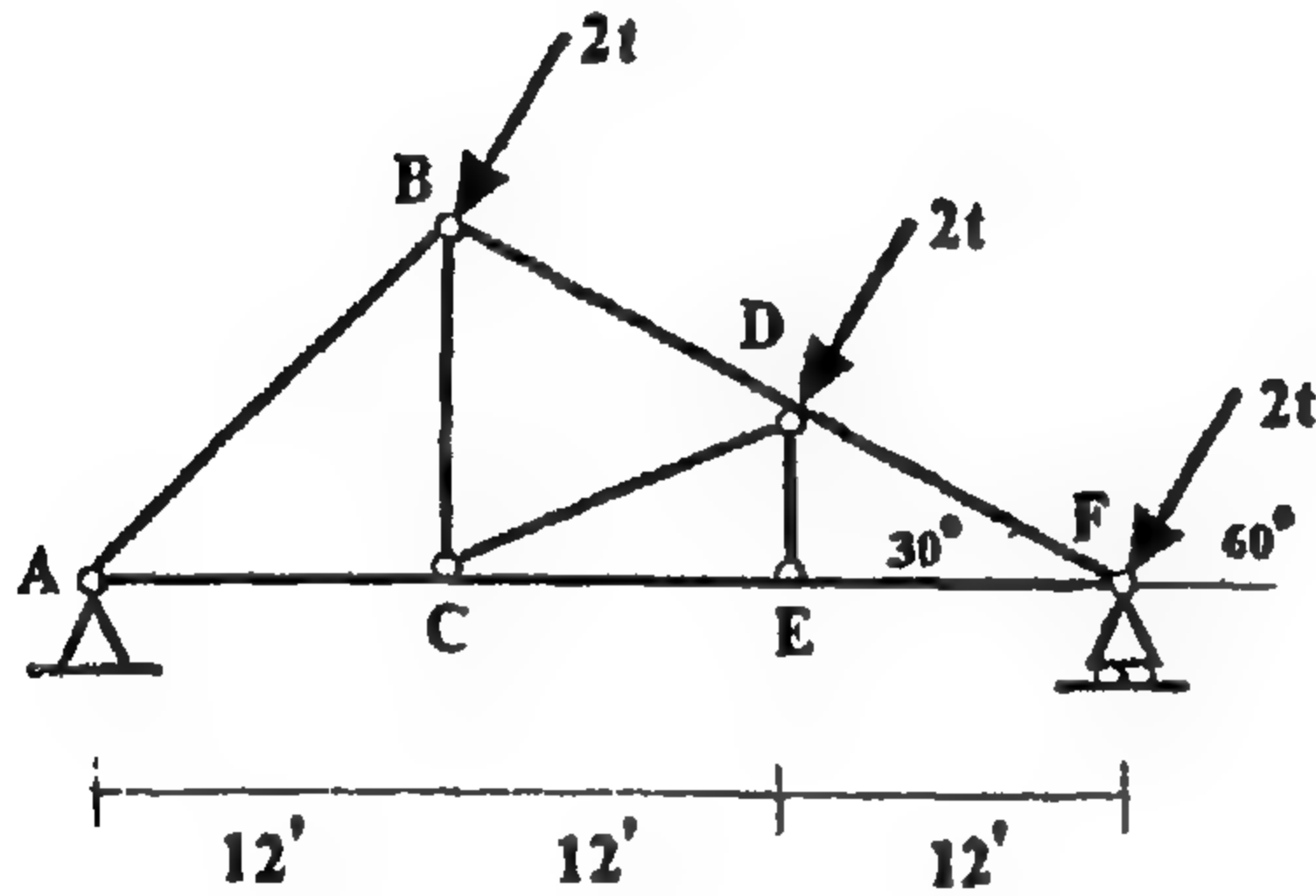
$$T_3 = 4.5 \text{ kN} , T_4 = 7.5 \text{ kN}$$

$$R_A = 4.5 \text{ kN} , R_B = 7.5 \text{ kN}$$

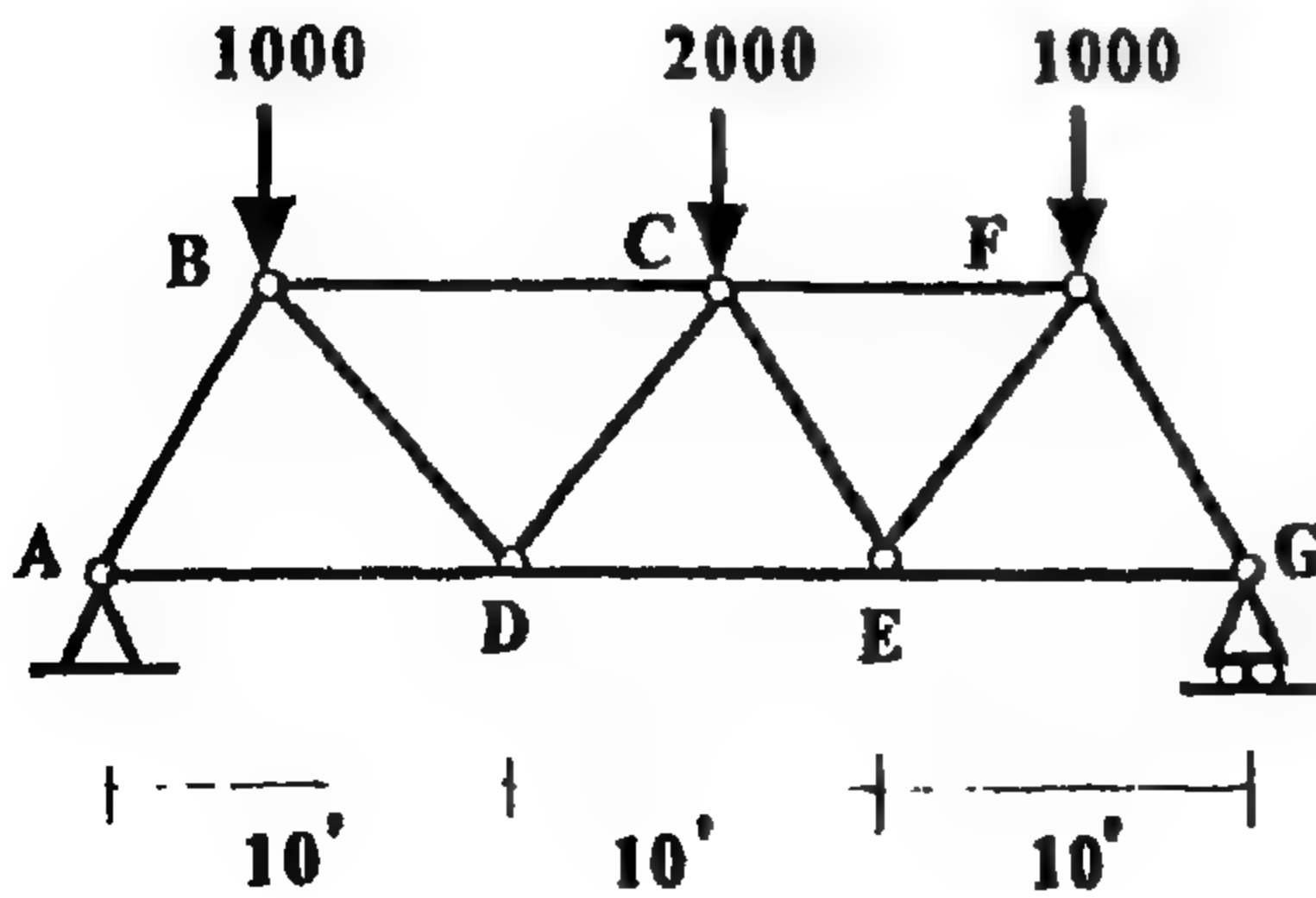
## تمارين



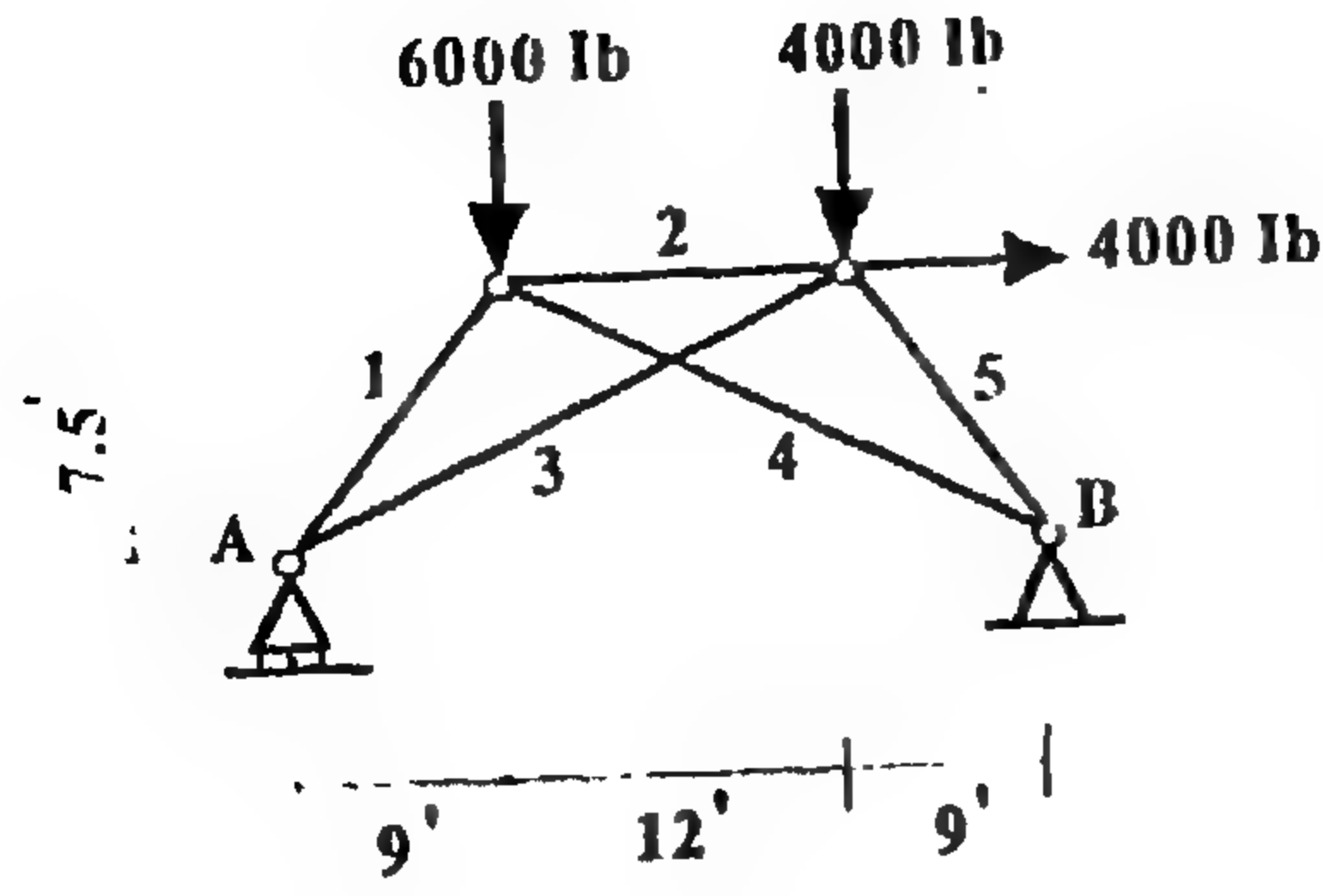
١ - للهيكل المحمل المقاصل المبين بالشكل  
عين القوى المحورية في أعضاء الهيكل و  
كذلك ردود فعل الارتكاز الحر D و  
المفصل A .



٢ - عين قوى الضغط أو الشد في  
العضوين AB ، CB .



٣ - عين الشد أو الضغط في  
كل من أعضاء الهيكل  
المفصلي المبين بالشكل ( القوى  
بالرطل " الباوند " و الأبعاد  
بالقدم و جميع المثلثات متساوية  
الأضلاع ) .



٤ - للهيكل المفصلي الحمل كما  
في الشكل أوجد ردود فعل  
المرتكزات و القوى المحورية  
في جميع الأعضاء ، علما بأن  
العضوين 3 ، 4 غير مرتبطين  
في نقطة التقاطع .



## إتزان مجموعة الأجسام المتماسكة

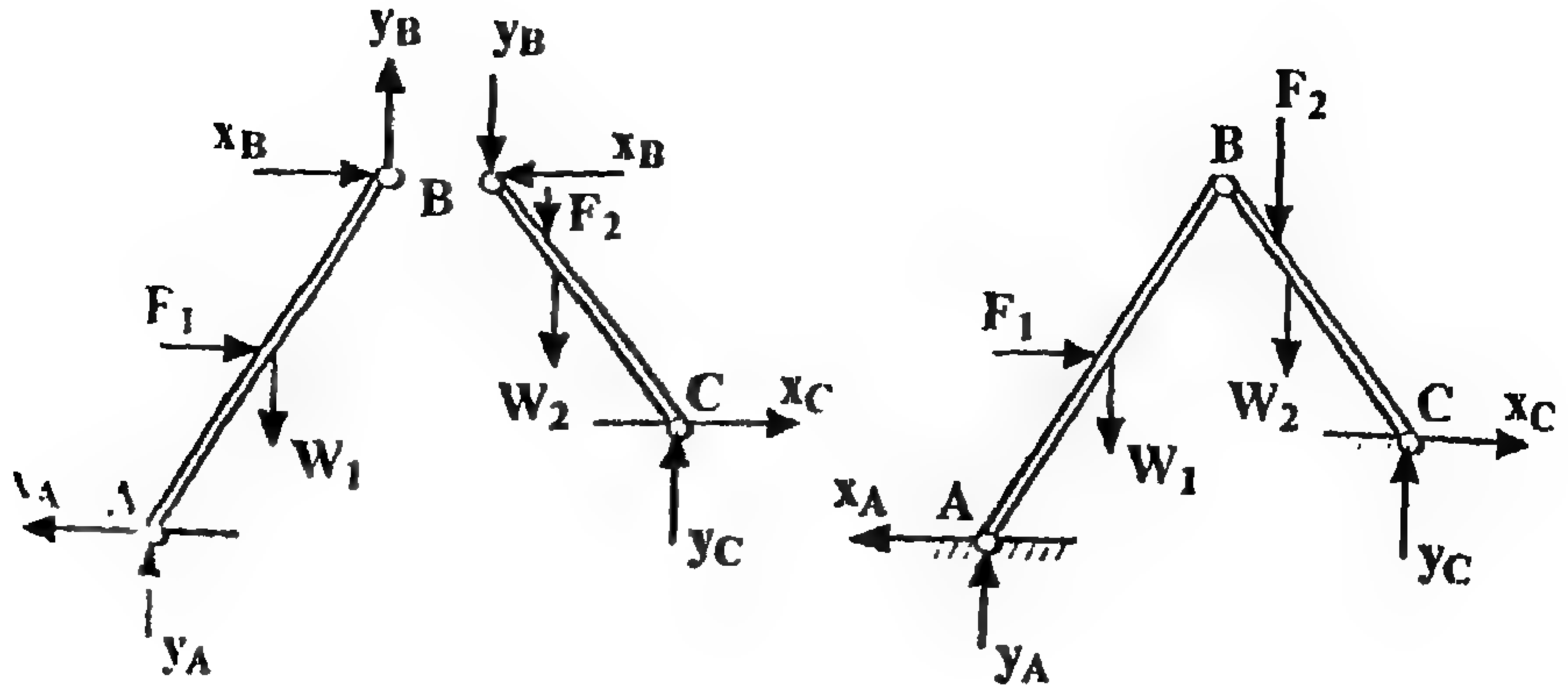
إذا اتصلت مجموعة أجسام متماسكة عن طريق مفاصل أو نقط ارتكاز على بعضها و كانت في وضع متزن فإنه يمكن اعتبار أن المجموعة كلها عبارة عن جسم واحد و يكتب لها ثلاث معادلات اتزان كما في حالة الجسم المتماثل .

كما انه يجب دراسة كل جسم على حدى و يكون له ثلاث معادلات اتزان لذا فان عدد المعادلات للاتزان هي مساوية لعدد الأجسام المتماسكة  $3 \times$  .

و هناك نوعين من الإرتكاز :

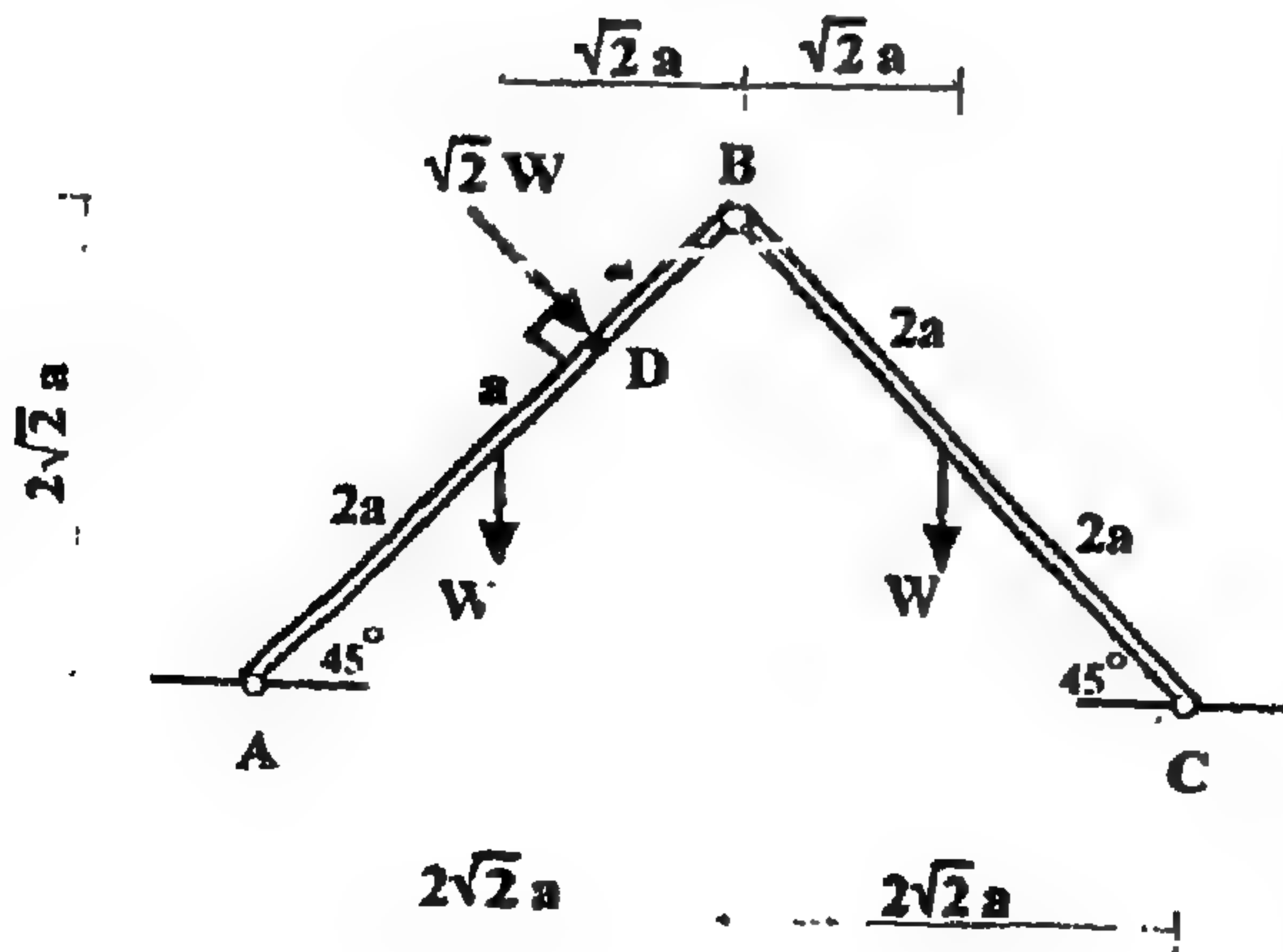
أ - الإرتكاز الداخلي : وهو يحدث بين جسمين أو أكثر من مجموعة الأجسام و لا يكون متصلا بأي جسم آخر خارجي .

ب - الإرتكاز الخارجي : و هو الذي يربط أي جسم في المجموعة بالخارج مثل الأرض أو الحائط أو أي جسم آخر خارجي لا ندرس اتزانه .



الجسم المين في الشكل مكون من جسم AB مرتبط مع BC جسم آخر والجسمين مرتبطين مفصليا مع الأرض في A ، C و لذا يعتبران مفصلان خارجيان والمفصل B داخلي والفرق بين المفصل الداخلي والخارجي هو أنه لا تظهر ردود أفعال عند المفصل الداخلي وتظهر عند المفصل الخارجي والسبب في ذلك هو أنه هناك رد فعل في B ناتج من الجسم AB الاول مع الجسم BC الثاني وكذلك هناك رد فعل في B من الجسم الثاني على الجسم الاول مساو له في المقدار ومضاد له في الاتجاه ، لذا يتلشى عند التصاقهما ويظهرا عند فصلهما والشكل الموضح له ثلاث معادلات اتزان كمجموعة و ٦ معادلات اتزان لو تم الفصل لتعين الست مجاهيل  $Y_B, X_B, Y_A, X_A, Y_C, X_C$ .

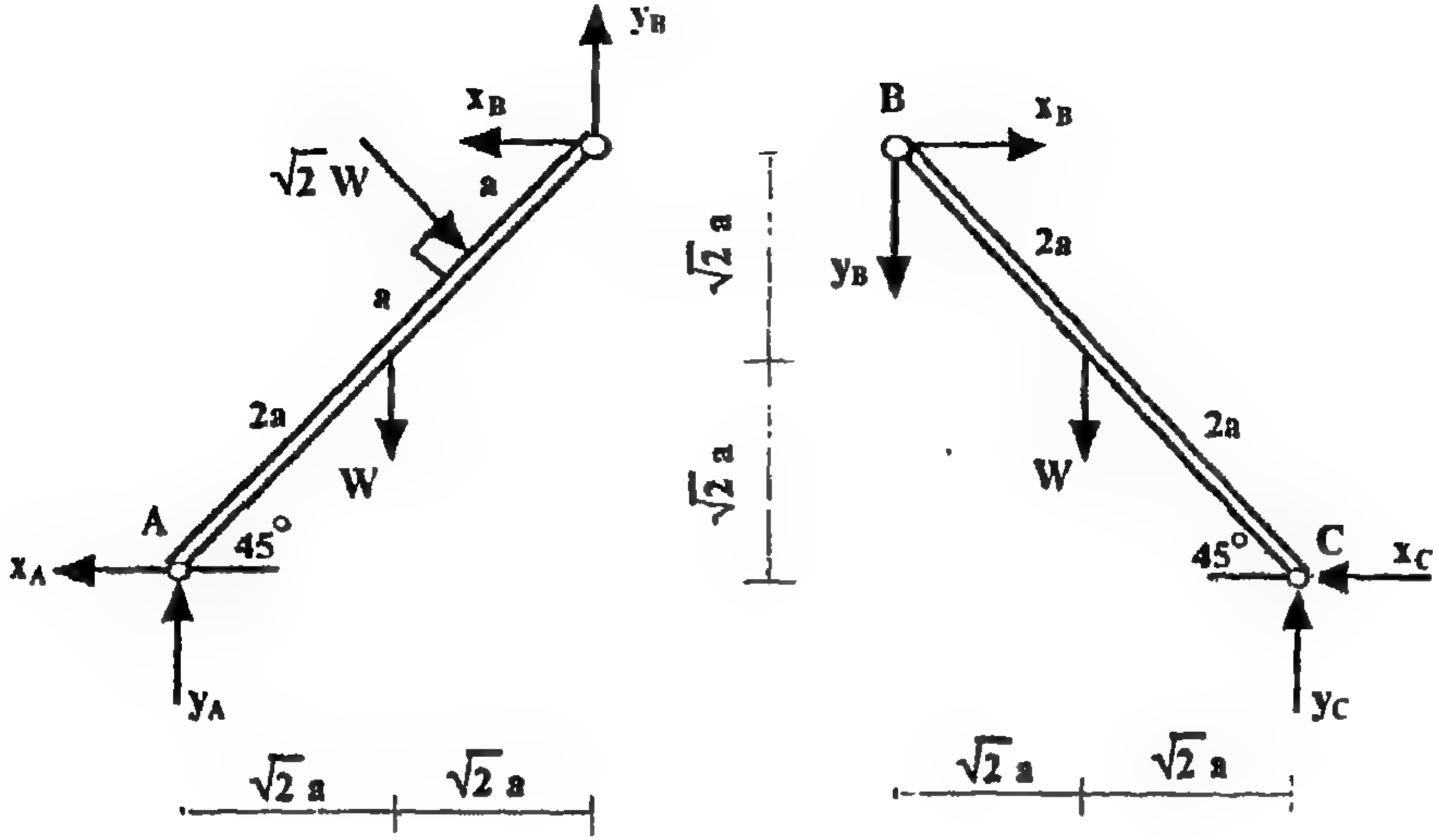
مثال ١ :



قطبان متشابهان  
منتظمان AB ، BC وزن  
الواحد W وطولها 4a  
مربطان مفصليا في B و  
يربطهما الى الأرض المفصلات  
A ، C كما في الشكل ، يؤثر  
حمل  $\sqrt{2}W$  عموديا على  
AB عند نقطة D حيث AD  
 $= 3a$  . عين ردود الفعل في

المعامل الثلاثة A , B , C.

الحل :



عدد المجاهيل  $x_C, y_C, x_B, y_B, x_A, y_A$

عدد المعادلات = عدد الأجسام  $\times 3$

بدراسة اتزان المجموعة ككل و بأخذ العزوم حول نقطة A

$$\sum M_A = 0$$

$$y_C + 4\sqrt{2}a - W \times 3\sqrt{2}a - W \times \sqrt{2}a - \sqrt{2}W \times 3a = 0$$

$$4y_C = 3W + W + 3W$$

$$y_C = \frac{7}{4}W \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum Y = 0$$

$$y_C + y_A = W + W + W \times \cos 45^\circ \times \sqrt{2}$$

$$y_C + y_A = 2W + \frac{1}{\sqrt{2}} W \times \sqrt{2}$$

$$y_A = 3W - \frac{7}{4}W$$

$$y_A = \frac{12W - 7W}{4} = \frac{5}{4}W$$

$$y_A = \frac{5}{4}W \dots\dots\dots (2)$$

نتقل بعد ذلك لدراسة AB و يوجد به ٣ مجاهيل هي  $x_B$  ،  $y_B$  ،  $x_A$

$$\sum M_i = 0$$

$$\sqrt{2}W \cdot a + W \cdot a\sqrt{2} = x_A \times 2a\sqrt{2} + y_A \times 2a\sqrt{2}$$

$$2W = 2x_A + 2y_A$$

$$x_A = W - \frac{5}{4}W = -\frac{1}{4}W \dots\dots\dots (3)$$

أي أن مقدارها 1/4 و اتجاهها عكس الاتجاه المفروض.

$$\sum X = 0$$

$$\sqrt{2}W \sin 45 = x_A + x_B$$

$$W = -\frac{1}{4}W + x_B$$

$$x_B = \frac{5}{4}W \dots\dots\dots (4)$$

$$\sum Y = 0$$

$$y_A + y_B = W + \sqrt{2}W \cos 45$$

$$y_B = 2W - \frac{5}{4}W$$

$$y_B = \frac{8-5}{4}W$$

$$y_B = \frac{3}{4}W \dots\dots\dots (5)$$

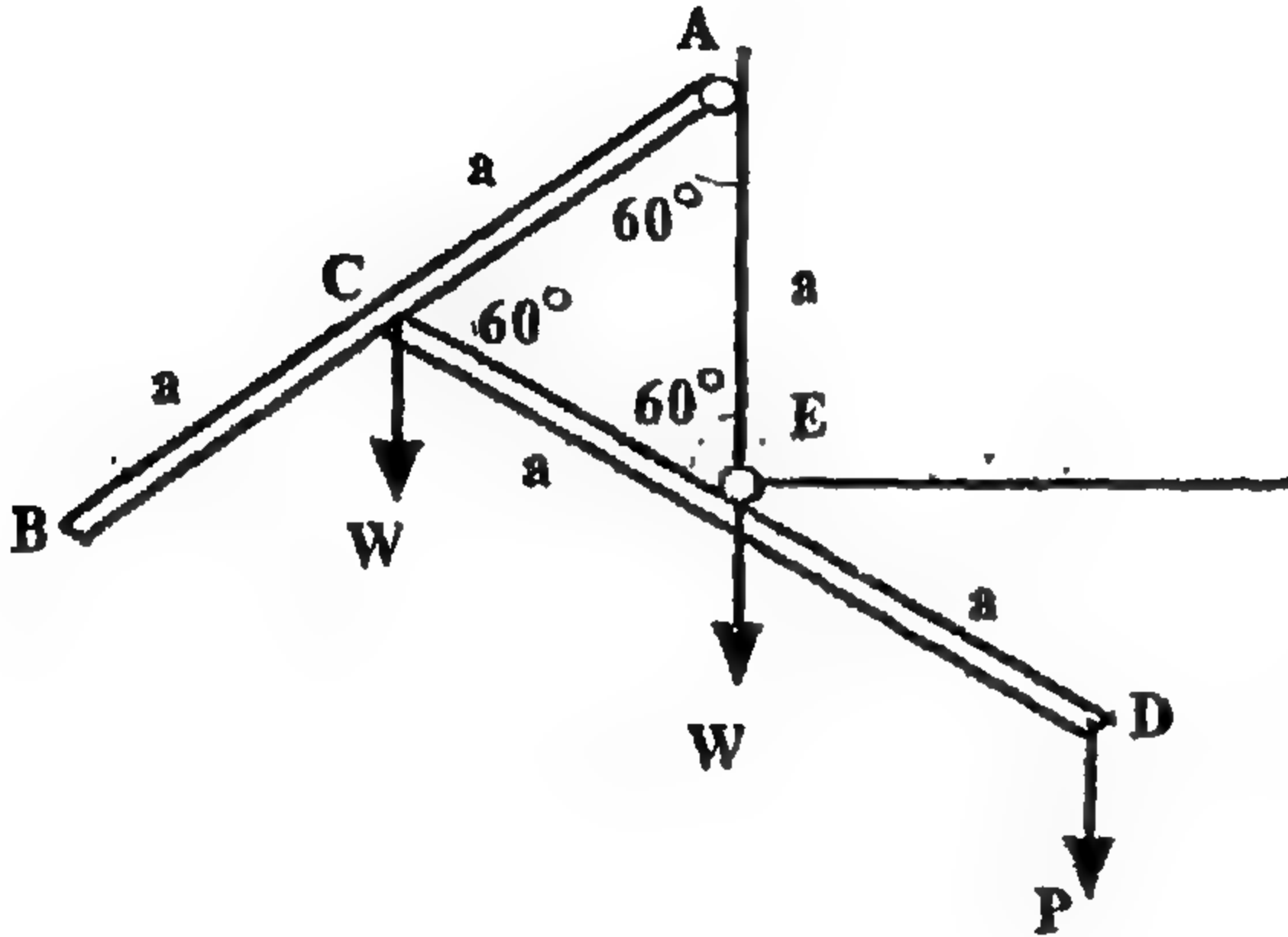
يبقى من المجاهيل  $x_C$  من اتران الجسم BC .

$$\Sigma X = 0$$

$$x_B = x_C$$

$$x_c = \frac{5}{4}W \dots\dots\dots (6)$$

مثال ۲ :

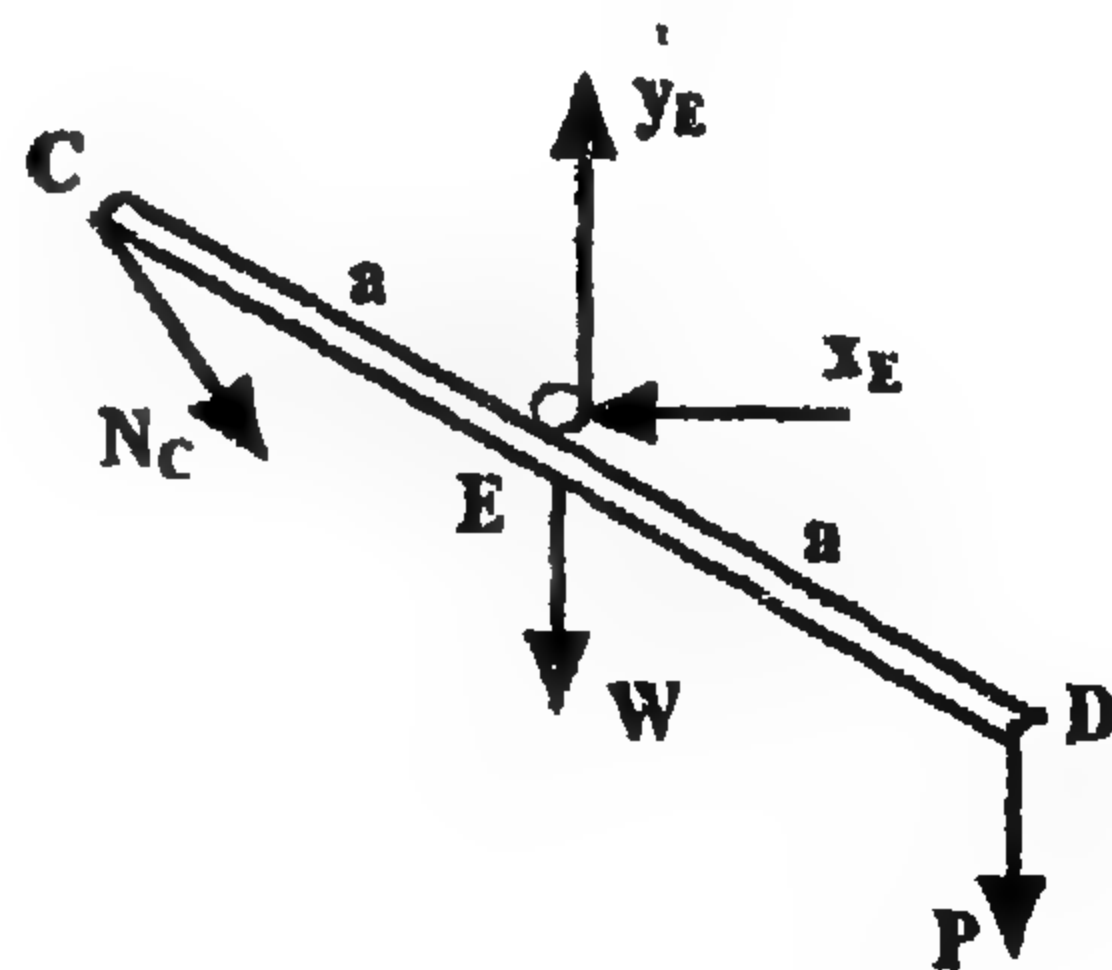
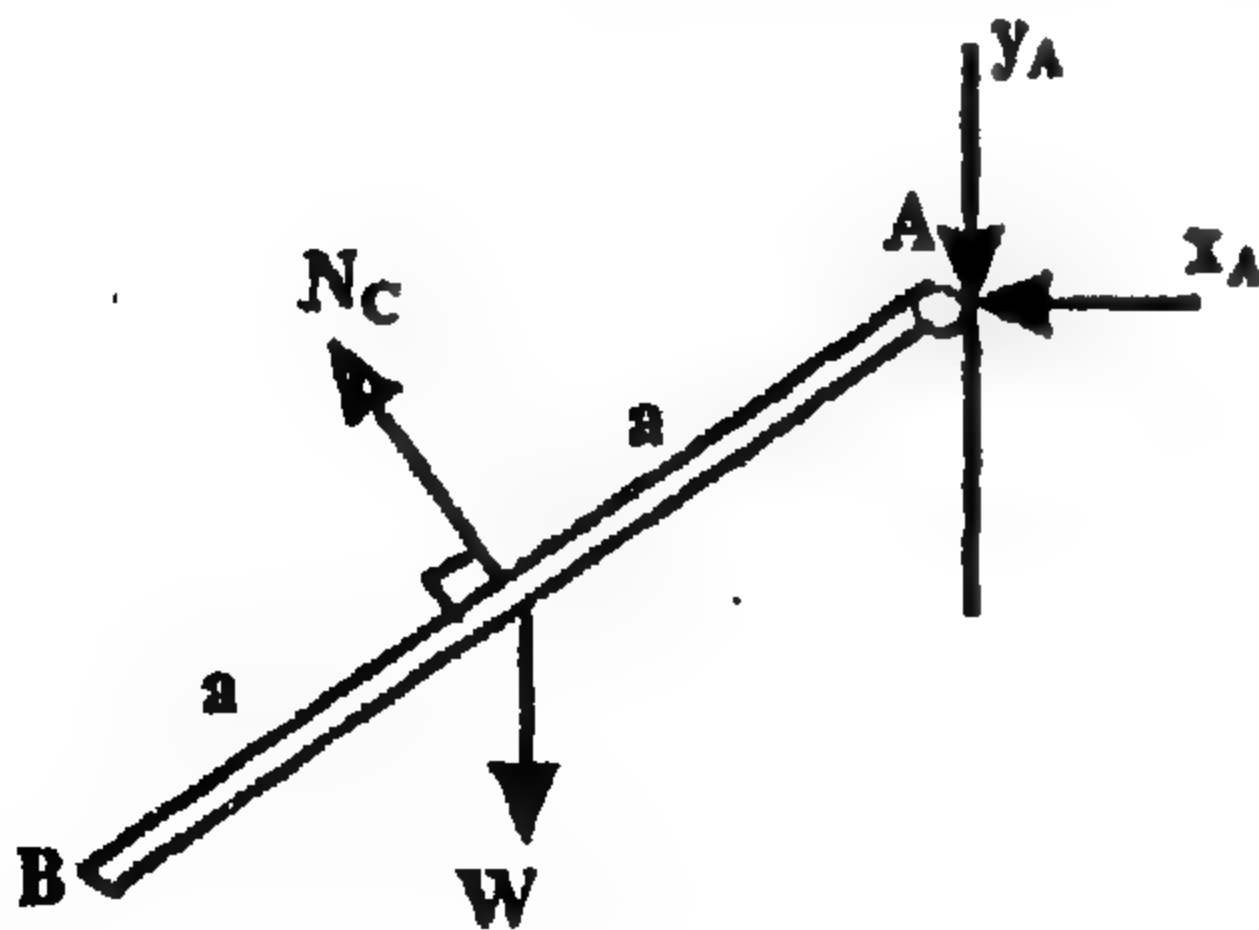


قضيمان متساويان AB ،  
 DC كل منهما وزنه W وطوله  
 2a يتصلان بحائط بفصلين ثابتين  
 A ، E و يتلامسان في C دون  
 احتكاك عين القوة P اللازمة  
 لإتزان القضيين في الوضع المبين  
 بالشكل و عين ردود الأفعال في  
 المفاصل .

### الحل :

تلاحظ أن  $AB$  به ثلاث مجاهيل فقط وهي  $x_A, y_A, N_C$  و ان  $CD$  به 4 مجاهيل  $P$  ،

•  $x_E, y_E, y_A, x_A, P$  و المجموعة بها ٥ مجاهيل وهي





نبدأ بدراسة AB .

$$\Sigma M_A = 0$$

$$N_C \cdot a = W \cdot a \sin 60$$

$$N_C = \frac{\sqrt{3}}{2} W \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Sigma y = 0$$

$$y_A = W - N_C \cos 30$$

$$y_A = \frac{1}{4} W \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\Sigma x = 0$$

$$x_A + N_C \sin 30 = 0$$

$$x_A = -\frac{\sqrt{3}}{4} W \quad \dots\dots\dots (3)$$

بدراسة المجموعة

$$\Sigma M_L = 0$$

$$P \cdot a \cos 30 = x_A \cdot a + W \cdot a \sin 60$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} P = -\frac{\sqrt{3}}{2} W + \frac{\sqrt{3}}{2} W$$

$$P = \frac{1}{2} W \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\Sigma X = 0$$

$$x_E + x_A = 0$$

$$x_E = \frac{\sqrt{3}}{4} W$$

$$\Sigma y = 0$$

$$y_E + y_A = P + W + W$$

$$y_E = \frac{9}{4} W \quad \dots\dots\dots (5)$$

و كما سبق يلاحظ أن بعد رسم الأشكال يجب التأكد من أن عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات المتاحة للإتزان . ولذا فإن أفضل طريقة لحل مسائل المجموعات المفصلة هو اتباع الخطوات الآتية بالتدريج الوارد :

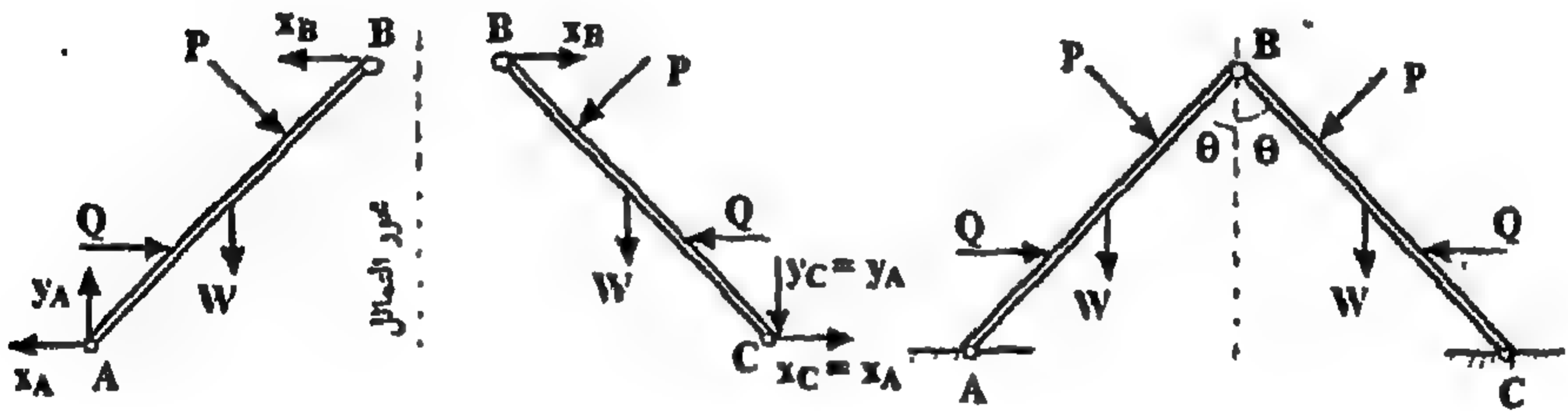
١ - البحث في الأشكال المرسومة عن أحدها و الذي يحتوي على ٣ مجاهيل على الأكثر . فإذا وجد فنعبره جسما واحدا مترنا و بكتابة ٣ معادلات اتزان له يمكن إيجاد هذه المجاهيل الثلاثة ثم نتقل الى جسم آخر .

٢ - إذا لم نجد الجسم المذكور في الخطوة الأولى نحاول من دراسة اتزان المجموعة المفصلية كلها إيجاد مجهول أو مجهولين على الأكثر ثم نتقل إلى أحد الأجسام الأخرى .

٣ - إذا لم نتمكن من إيجاد أي مجهول من دراسة اتزان المجموعة نحاول إيجاد معادلتين في مجهولين و عادة ما يكون هذان المجهولين هما مركبتى الفعل في المفصل الداخلي .

## ١ - التماثل Symmetry :

يقال للجسم المتزن أنه تحت تأثير مجموعة من القوى أنه في حالة تماثل استاتيكي إذا توافر له التماثل الهندسي و التماثل في القوى الخارجية المؤثرة كما في الشكل .



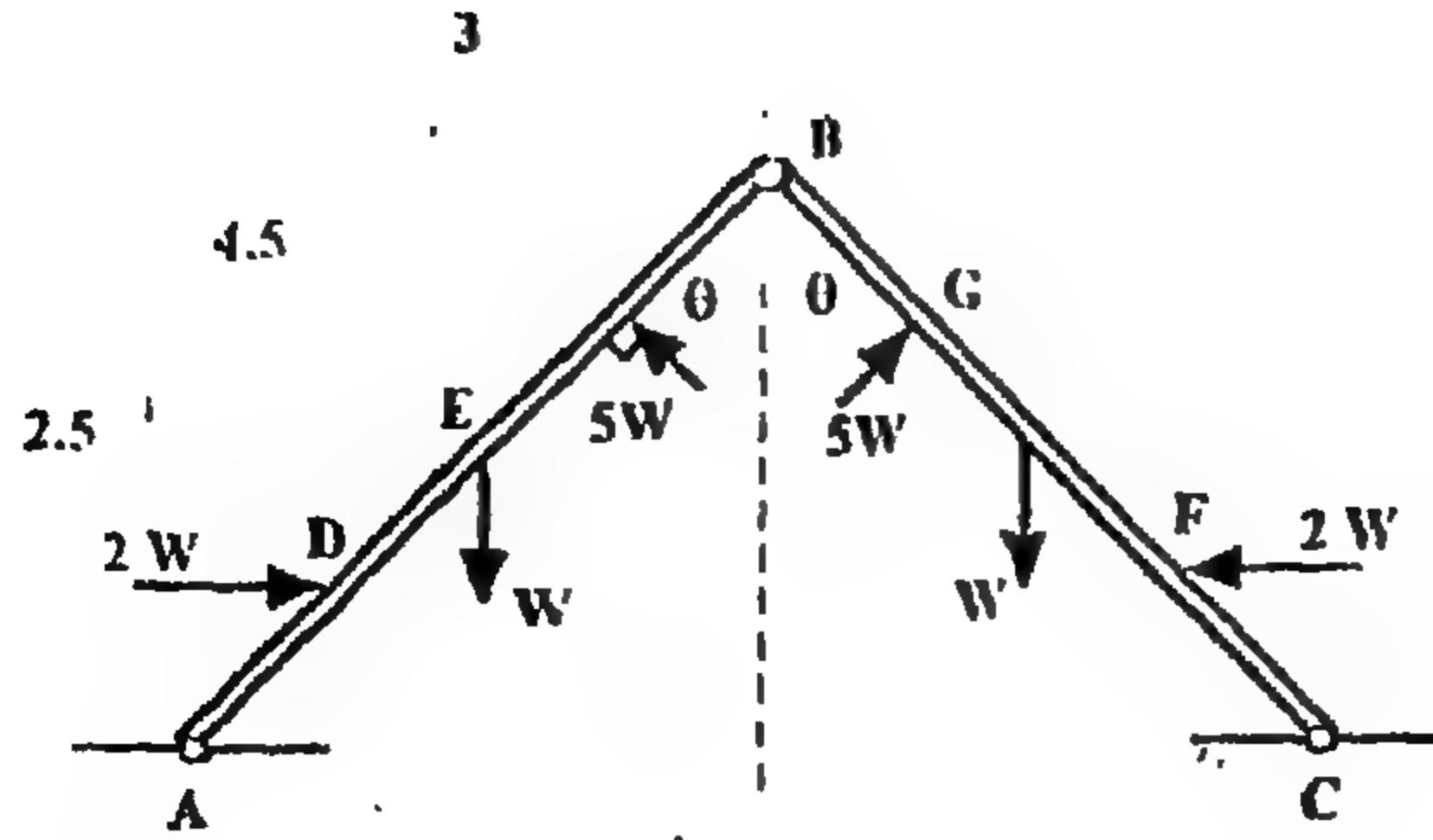
الجسمان متماثلان حول محور الخط الرأسي و يمكن الاستفادة من وجود التماثل كما يأتي :

١ - ردود الأفعال التي تنشأ في الإرتكازات المتماثلة هندسيا تكون متماثلة مقدارا و اتجاهاً .

٢ - يكفي معالجة نصف واحد من المجموعة بحيث يكون نصفاً متماثلاً .

٣ - رد الفعل في المفصل الداخلي الواقع على خط التماثل يكون عموديا عليه أي تنعدم مركبته المنطبقة على خط التماثل .

# مثال ١ :



المجموعة المكونة من  
الجسمين AB و BC متزنة  
تحت تأثير القوى الموضحة في  
الشكل ، عين ردود الأفعال  
في المفصل A ، B ، C اذا  
كان

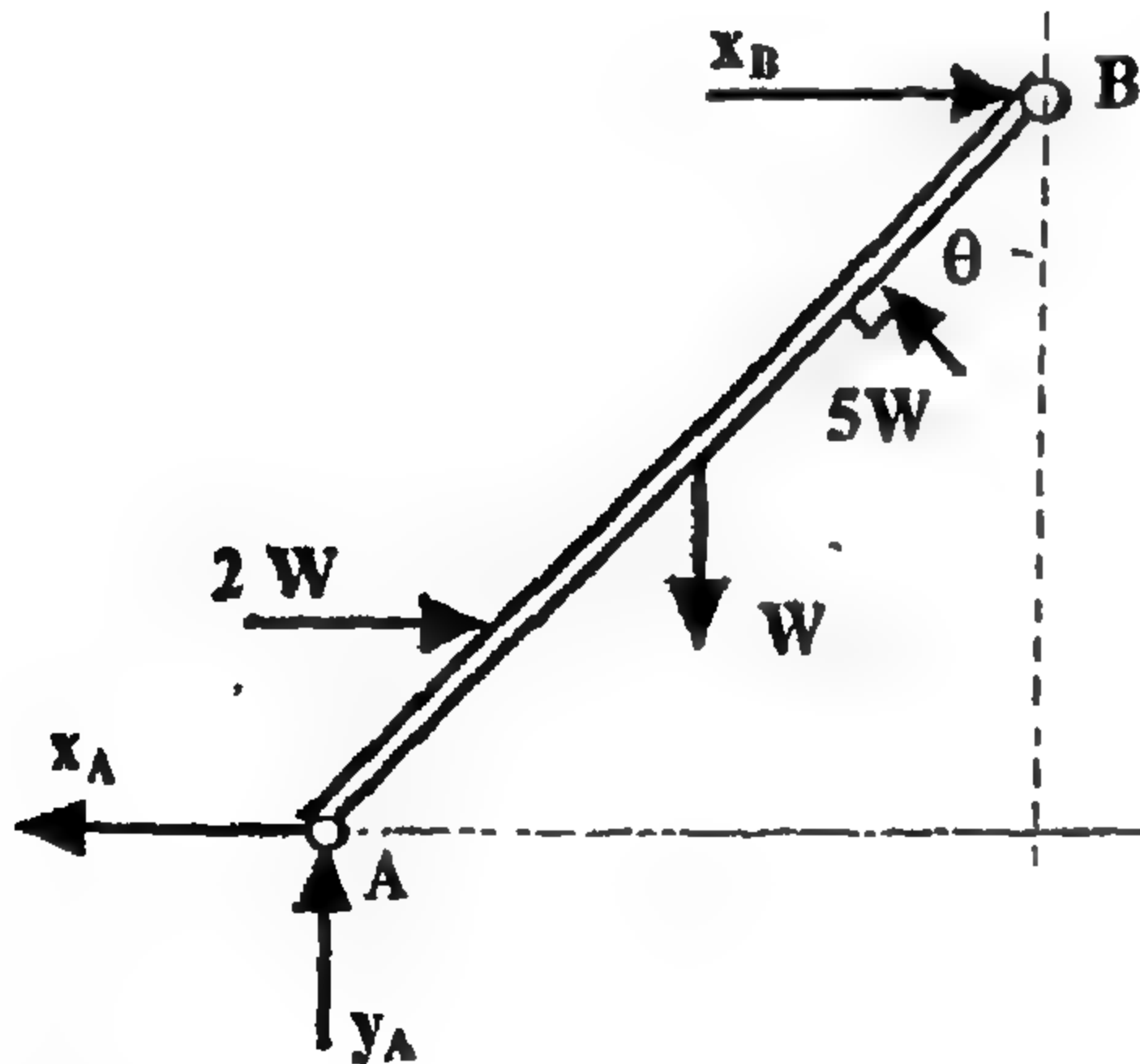
$$AB = BC = 10 \text{ ft}$$

$$\tan \theta = 3/4$$

$$AD = CF = 2.5 \text{ ft}$$

$$EB = GB = 3 \text{ ft}$$

الحل :



اجراء الحل على نصف  
المجموعة بدراسة اتزان AB ، الجسم  
AB يحتوي على ثلاثة مجاهيل فقط و  
هي  $x_A$  ،  $y_A$  ،  $x_B$

$$\sum M_A = 0$$

$$8x_B + 3W + 2W \times 2 = 5W \times 7$$

$$x_B = 7/2W$$

$$\sum x = 0$$

$$x_B + 2W = x_A + 5W \cos \theta$$

$$x_A = \frac{3}{2} W$$

$$\sum y = 0$$

$$y_A + 5W \sin \theta = W$$

$$y_A = -2W$$

أي أن  $y_A$  عكس الاتجاه المفروض و يكون بعد ذلك رد الفعل المفصل C متماثل .

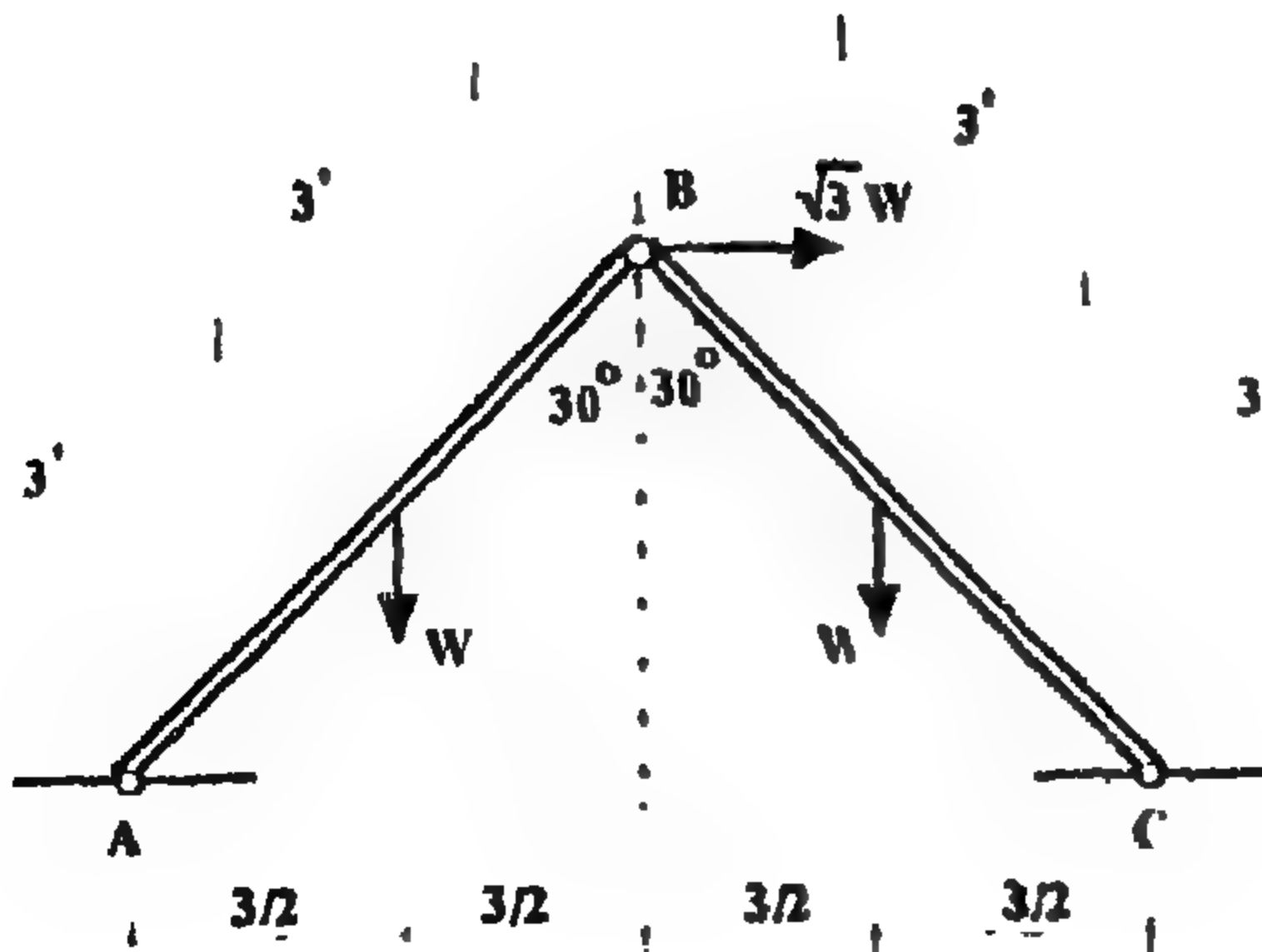
## ٢ - المفصلات المحملة :

إذا أثرت قوة على مفصل يحمل عضوين محملين فإنها تعالج بإحدى الطريقتين :

١ - إذا كانت القوة منطبقة على محور تماثل نعتبر نصفها مؤثرا على أحد الجسمين و النصف الآخر على الجسم الآخر .

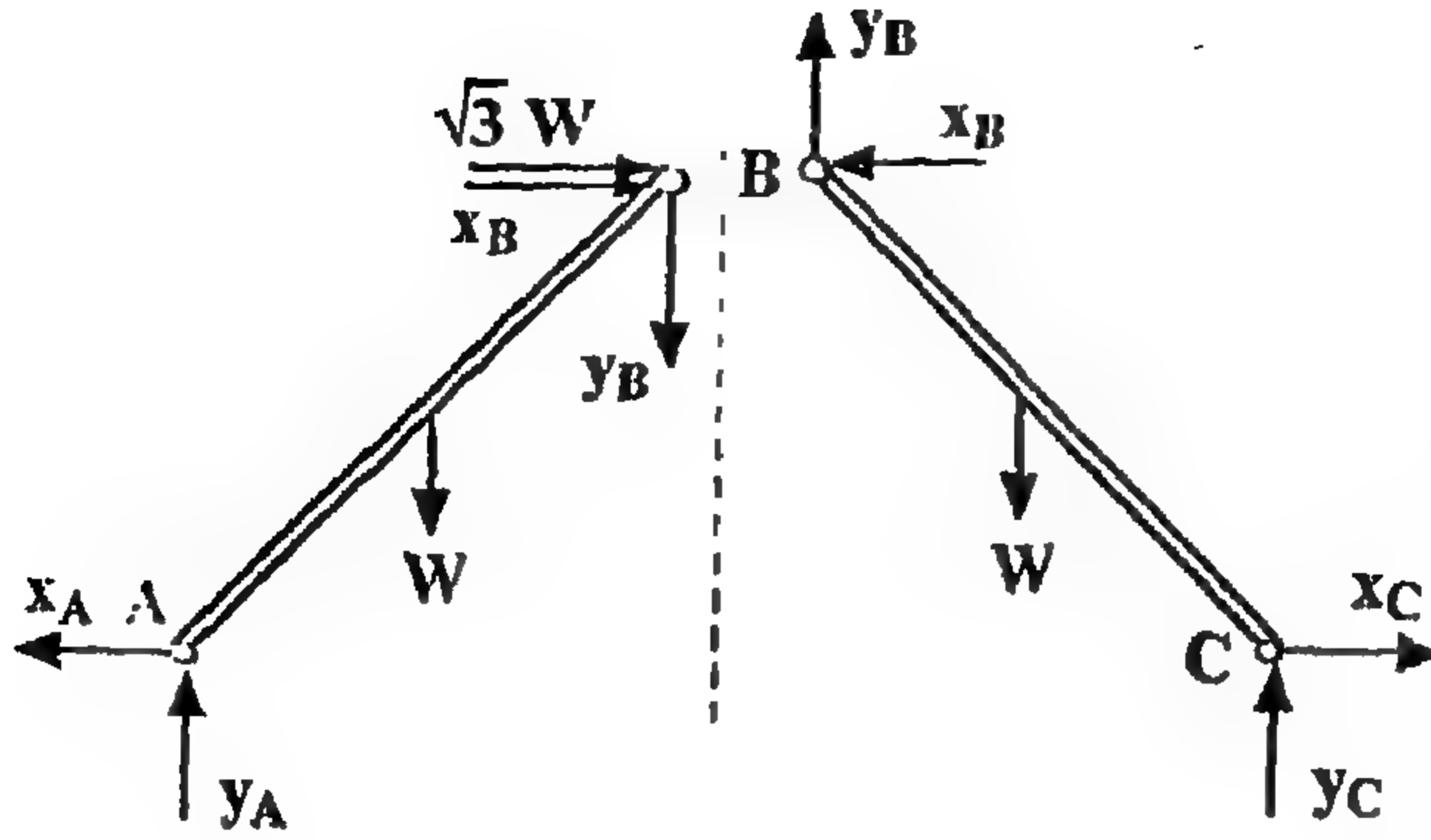
٢ - إذا كانت القوة ليست في وضع متماثل نعتبرها كلها مؤثرة على أحد الجسمين.

مثال ٢ :



عين ردود الأفعال في  
المفصلات الثلاثة A , B , C  
للهيكل المفصلي الموضح في  
الشكل .

الحل :



نعتبر القوة  
الأفقية  $\sqrt{3}W$   
المؤثرة على المفصل  
B واقعة على  
الجسم AB مثلاً ثم  
نكمل حل المسألة  
عادياً كما يأتي:

أولاً بدراسة اتزان المجموعة.

$$\sum M_C = 0$$

$$\sqrt{3}W \cdot 3\sqrt{3} + 6y_A = 1.5W + 4.5W$$

$$y_A = -\frac{1}{2}W$$

أي عكس الاتجاه المفروض.

$$\sum y = 0$$

$$y_A + y_C = W$$

$$y_C = 5/2W$$

بدراسة اتزان BC

$$\sum M_B = 0$$

$$3y_C + 3\sqrt{3}x_C = 1.5W$$

$$3\left(\frac{5}{2}W\right) + 3\sqrt{3}x_C = 1.5W$$

$$x_C = -\frac{2}{3}\sqrt{3}W$$

أي عكس الاتجاه المفروض.

$$\sum X = 0$$

$$X_B = X_C = -\frac{2}{3}\sqrt{3} W$$

$$\sum Y = 0$$

$$Y_B + Y_C = W$$

$$Y_B = \frac{3}{2} W$$

من التوازن AB

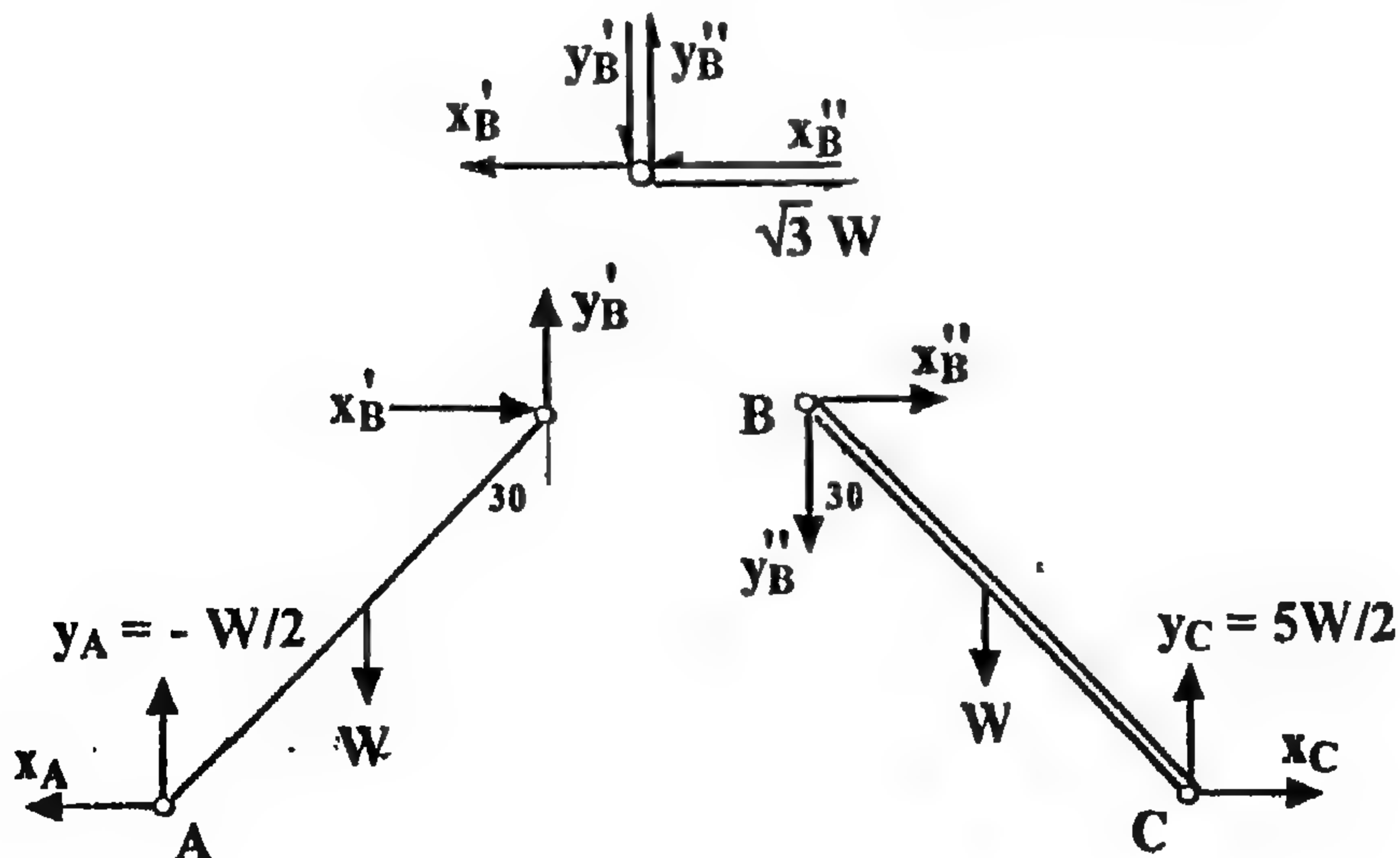
$$\sum X = 0$$

$$X_A = X_B + \sqrt{3} W$$

$$X_A = \frac{1}{3}\sqrt{3} W$$

حل آخر أدق :

في الحل السابق اعتبرنا الحمل  $\sqrt{3}W$  واقع على الجسم AB بينما هو في الحقيقة يقع على المسار B الذي يصل الجسمين AB و BC و لذلك سنأخذ في هذا الحل اتزان المسار B على حده تحت تأثير الحمل  $\sqrt{3}W$  وردود أفعال كل من AB و BC عليه ( $x'_B, y'_B, x''_B, y''_B$ ) ثم نأخذ اتزان كل من الجسمين BC و AB كل على حده و بالطبع لن تتغير معدلات اتزان المجموعة .



من التران المجموعة:

$$y_A = -\frac{1}{2}W$$

$$y_C = \frac{5}{2}W$$

من التران AB' :

$$\Sigma y = 0$$

$$y'_B + y_A - W = 0$$

$$y'_B = \frac{3}{2}W$$

$$\Sigma M'_B = 0$$

$$W \times \frac{3}{2} - Y_A(3) - X_A(3\sqrt{3}) = 0$$

$$x_A = \frac{\sqrt{3}}{3}W$$

$$\Sigma x = 0$$

$$x'_B - x_A = 0$$

$$x'_B = \frac{\sqrt{3}}{3}W$$

من التران CB'' :

$$\Sigma y = 0$$

$$y_C - W - y''_B = 0$$

$$y''_B = \frac{3}{2}W$$

$$\Sigma M_{B''} = 0$$

$$y_C(3) + x_C(3\sqrt{3}) - W(3/2) = 0$$

$$x_C = -\frac{2}{3}\sqrt{3}W$$

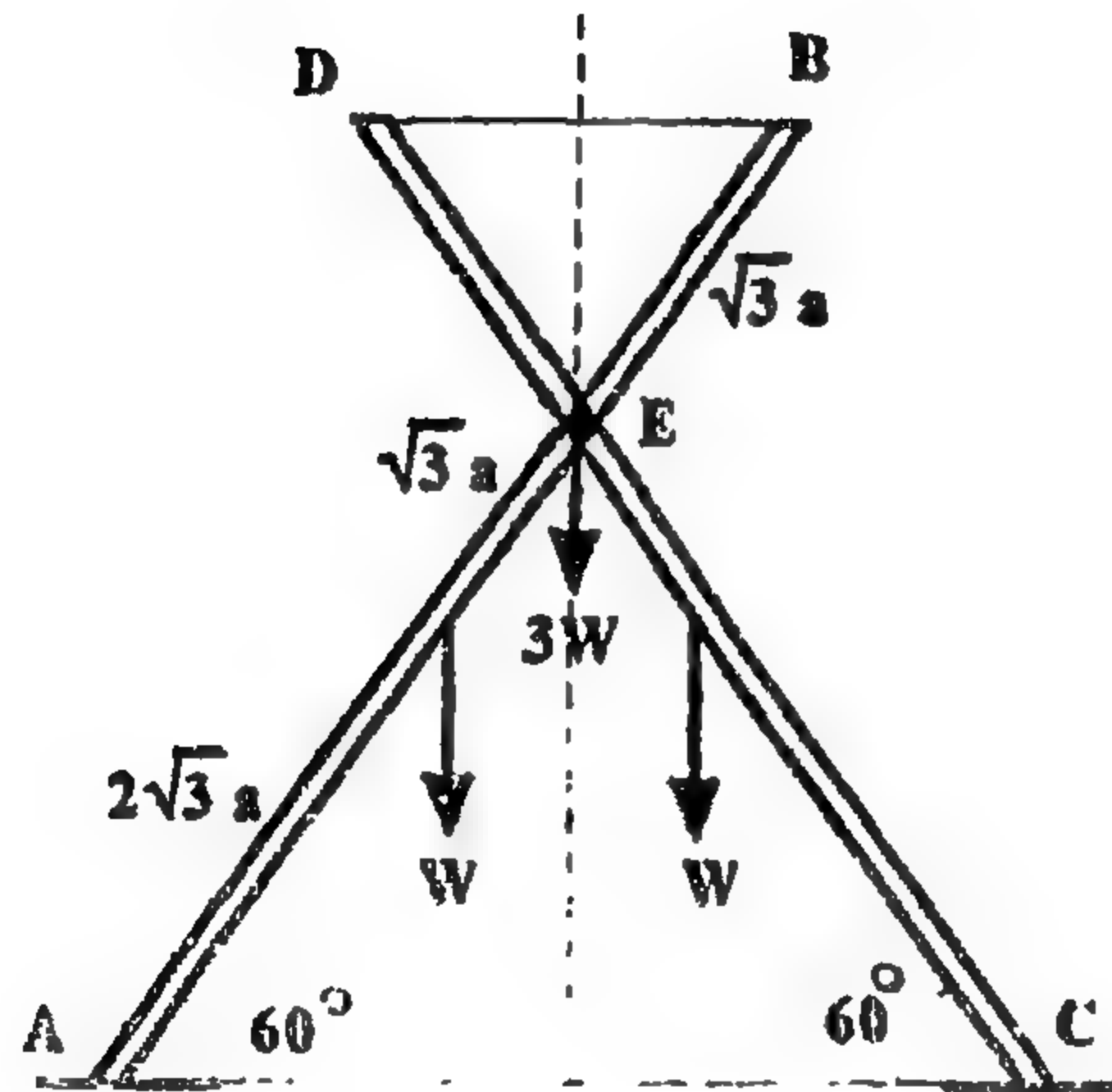
$$\sum x = 0$$

$$x_C + x_B'' = 0$$

$$x_B = \frac{2}{3}\sqrt{3}W$$

و يتضح للطالب أن نتائج هذا الحل تتفق و الحل السابق في الإرتكازات الخارجيه (  $y_C$  ,  $A$  ,  $C$  )  
بينما تتباين عند المفصل  $B$  و يمكن تفسير ذلك بأنه في هذا الحل قد جعلنا الحمل  $\sqrt{3}W$  المؤثر عند المسار  $B$  في المجموعة الى حلين أحدهما ( محصلة  $x_B'$  ,  $y_B'$  ) على الجسم  $AB$  و الآخر ( محصلة  $x_B''$  ,  $y_B''$  ) على الجسم  $BC$  عند دراسة اتزان كل من الجسمين على حده .

مثال ٣ :



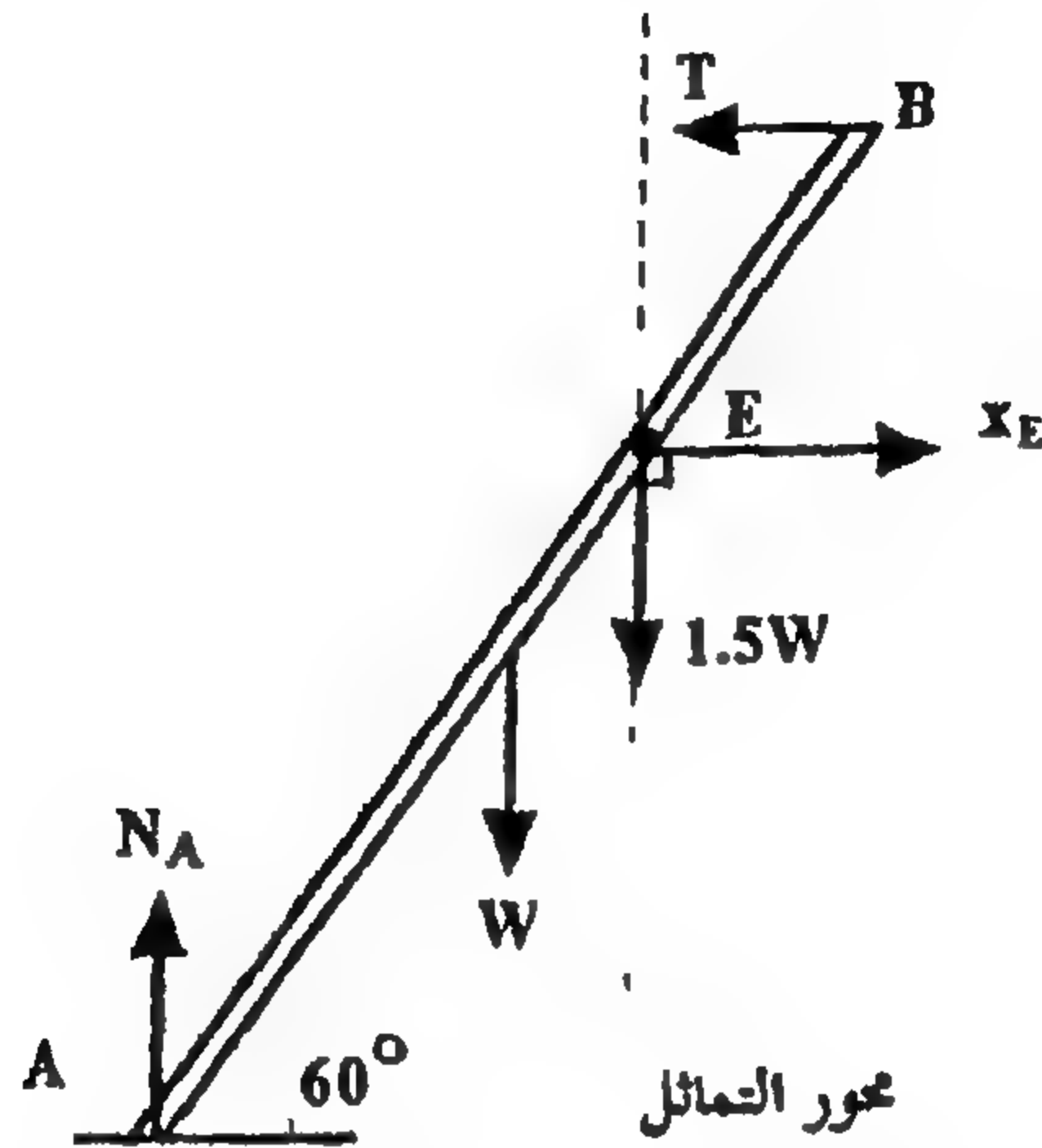
يرتكز اللوحان  $AB$  و  $CD$  على أرض المثقبة المسماة و يتصلان مفصليا في  $E$  . يحفظ اتزان اللوحين  
بحيث افقي  $BD$  و يؤثر حمل رأسي  $3W$  على المفصل كما في الشكل ، طول كل من اللوحين  $4\sqrt{3}a$   
ووزنه  $W$  .

عين رد فعل الأرض عند كل من  $A$  ,  $C$  و كذلك الشد في الحيط ورد فعل المفصل  $E$  .



الحل :

اللوحة متماثلان حول الخط الراسي المار بالمفصل الداخلي E و القوة  $3W$  تؤثر على المفصل في E و منطقة على خط التماثل . نحل المسألة على نصف تماثل فقط كما يأتي :



بدراسة اتزان AB

$$\sum Y = 0$$

$$N_A = W + 1.5W$$

$$N_A = 2.5W \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum M_E = 0$$

$$N_A \cdot \frac{3\sqrt{3}a}{2} = W \frac{\sqrt{3}a}{2} + T \cdot \frac{3a}{2}$$

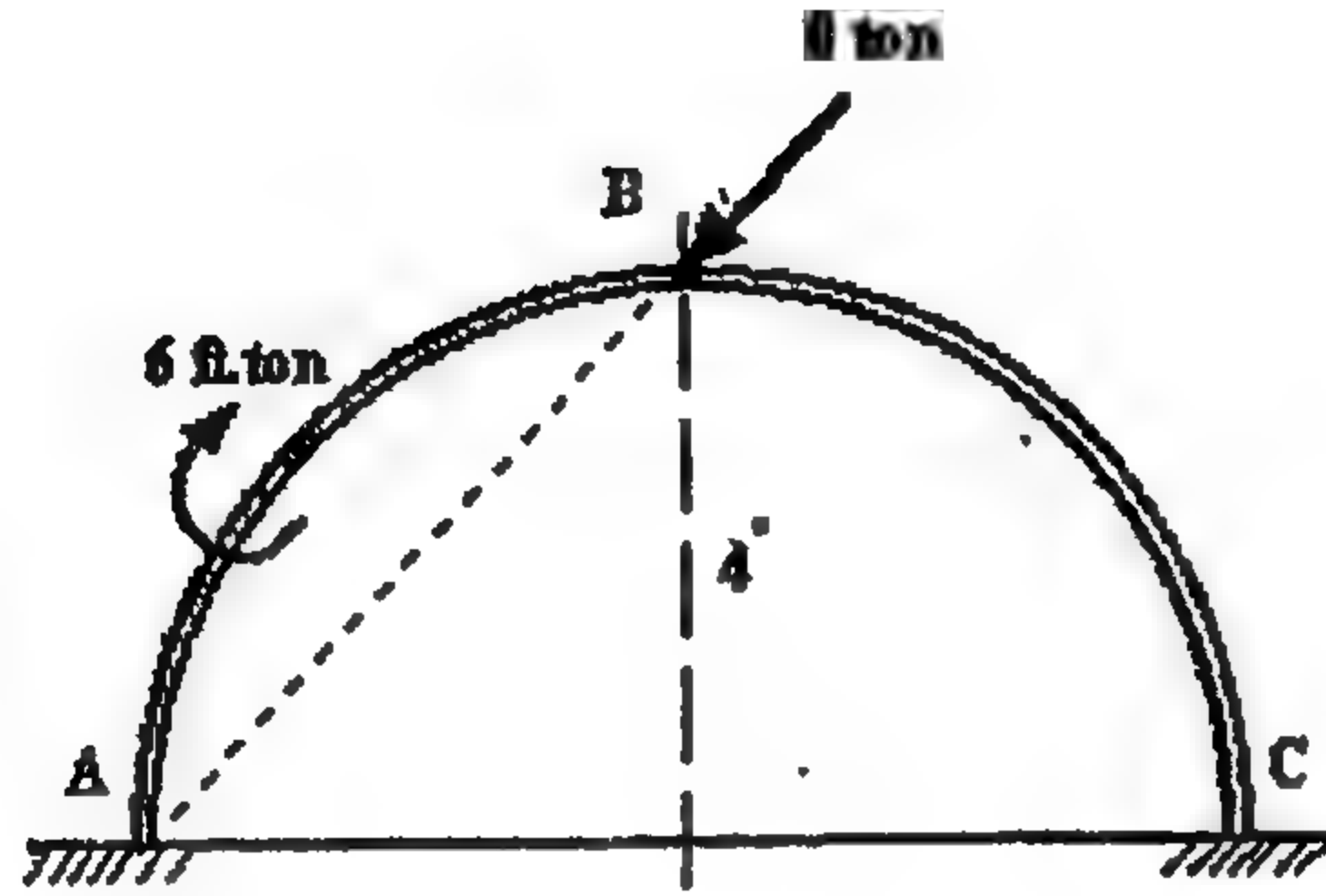
$$T = \frac{6.5}{3} \sqrt{3}W \dots \dots \dots (2)$$

$$\sum X = 0$$

$$X_E = T = \frac{6.5}{3} \sqrt{3}W \dots \dots \dots (3)$$

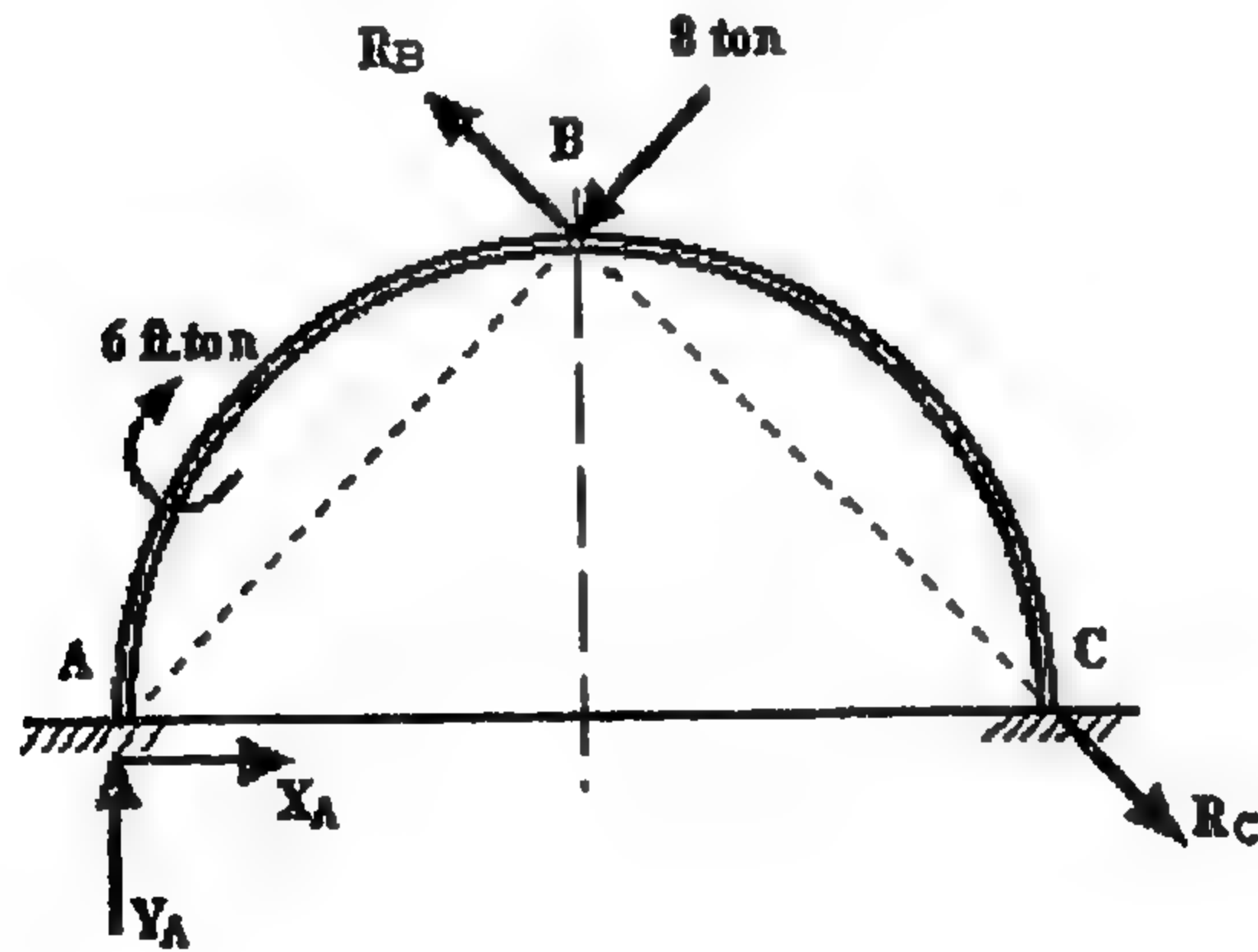
#### مثال ٤ :

عقد ثلاثي المفاصل ABC يؤثر عليه عزم ازدواج مقداره ٦ قدم طن و قوة ٨ طن كما في الشكل. عين ردود فعل المفاصل الثلاثة A و B و C.



الحل :

القوة ٨ طن المؤثرة على المفصل B يمكن اعتبارها واقعة على AB و بذلك يصبح BC وضلة خفيفة و ينشأ عند B رد فعل  $R_B$  و كذلك عند C رد فعل  $R_C = -R_B$ .



بدراسة اتران AB :

$$\sum M_A = 0$$

$$6 = 4\sqrt{2}R_B$$

$$R_B = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$X_A = 8 \cos 45 + R_B \cos 45$$

$$X_A = \left( \frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right) \text{ ton}$$

$$\sum Y = 0$$

$$Y_A = 8 \sin 45 - R_B \sin 45$$

$$= \left( \frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4} \right) \text{ ton}$$

$$R_C = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ ton}$$

ملاحظات عامة:

١ - عند الانتقال من جسم إلى جسم يراعى سريان قانون الفعل ورد الفعل على ما بين الجسمين من ردود أفعال (لكل فعل رد فعل مساو في المقدار ومضاد في الاتجاه).

٢ - اذا أثرت قوة على مفصل داخلي - عند الفصل تعتبر القوة والعة على أحد الأجسام المتصلة بالمفصل المحمل.

٣ - التماثل الاستاتيكي في أنظمة مجموعة الأجسام حول محورها. يلزم أن يتوفر فيه شرطين هما:

أ - تماثل هندسي (زوايا + أبعاد)

ب - تماثل في القوى الخارجة المؤثرة.

في هذه الحالة يكفي بدراسة نصف أجسام المجموعة فقط مع مراعاة عدم قطع أجسام (يمكن قطع الحيط الخفيف أو القضيب الخفيف أو الركيزة البندولية) ويلاحظ أنه نتيجة للتماثل يتبع ذلك تماثل في ردود الأفعال.

٤ - المفصل الواقع على محور التماثل Symmetry axis يسمى مفصل تماثل. رد فعل مفصل التماثل يكون عمودي على محور التماثل أي تنعدم مركبته المنطبقة على محور التماثل.

٥ - إذا كان مفصل التماثل محمل - فعند الفصل نأخذ نصف الحمل فقط.

٦ - لحل مسائل المجموعات المفصلية نتبع الخطوات الآتية:

أ - نبحث عن شكل به ثلاث مجاهيل على الأكثر. فإذا وجدنا مثل هذا الشكل نعتبره جسماً واحداً متزاناً بكتابة ثلاث معادلات اتزان له يمكن إيجاد هذه المجاهيل الثلاثة ثم نتقل إلى جسم آخر.

ب - إذا لم نجد الجسم المذكور في الخطوة الأولى نحاول من دراسة اتزان المجموعة المفصلية كلها إيجاد مجهول أو مجهولين ثم نتقل إلى أحد الأجسام الأخرى.

ج - إذا لم نتمكن من إيجاد أي مجهول من دراسة اتزان المجموعة نحاول إيجاد معادلتين في مجهولين.

د - إذا نتجت قيمة أي من المجاهيل بالسالب فمعنى ذلك أن الاتجاه الصحيح هو عكس ما فرضناه ولا يلزم إعادة الحل بل يكفي بإشارة المجهول التي تدل على اتجاهه الصحيح.

مثال ٥ :

أربعة قضبان متساوية ثقيلة طول كل منها  $h$  ووزنه  $W$  تربط مفصلياً لتؤلف هيكلاً مربعاً ABCD يحفظ شكل المربع قضيب خفيف BD. علق الهيكل من A كما في الشكل أوجد ردود فعل المفاصل والضغط في القضيب الخفيف BD. حل تحليلياً وبيانياً

الحل التحليلي:

دراسة اتزان المجموعة كلها (مجموعة متماثلة)

$$\sum Y = 0$$

$$P - W - W - W - W = 0$$

$$\therefore P = 4W$$

اتزان العضو BC

$$\sum M_B = 0$$

$$X_C \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right) + W \left( \frac{A}{2\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$\therefore X_C = -\frac{W}{2}$$

$$\sum X = 0$$

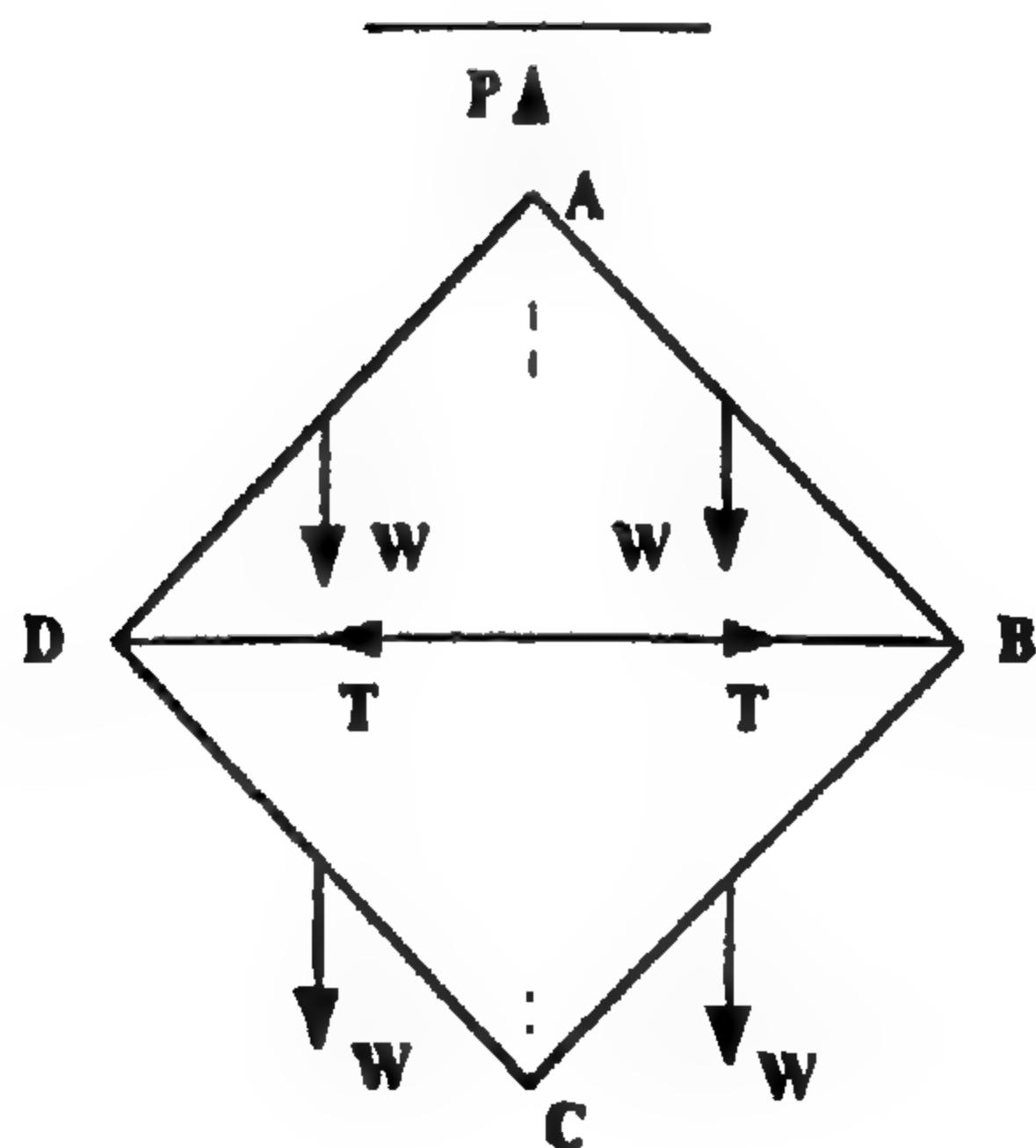
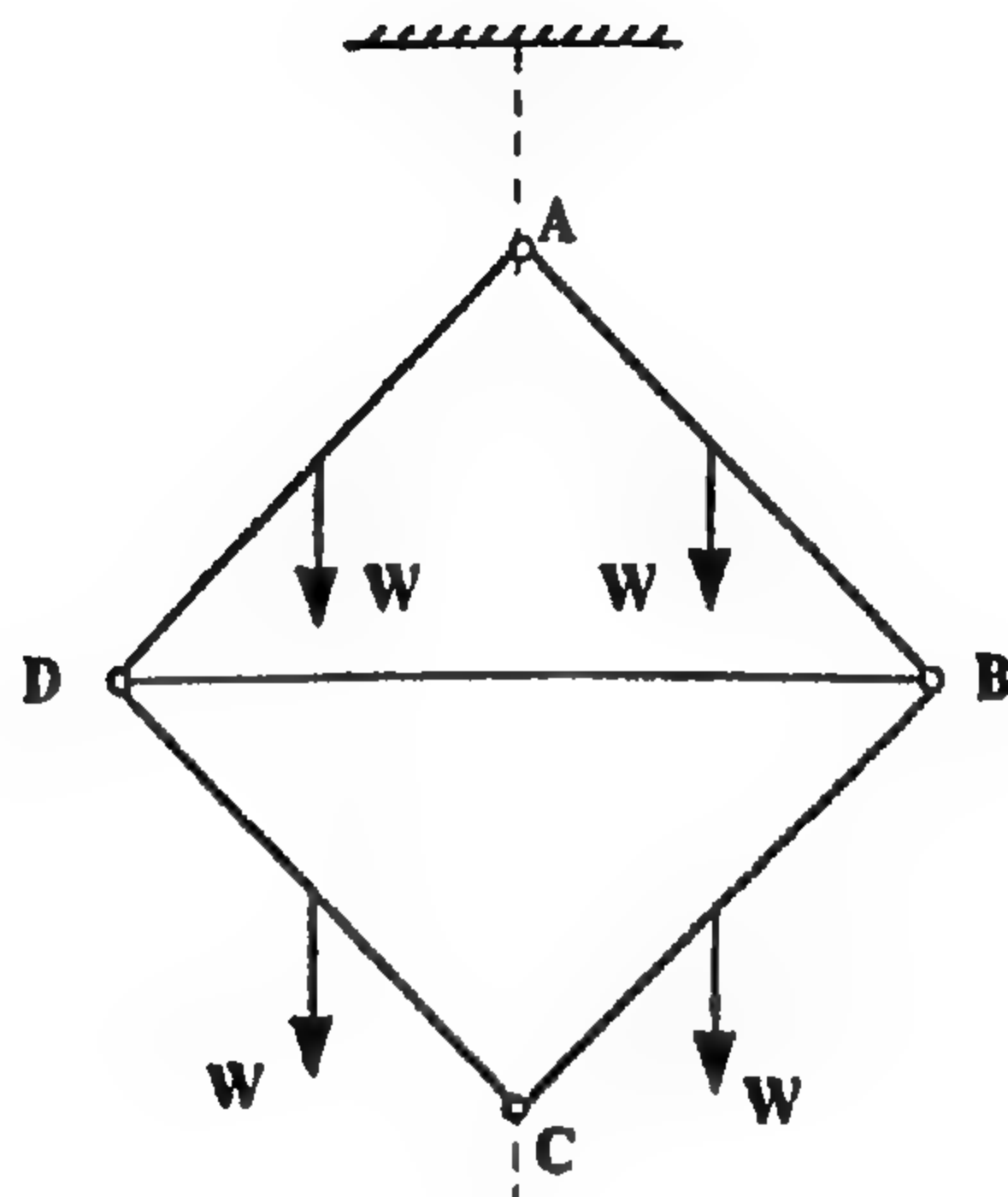
$$X_C - X_B = 0$$

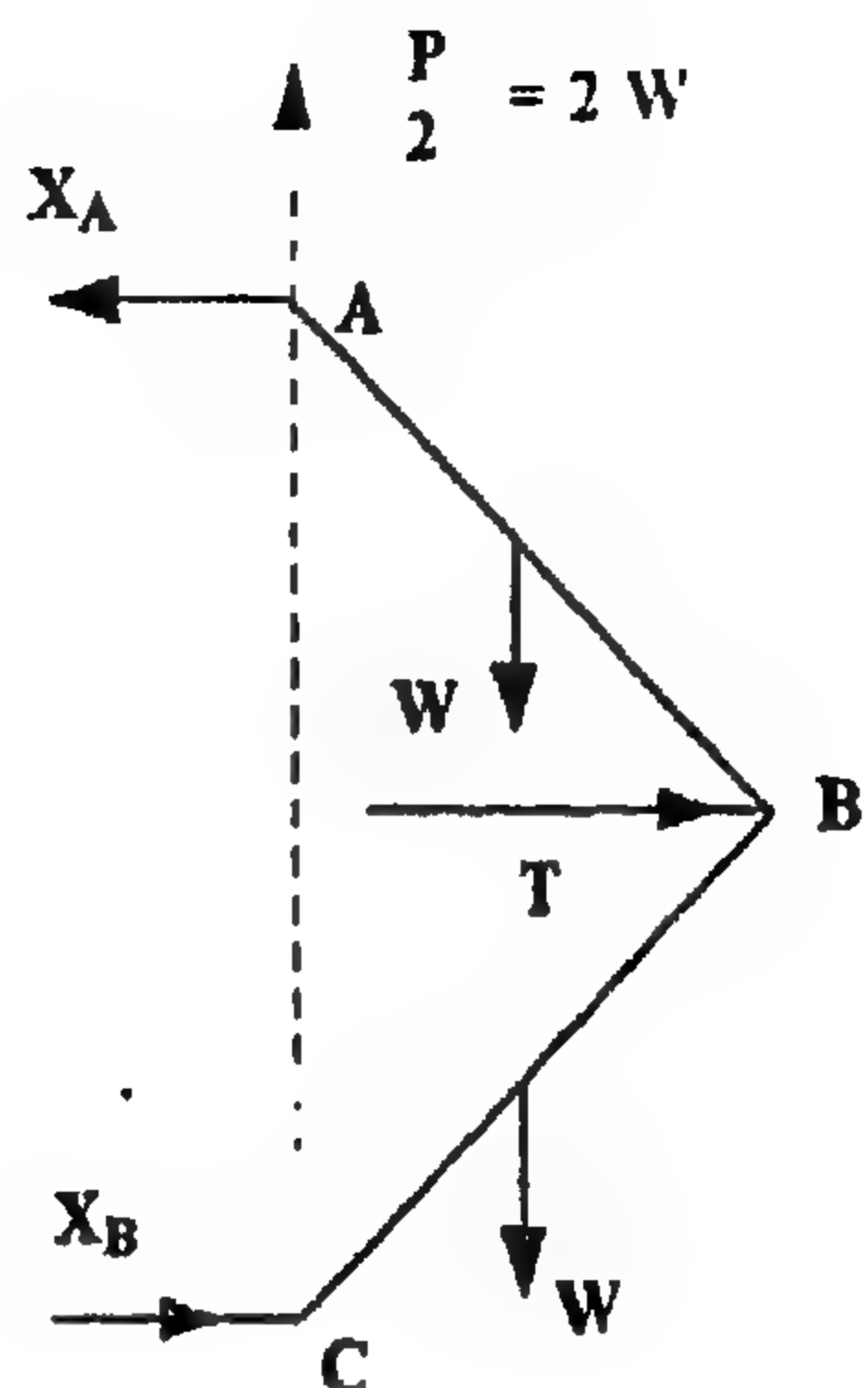
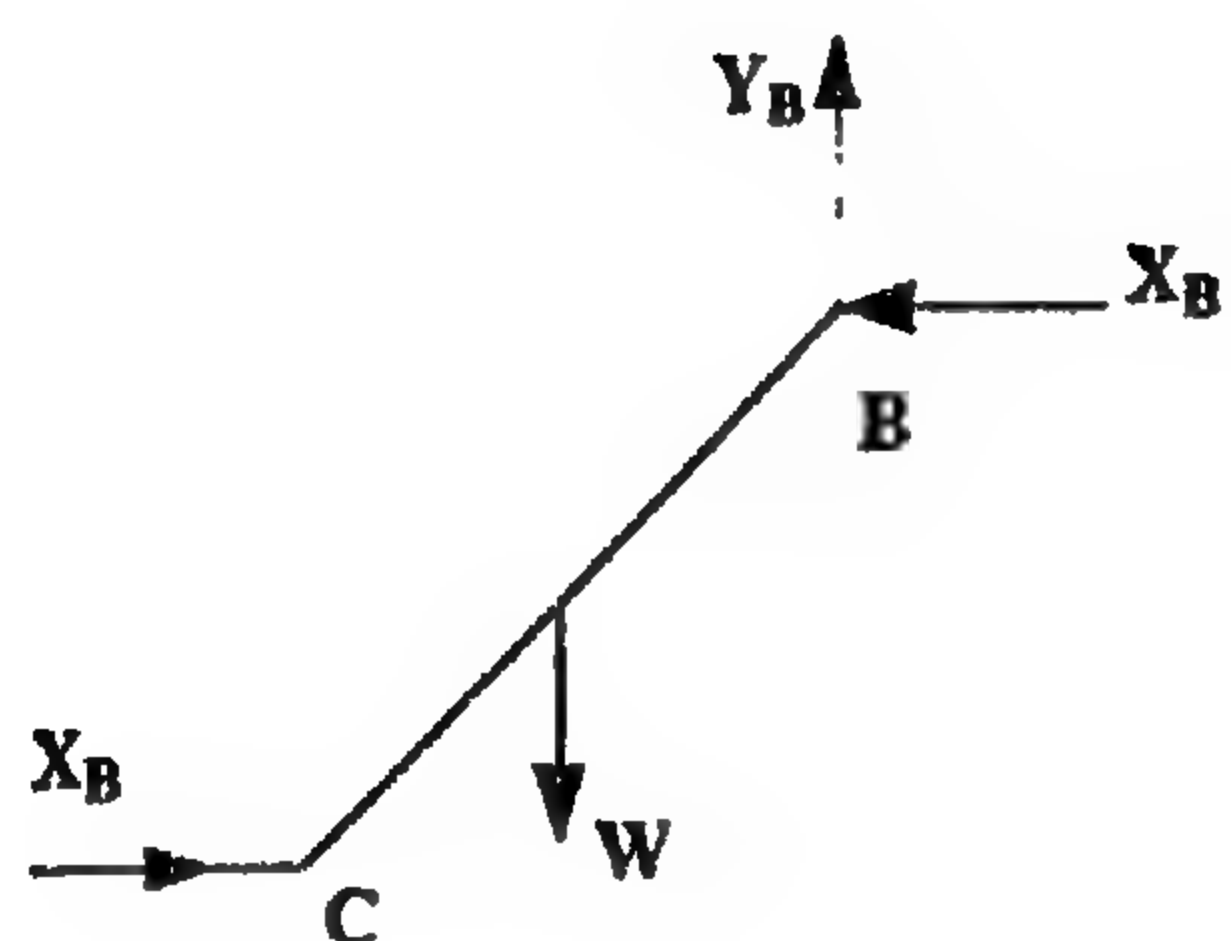
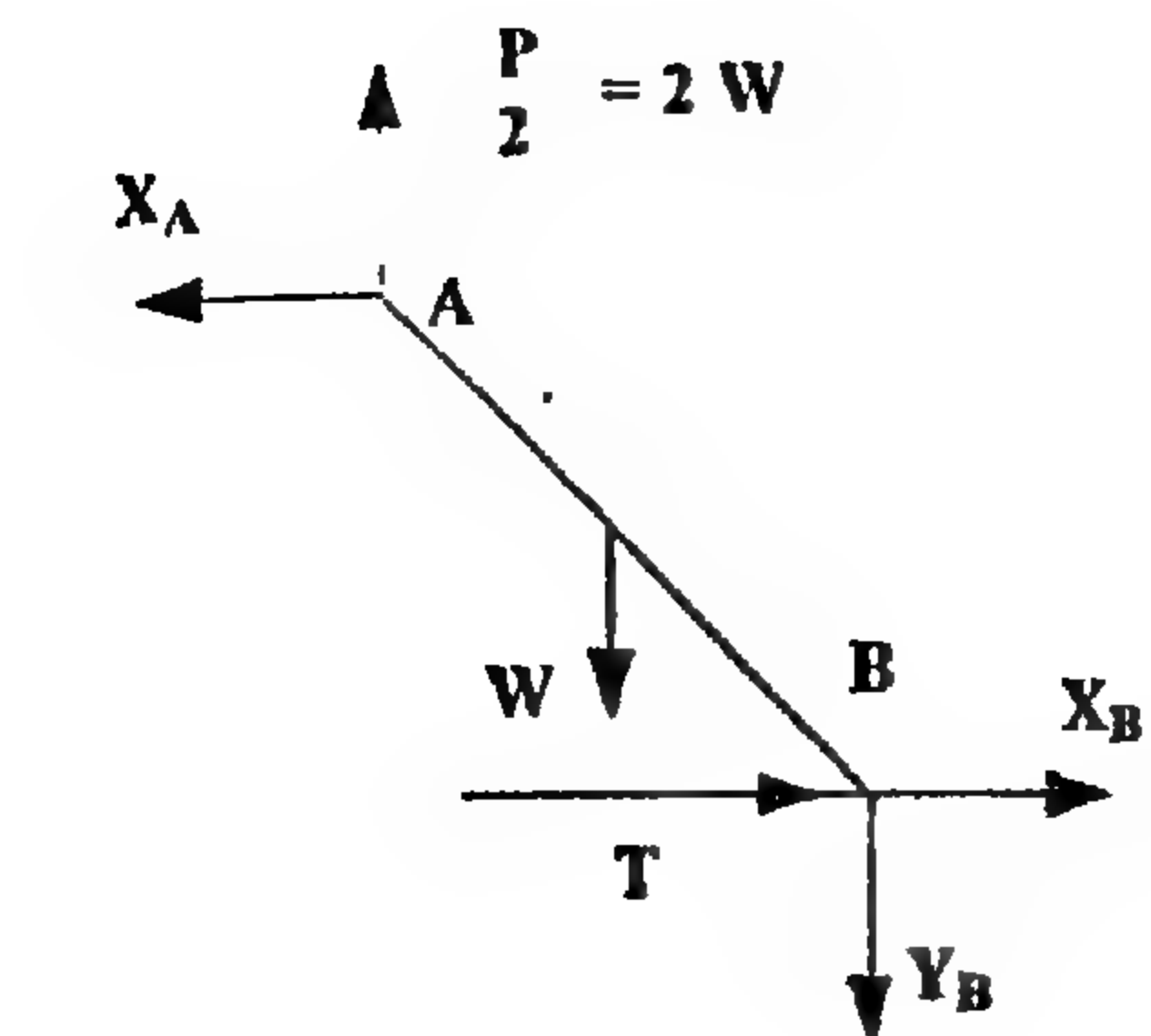
$$\therefore X_B = -\frac{W}{2}$$

$$\sum Y = 0$$

$$Y_B - W = 0$$

$$Y_B = W$$





اتزان العضو AB

$$\sum M_A = 0$$

$$-W\left(\frac{A}{2\sqrt{2}}\right) + T\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right) + X_B\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right) - Y_B\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\therefore T = 2W$$

$$\sum X = 0$$

$$-X_A + T + X_B = 0$$

$$X_A = 1.5W$$

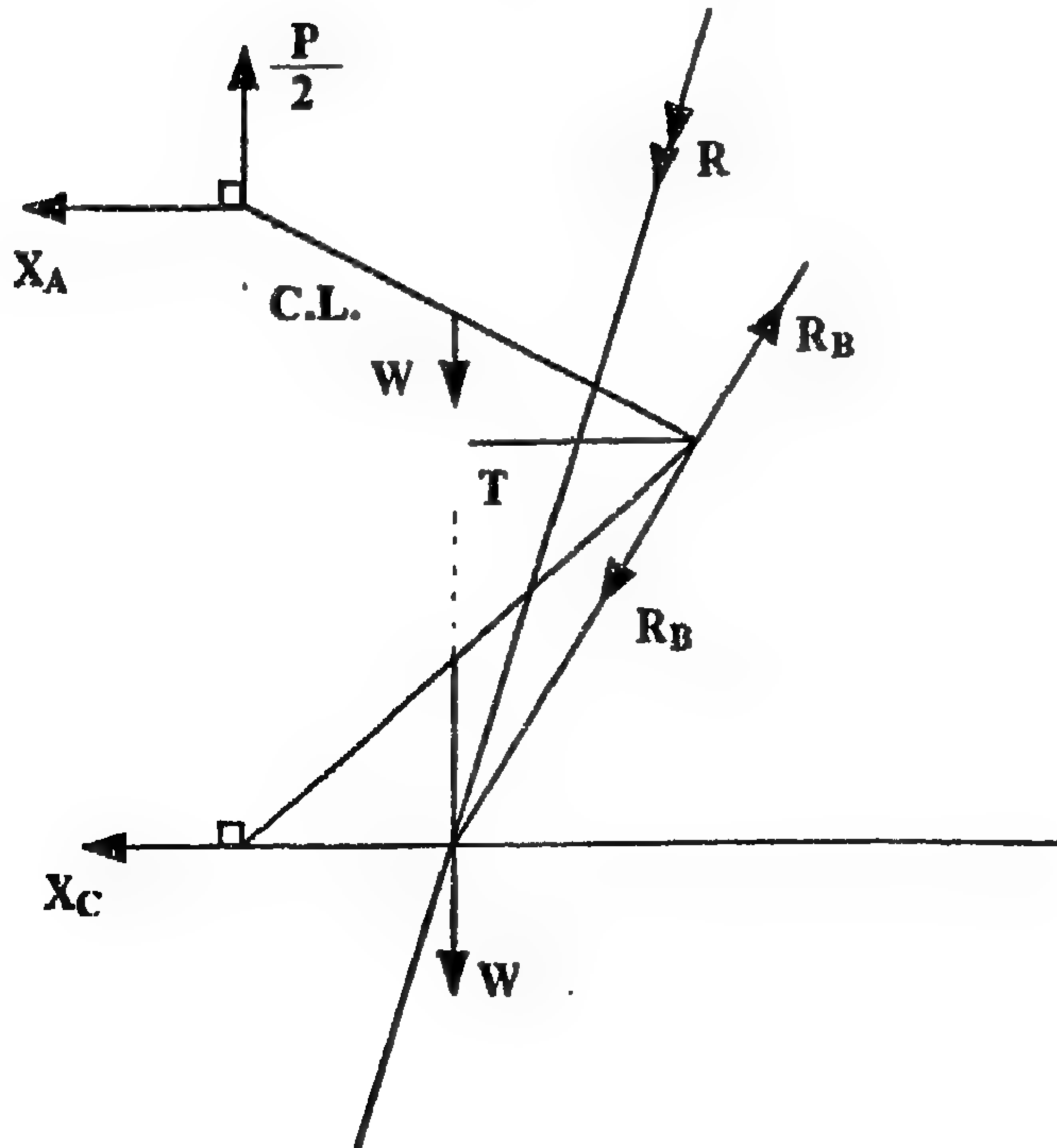
ملخص الأجوبة:

A	B	C	
$X_A = 1.5W$	$X_B = -\frac{W}{2}$	$X_C = -\frac{W}{2}$	$T = 2W$
$Y_A = 4W$	$Y_B = W$	$Y_C = 0$	سند

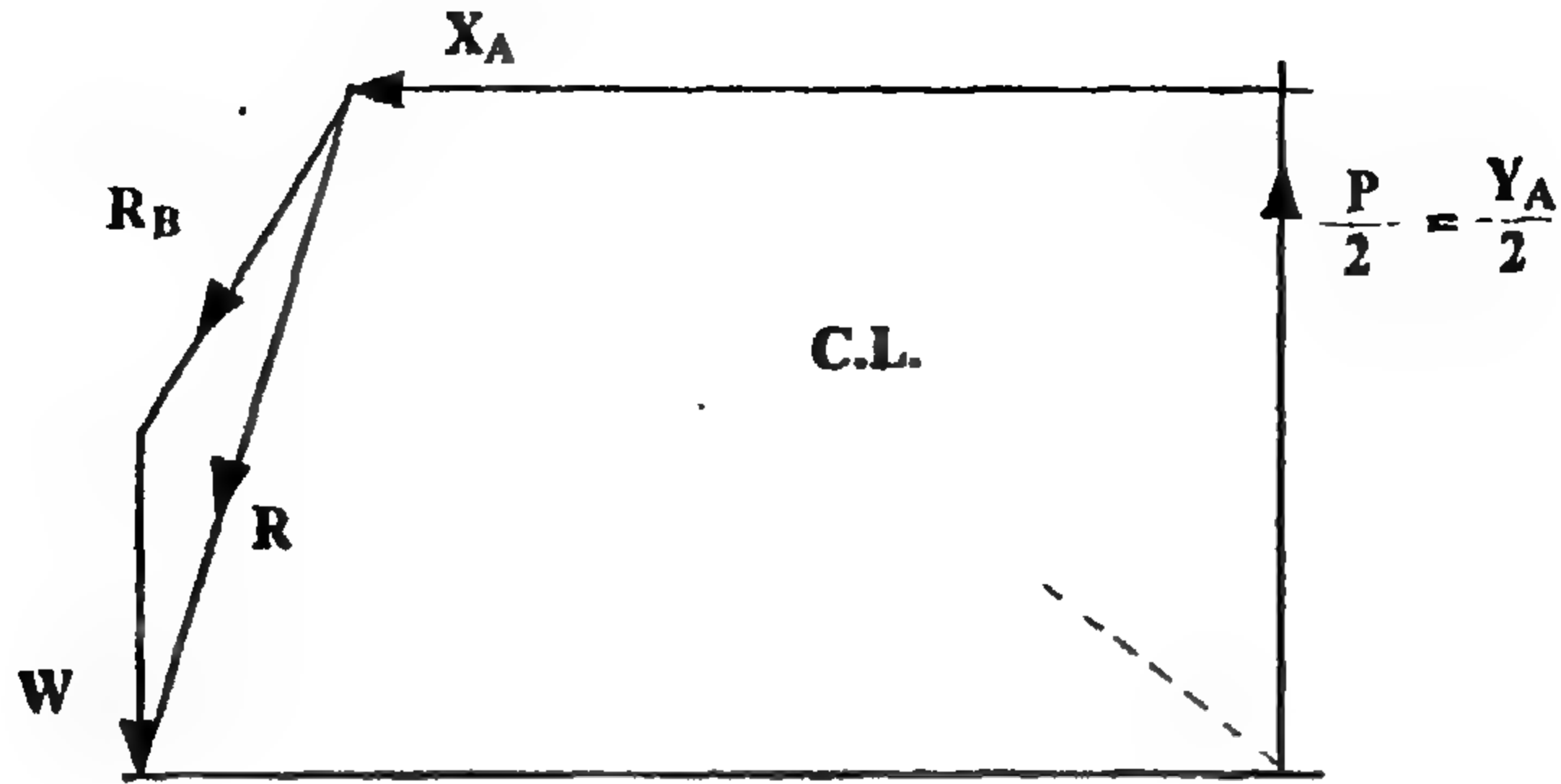
الحل البياني:

مقياس رسم المسافات:  $a = 6 \text{ cm}$  ومنها  $1 \text{ cm} = \frac{a}{6}$

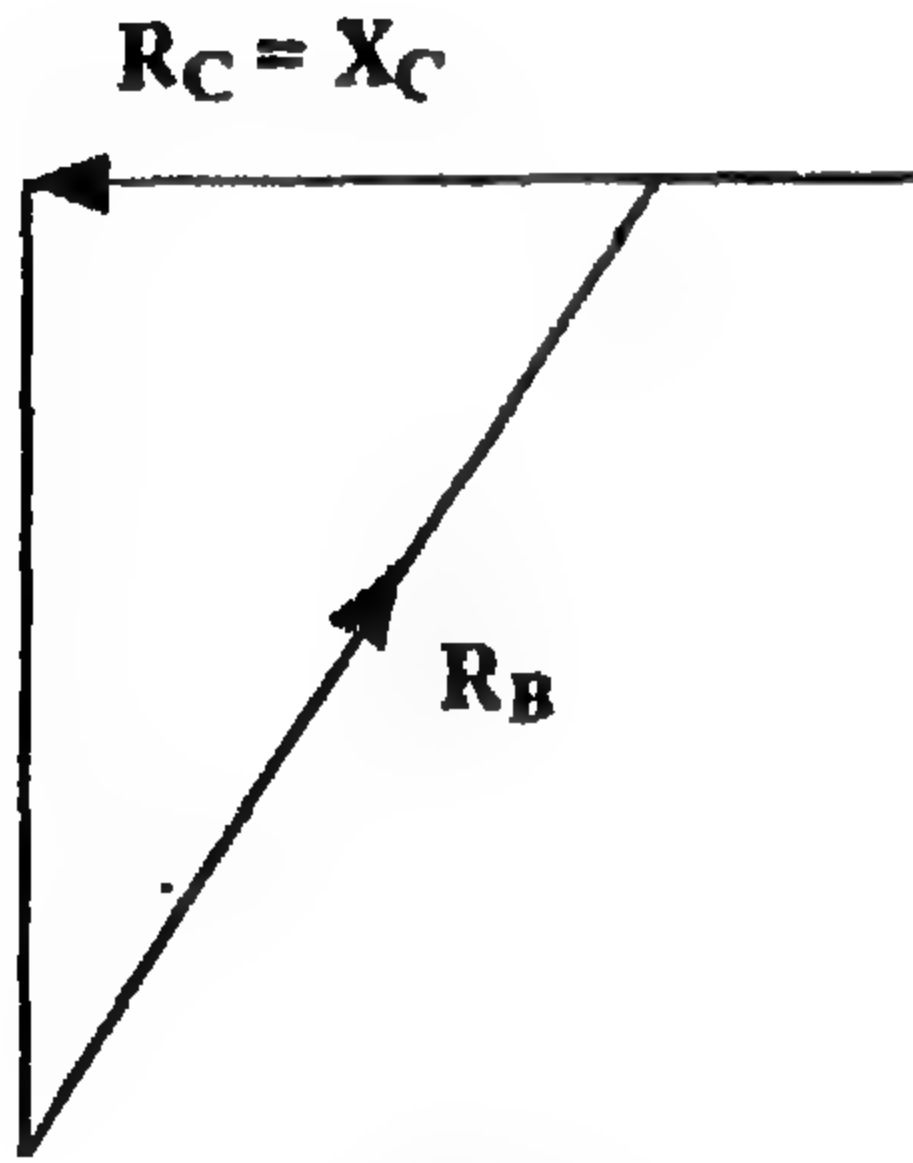
مقياس رسم القوى  $W$  و  $T = 4 \text{ cm}$  ومنها  $1 \text{ cm} = \frac{W}{4}$



شكل (أ)



شكل (جـ)



شكل (ب)

شكل (أ) يمثل شكل خطوط العمل للقوى المؤثرة على الهيكل كله وعلى كل قضيب على حده. شكل (ب) يمثل مثلث القوى لاتزان القضيب BC، شكل (جـ) يمثل مضلع القوى لاتزان القضيب AB

النتائج: من الرسم والقياس.

$$R_C = 0.5 W$$

$$R_B = 1.2 W$$

$$T = 2 W$$

$$X_A = 1.5 W$$

$$Y_A = 4 W$$

$$P = 4 W$$

مثال ٦ :

الهيكل المفصلي يتألف من أربع قضبان خفيفة AB ، BC ، AD ، DE ومؤثر عليه بقوة أفقية P عند المفصل A كما في الشكل (أ)، عين ردود فعل المفصل. حل تحليلياً وبياناً



الحل التحليلي: شكل (ب)

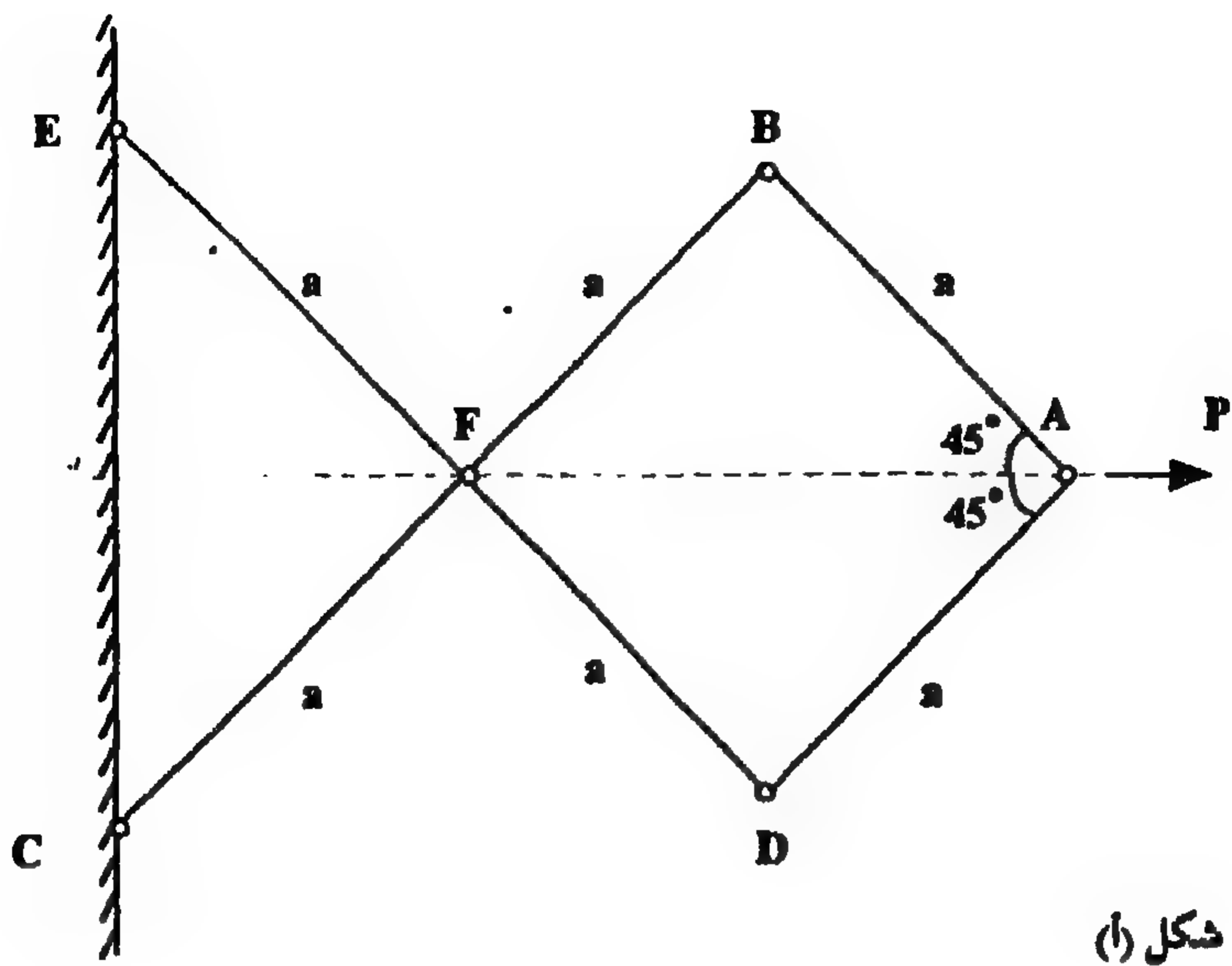
القضبان AD ، AB يعتبران وصلتان خفيفتان نستبدل كل واحد منهما بقوة محورية (شد أو ضغط في اتجاهه) ونظراً للتماثل تكون القوتان أيضاً متماثلتان ولذلك يمكن إجراء الحل على قضيب واحد متماثل BC ، DE مع ملاحظة أن المفصل F مفصل تماثل داخلي. لاحظ كذلك أن كلا من DE ، BC لا يمكن اعتباره غير محمل نظراً لوجود ثلاث مفاصل به (محمل يرد فعل المفصل F)

اتزان المفصل A: شكل (ج)

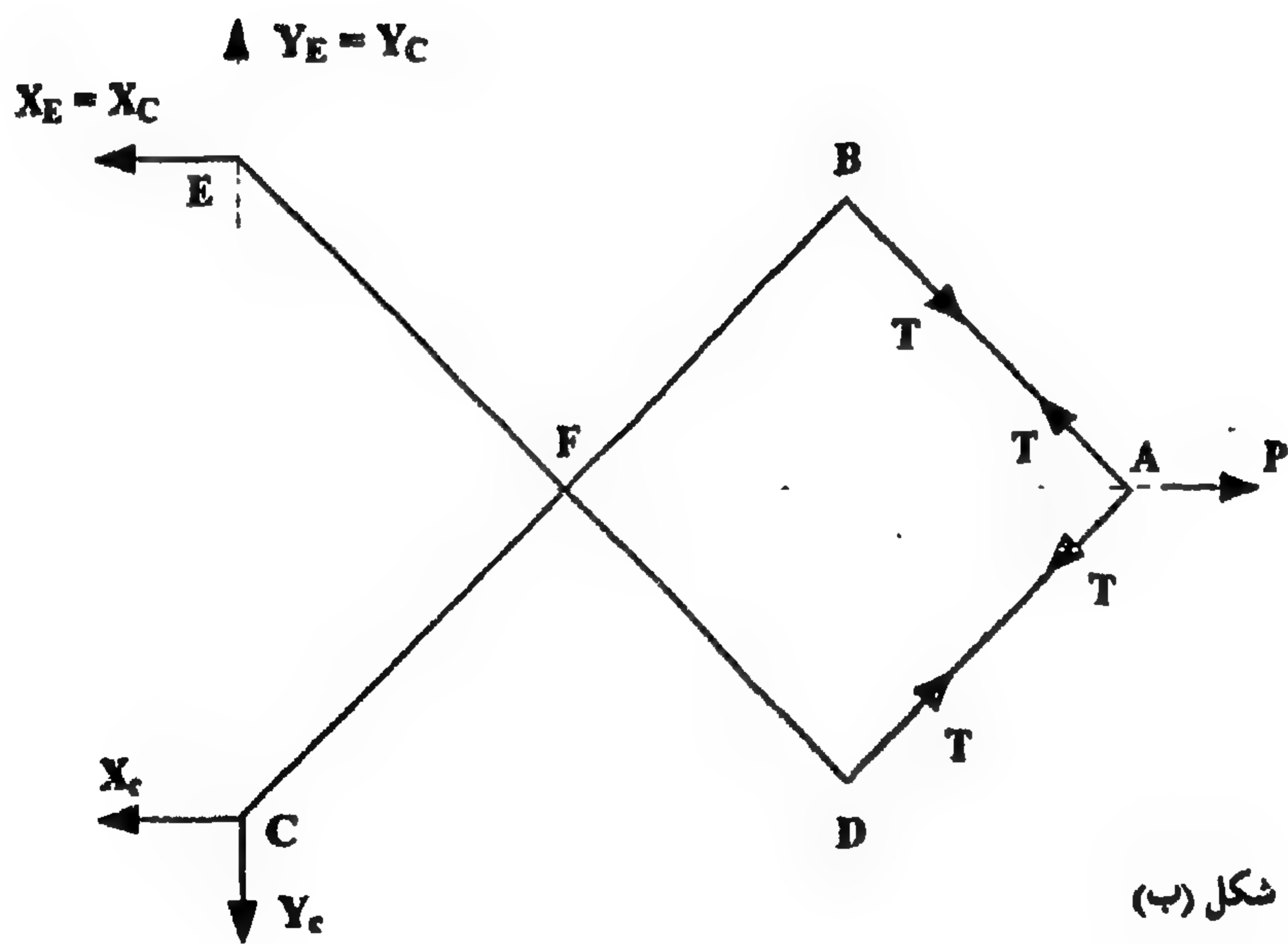
$$\begin{aligned}\sum X &= 0 \\ 2T \cos 45 - P &= 0 \\ \therefore T &= \frac{P}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

اتزان القضيب BC شكل (د)

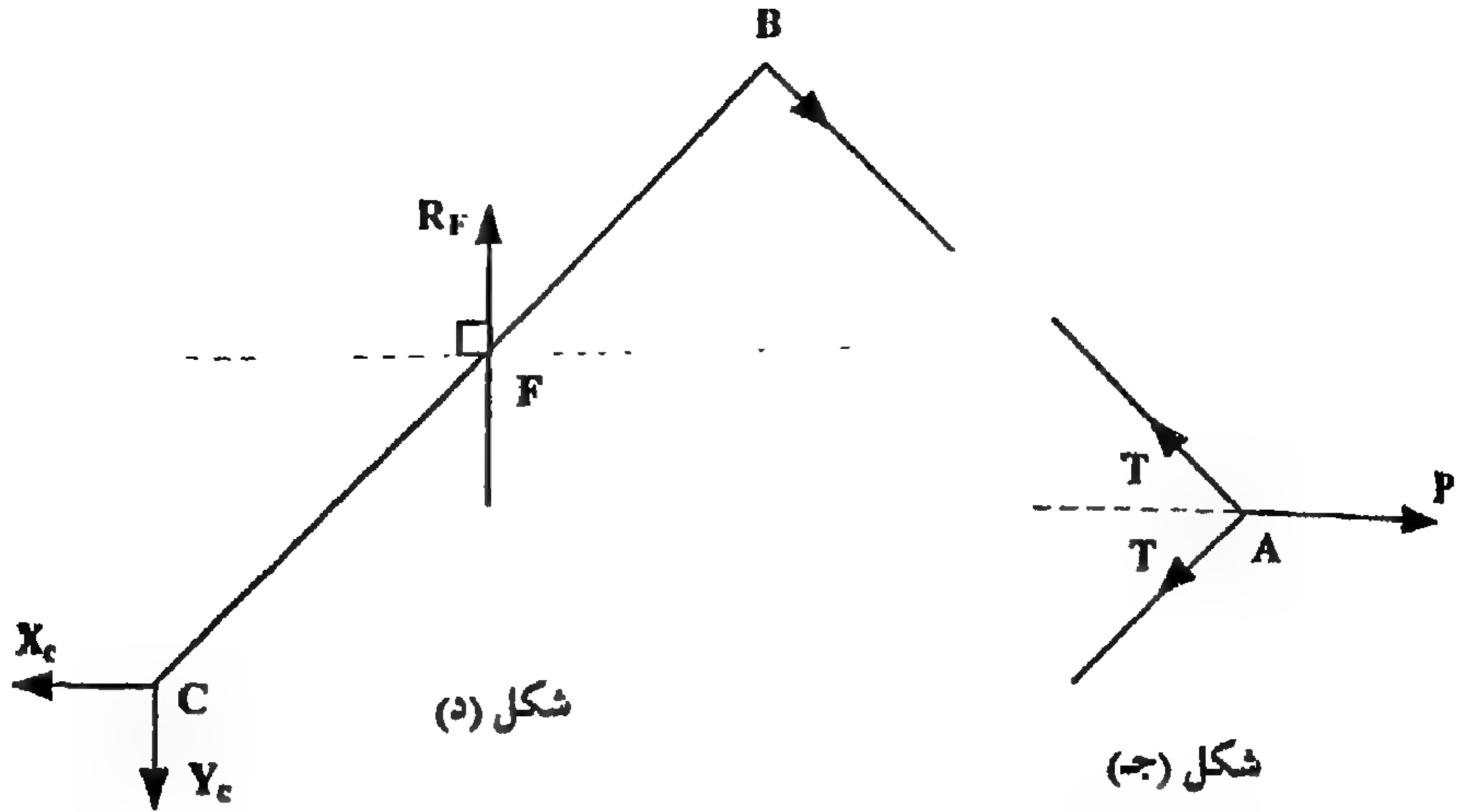
$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0 \\ R_F \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) - T(2a) &= 0 \\ \therefore R_F &= 2P \\ \sum X &= 0 \\ -X_C + \frac{T}{\sqrt{2}} &= 0 \\ \therefore X_C &= \frac{P}{2} \\ \sum Y &= 0 \\ -Y_C + R_F - \frac{T}{\sqrt{2}} &= 0 \\ \therefore Y_C &= 1.5P\end{aligned}$$



شکل (ا)



شکل (ب)



ملخص الأجوبة:

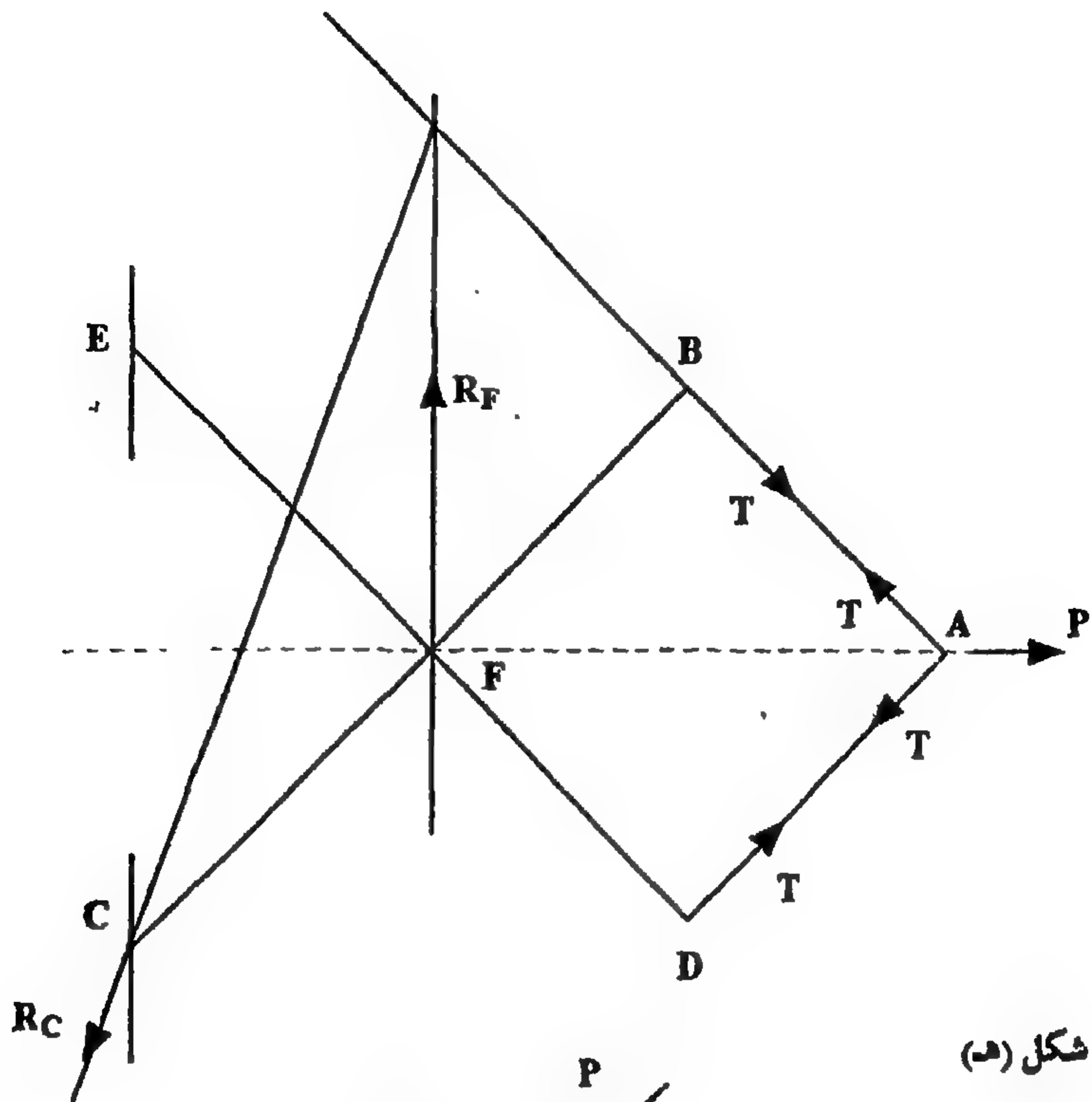
C	F	AB
$X_C = \frac{P}{2}$	$X_F = 0$	$T = \frac{P}{\sqrt{2}}$
$Y_C = \frac{3P}{2}$	$Y_F = 2P$	شداد

الحل البياني:

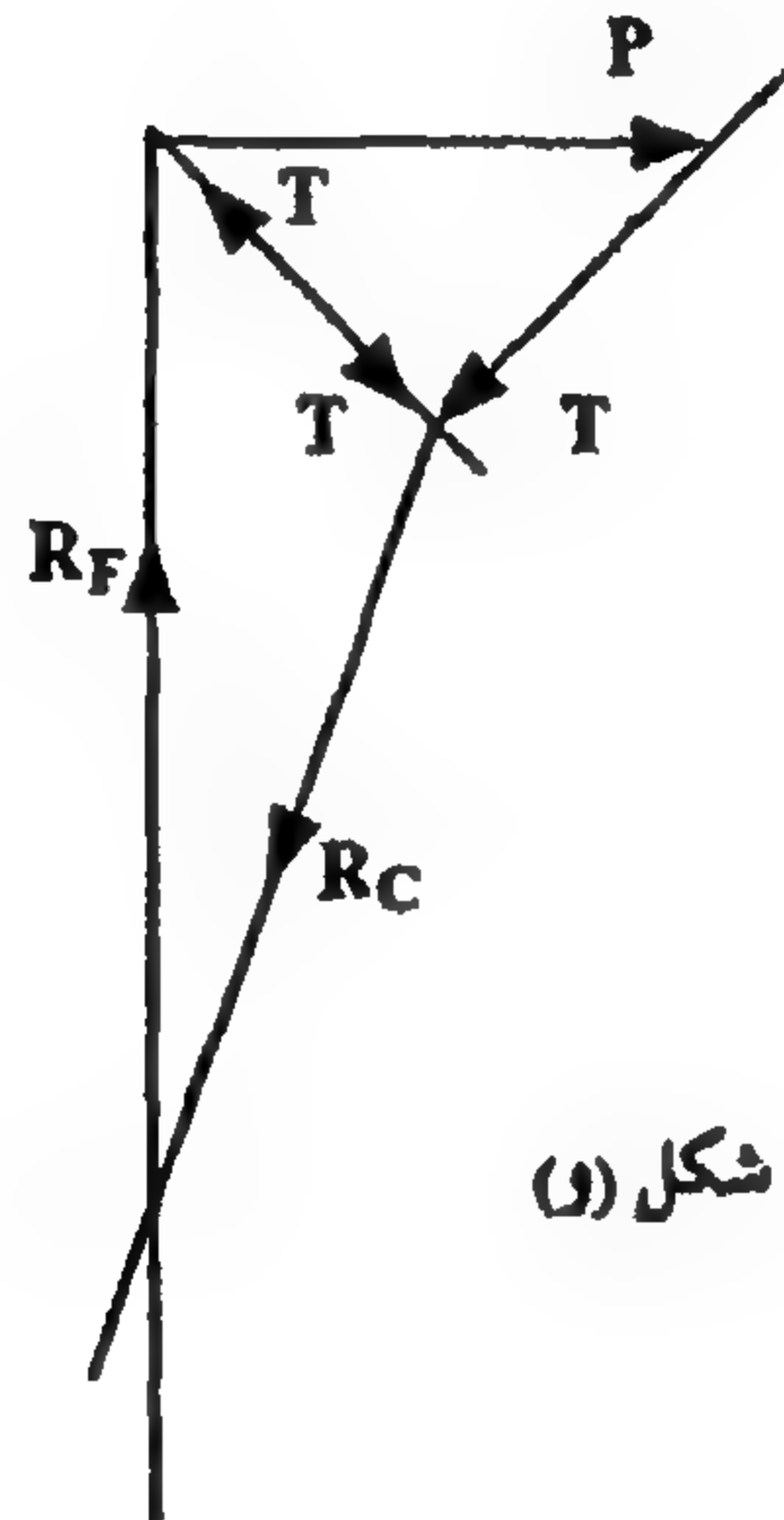
مقياس رسم المسافات  $a = 4 \text{ cm}$  ومنها  $1 \text{ cm} = 0.25 a$

مقياس رسم القوى  $P = 5 \text{ cm}$  ومنها  $1 \text{ cm} = 0.2 P$

شكل (هـ) يمثل شكل خطوط العمل للقوى المؤثرة على الهيكل، شكل (و) يمثل مضع القوى  
لاتزان المفصل A والقضيب BC



شكل (هـ)



شكل (و)

النتائج: من الرسم وبالقياس:

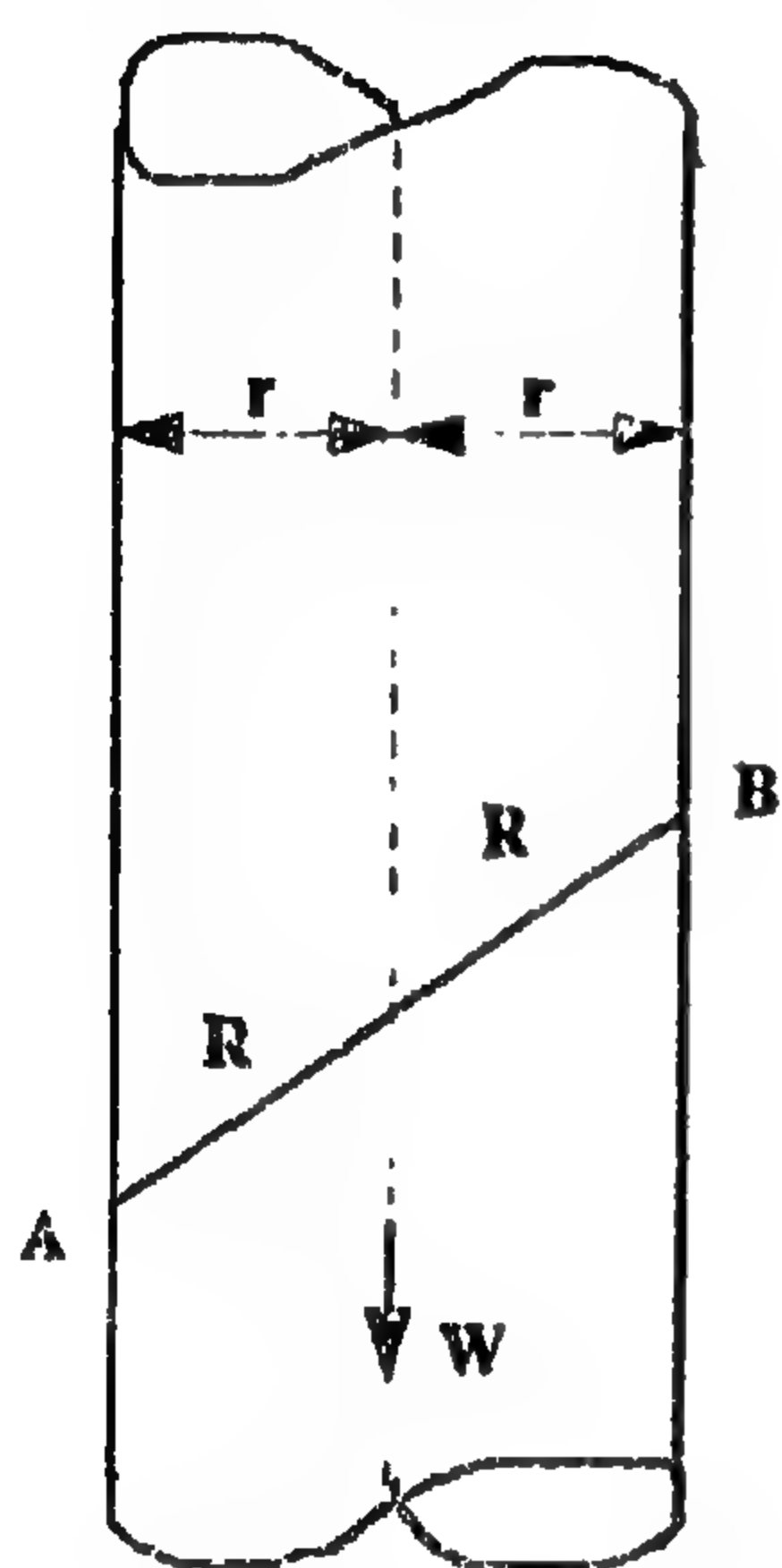
$$T \approx 0.7 P$$

$$R_F \approx 2 P$$

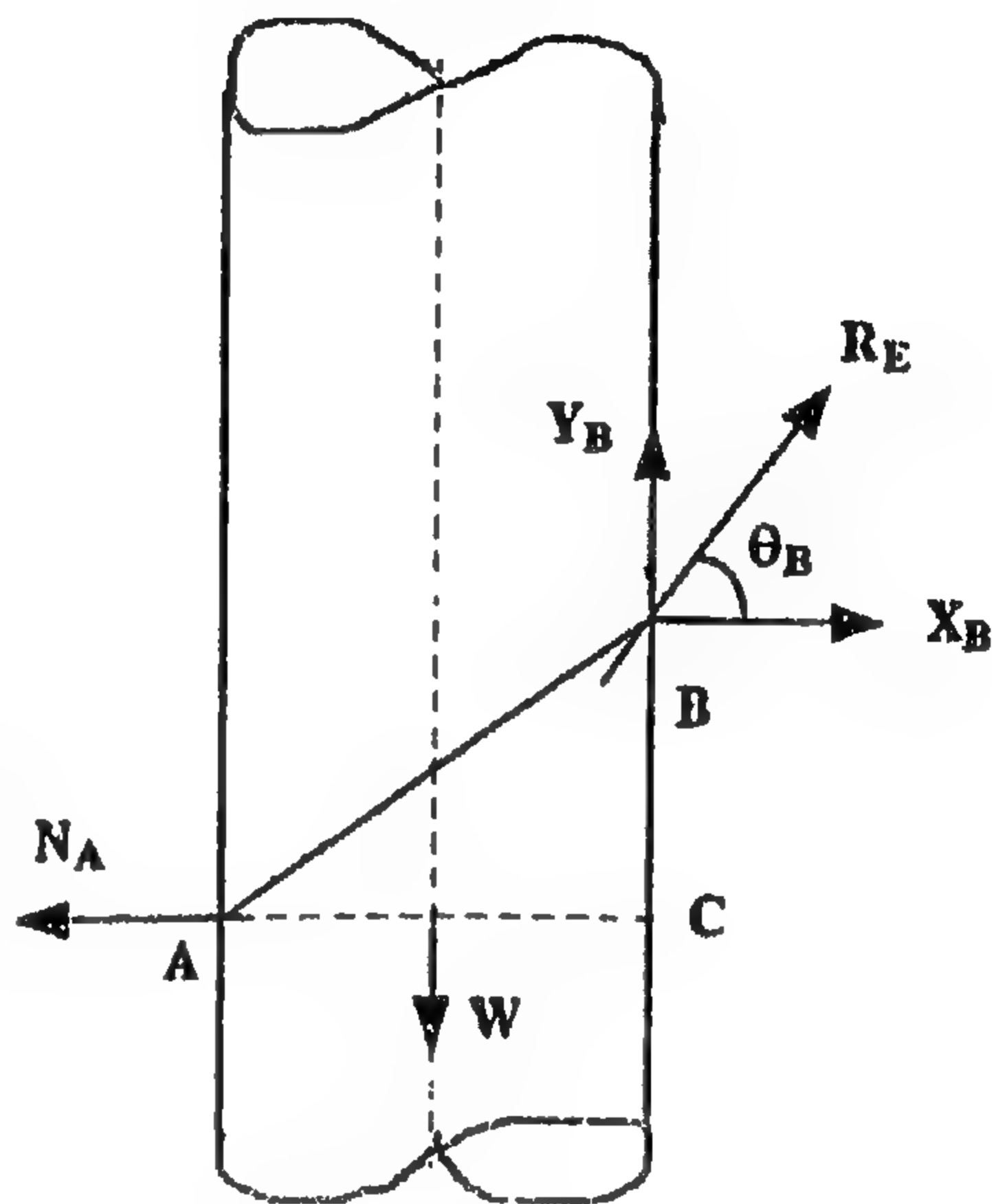
$$R_C \approx 1.6 P$$

## مثال ٧ :

حلقة رفيعة وزنها  $W$  ونصف قطرها  $R$  وضعت حول اسطوانة دائرية محورها رأسي ونصف قطرها  $r$  حيث  $(R > r)$  ومنع الحلقة من السقوط مسمار أفقي مثبت في الاسطوانة استندت عليه الحلقة كما في الشكل (١٦١) أوجد الضغط الأتقي بين الحلقة والاسطوانة وكذلك رد فعل المسمار على الحلقة مقداراً واتجهاً.



شكل (أ)



شكل (ب)

الحل التحليلي:

نضع ردود الأفعال على الحلقة ثم نكتب معادلات الاتزان كما في الشكل (١٦٢) يؤثر على الحلقة أربعة قوى واقعة في مستوى واحد هي  $N_A$  ،  $W$  ،  $Y_B$  ،  $X_B$  .

$$\sum X = 0$$

$$X_B - N_A = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$Y_B - W = 0$$

$$\therefore Y_B = W$$

$$\sum M_C = 0$$

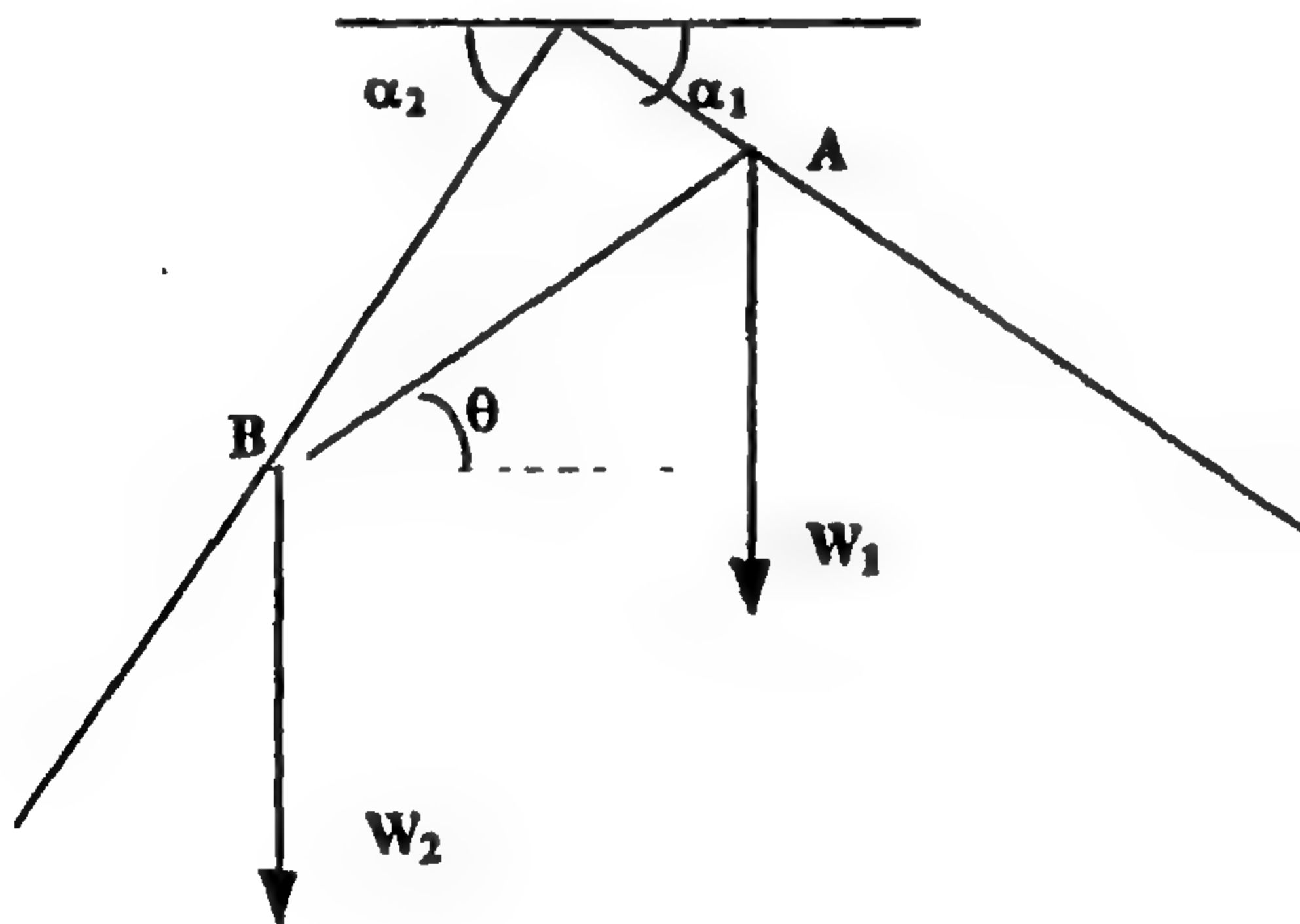
$$-X_B (BC) + W(r) = 0$$

$$\therefore X_B = W \frac{r}{\sqrt{(2R)^2 - (2r)^2}} = \frac{Wr}{2\sqrt{R^2 - r^2}}$$

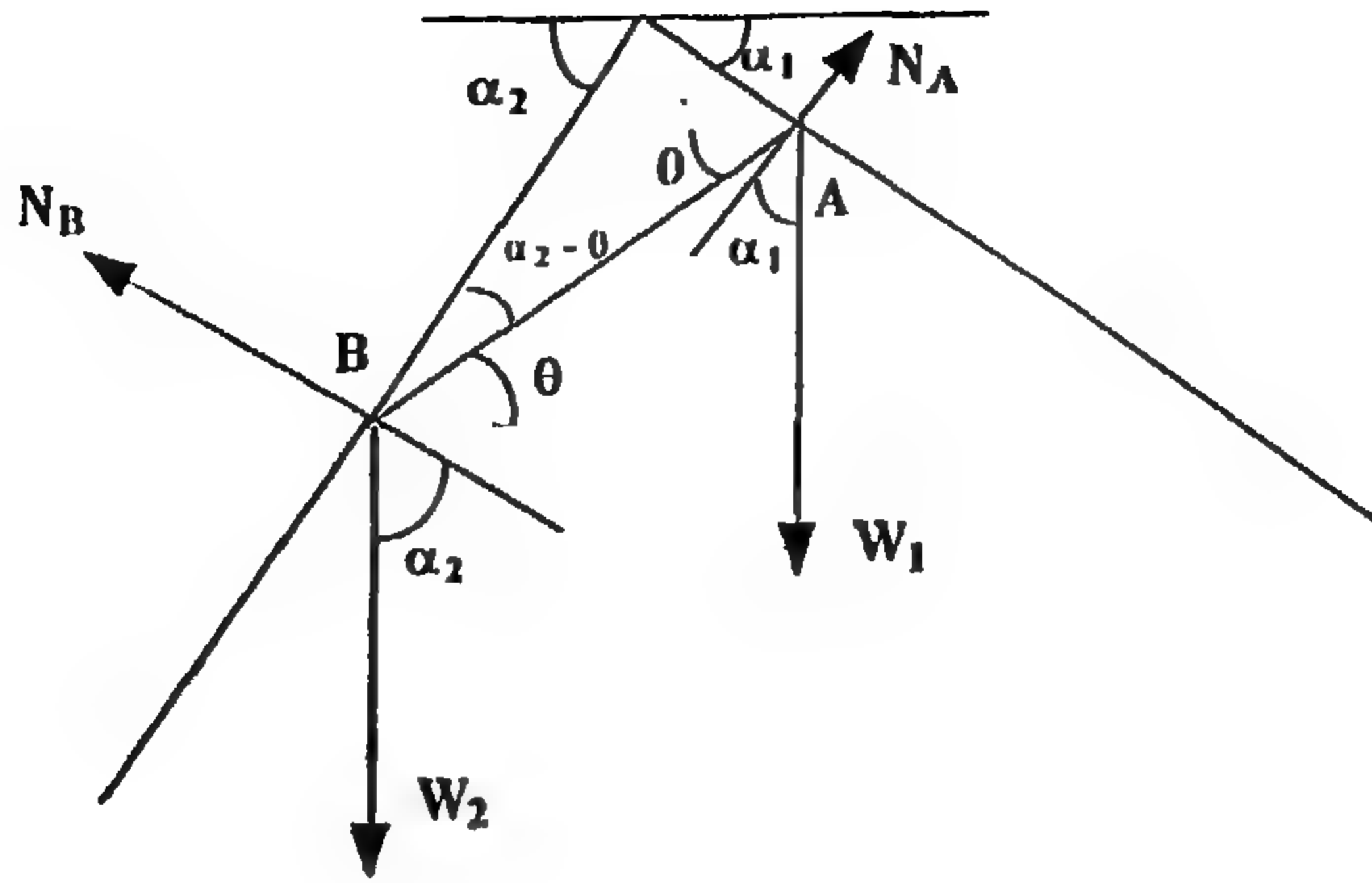
$$N_A = X_B = \frac{Wr}{2\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \frac{W}{2} \sqrt{\frac{4R^2 - 3r^2}{R^2 - r^2}}$$

$$\tan \theta_B = \frac{Y_B}{X_B} = \frac{2\sqrt{R^2 - r^2}}{r}$$

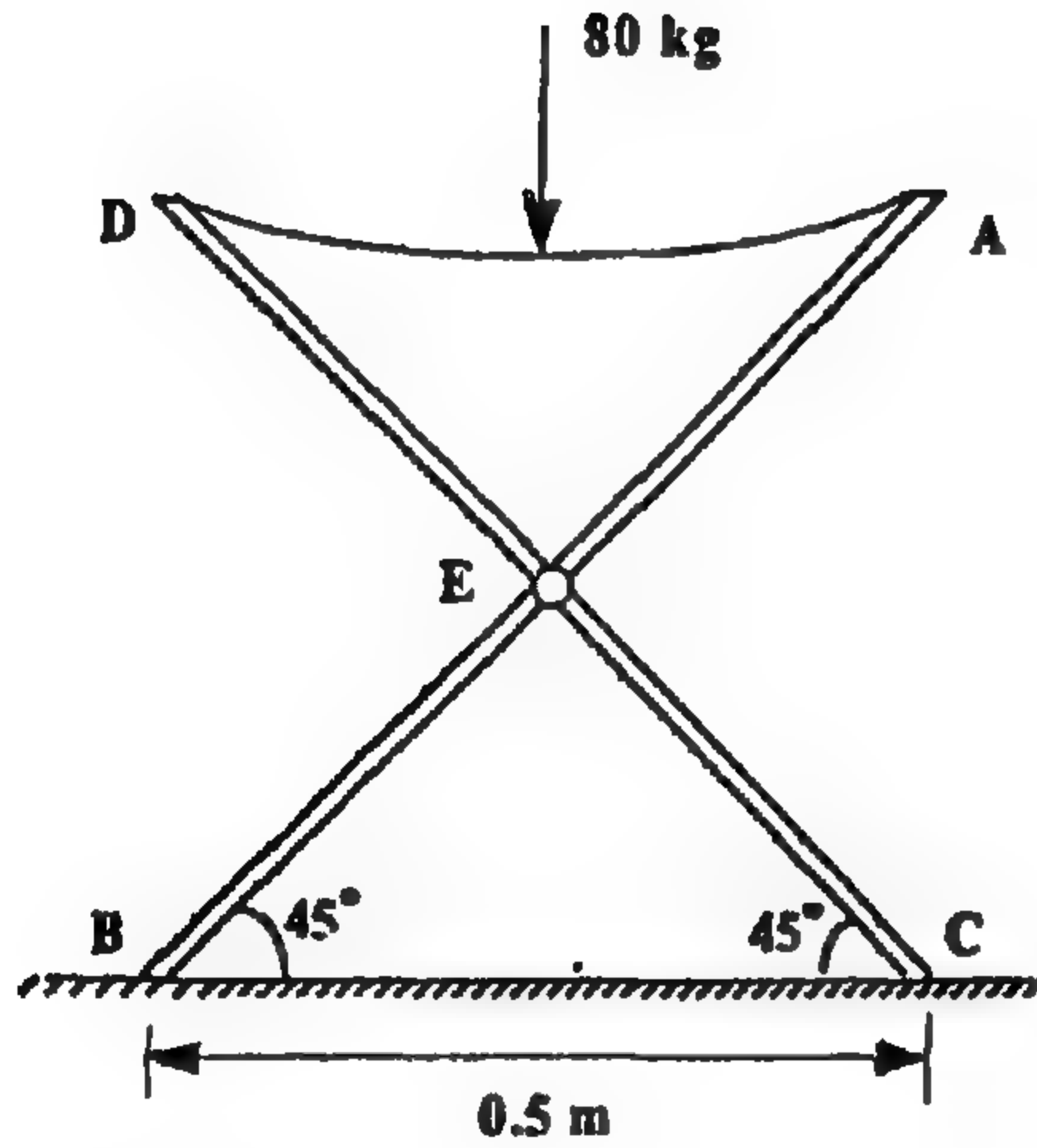


شكل (ج)



شكل (د)

مثال ٨ :



يجلس شخص وزنه ٨٠ كجم على كرسي شاطئ كالمبين بالشكل ويتخذ قماش القاعدة شكل قوس دائري يقابل زاوية مركزية قدرها ٦٠° عين القوى المؤثرة على زوج الأرجل AB

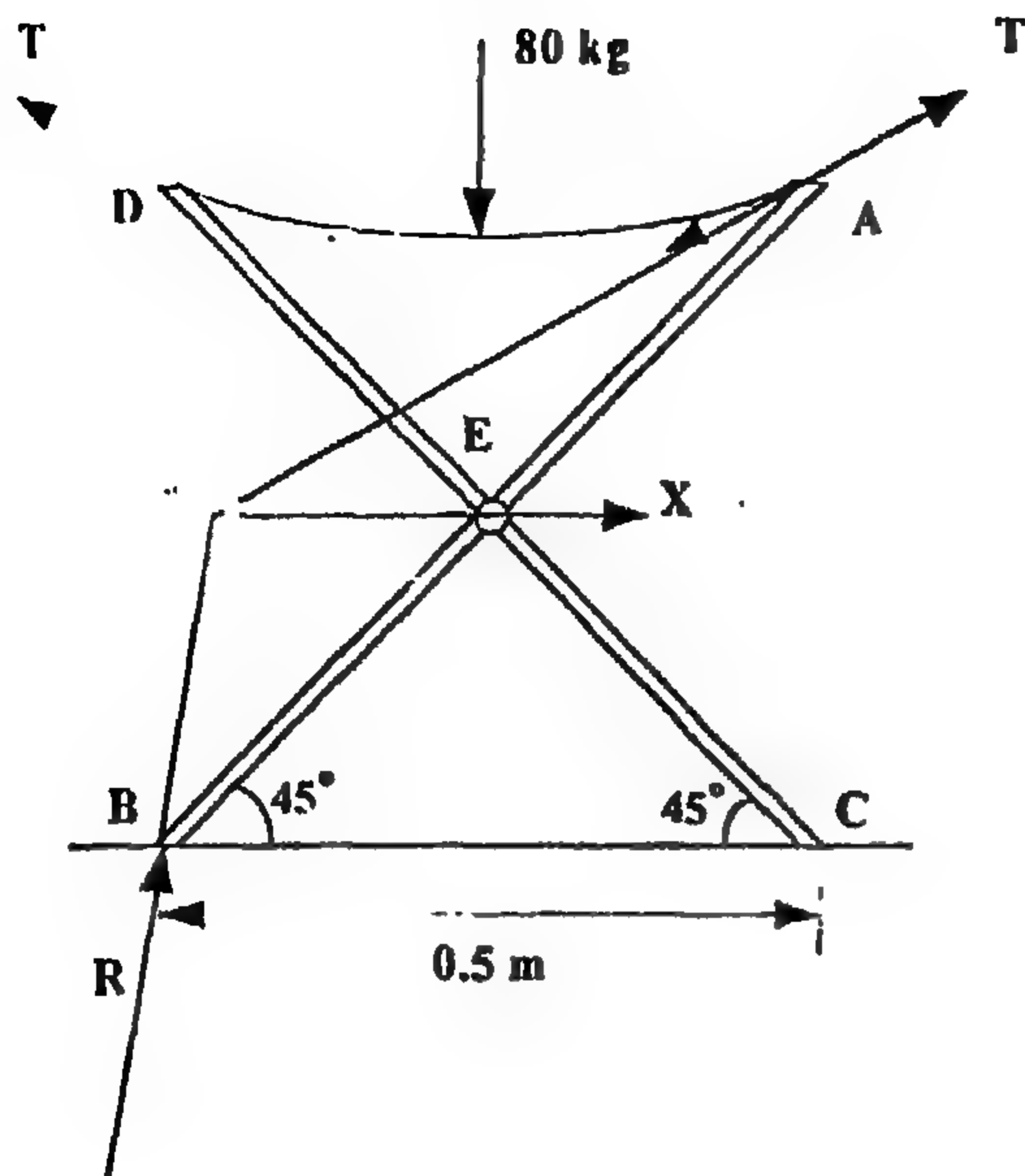
اتزان القماش

القوى المؤثرة هي وزن الرجل والشدان المتماثلان  $T$  ، والمماسان لتحنى القماش في  $A$  ،  $D$  (الموضحان بخطوط متقطعة) بالتحليل رأسياً نحصل على قيمة  $T$

$$2 T \cos 60^\circ = W$$

$$\therefore T = W = 80 \text{ kg}$$

اتزان الرجل AB



القوى المؤثرة هي معكوس الشد  $T$  في نقطة  $A$ . رد فعل مفصل التماثل  $E$  وهو  $X$  ورد فعل الأرض  $R$ . لاتزان القوى الثلاثة يجب أن نلتقي في نقطة واحدة برسم مثلث قوى لها مبتدئين بالقوة المعلومه  $T$  تعين  $R, X$

وأما تحليليا فتعطي العزوم

حول  $B$  قيمة  $X$  :

$$X \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = T 2a \sin 15^\circ$$

$$\therefore X = W 2\sqrt{2} \sin (45 - 30)$$

$$= W 2\sqrt{2} (\sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30)$$

$$= W (\sqrt{3} - 1)$$

ثم بالتحليل أفقياً ورأسياً نحصل على مركبتي  $R$  :

$$R_x + X - T \cos 30^\circ = 0$$

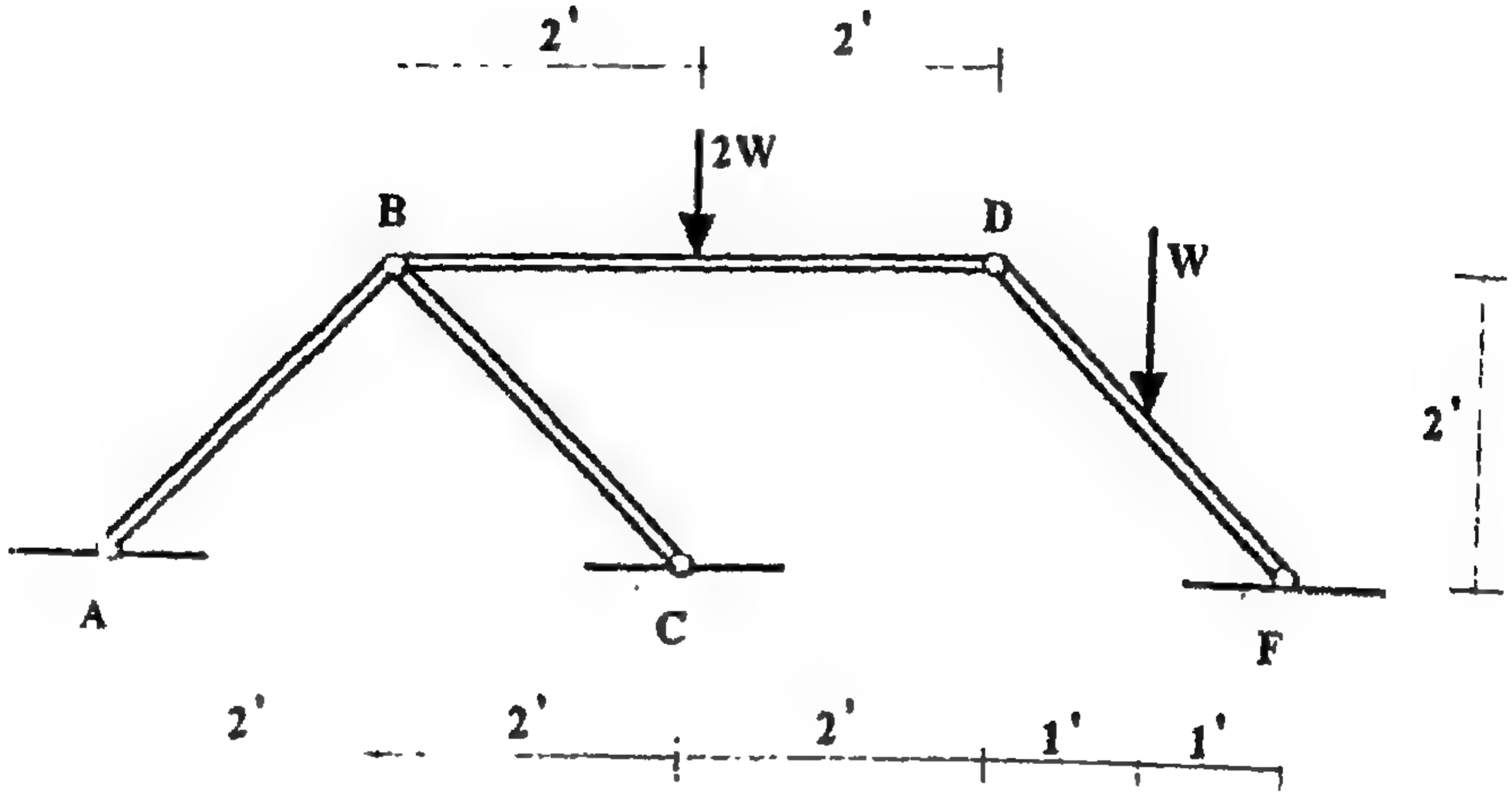
$$R_y - T \cos 60^\circ = 0$$

$$\therefore R_x = W \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right), R_y = \frac{W}{2}$$



# تمارين

١ - أوجد ردود الفعل في مفاصل الهيكل المبين بالشكل تحليلاً.



٢ - الهيكل المفصلي المبين بالشكل يتكون من أربعة

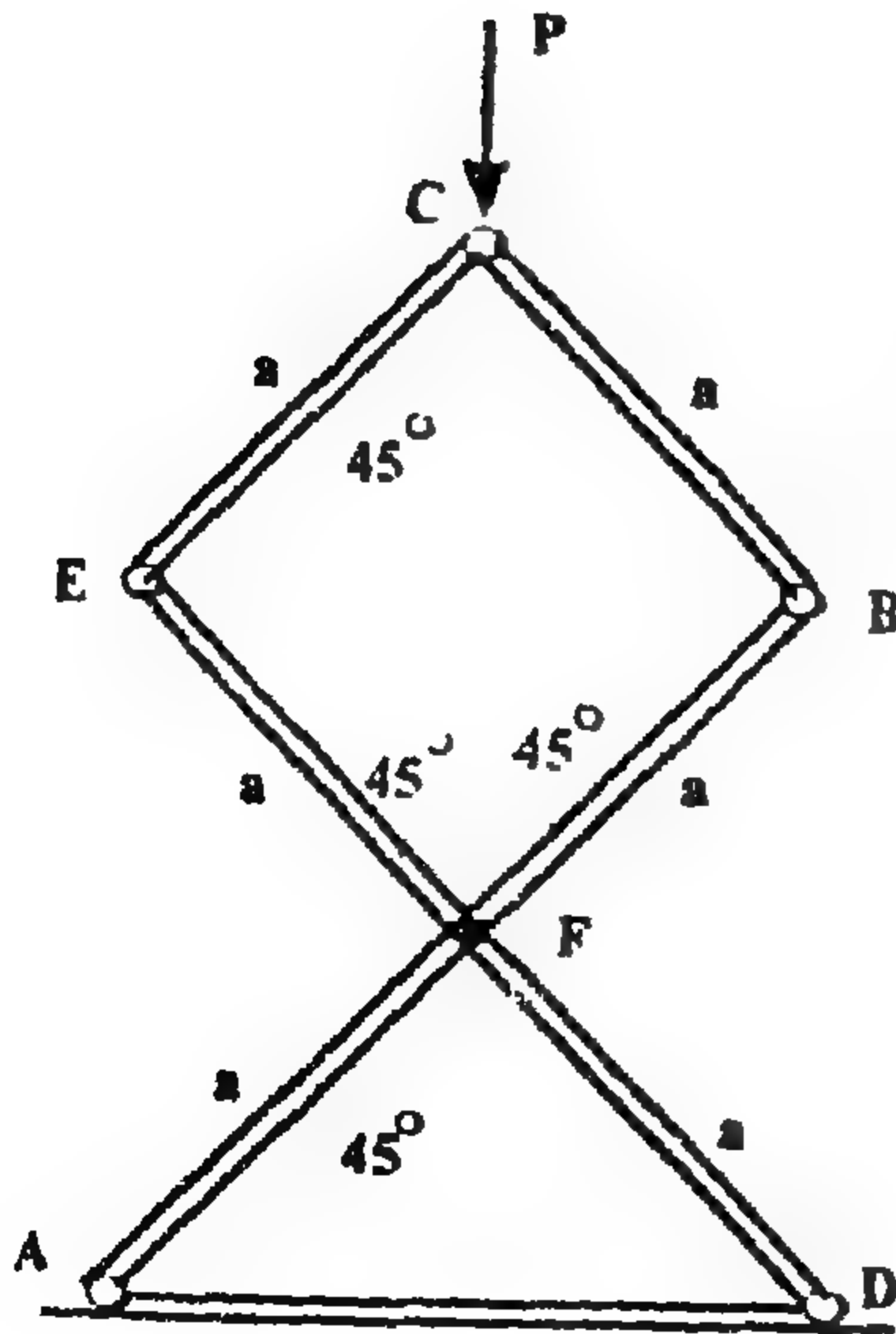
قضبان AB و BC و DE و EC ترتبط

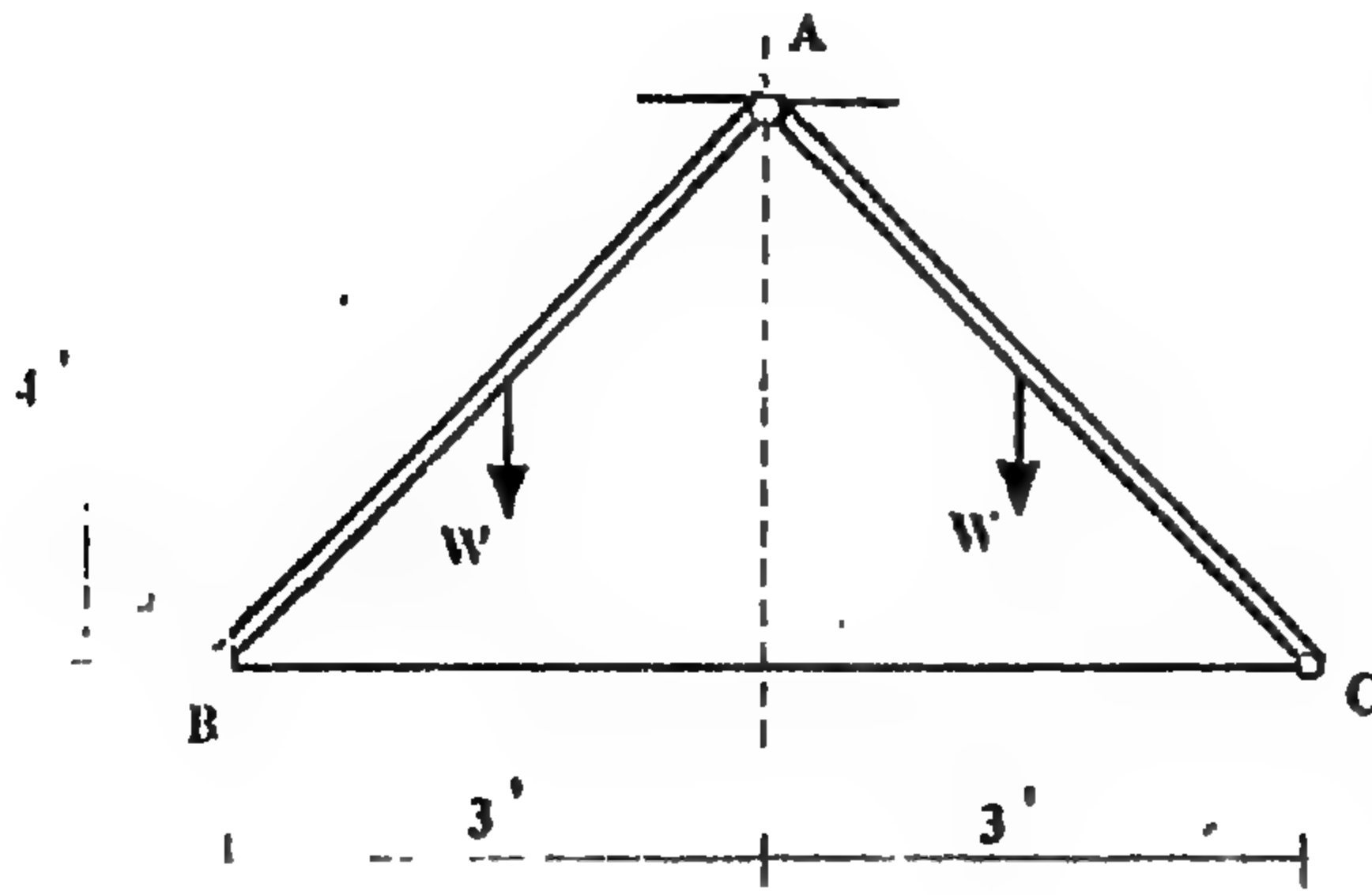
مفصلياً كما في الشكل وتتركز عند A و D

على أرض أفقية ملساء ويحفظ اتزانها خيط

غير مرن AD. تؤثر القوة P رأسياً لأسفل

على المفصل C. عين السند في الخيط.

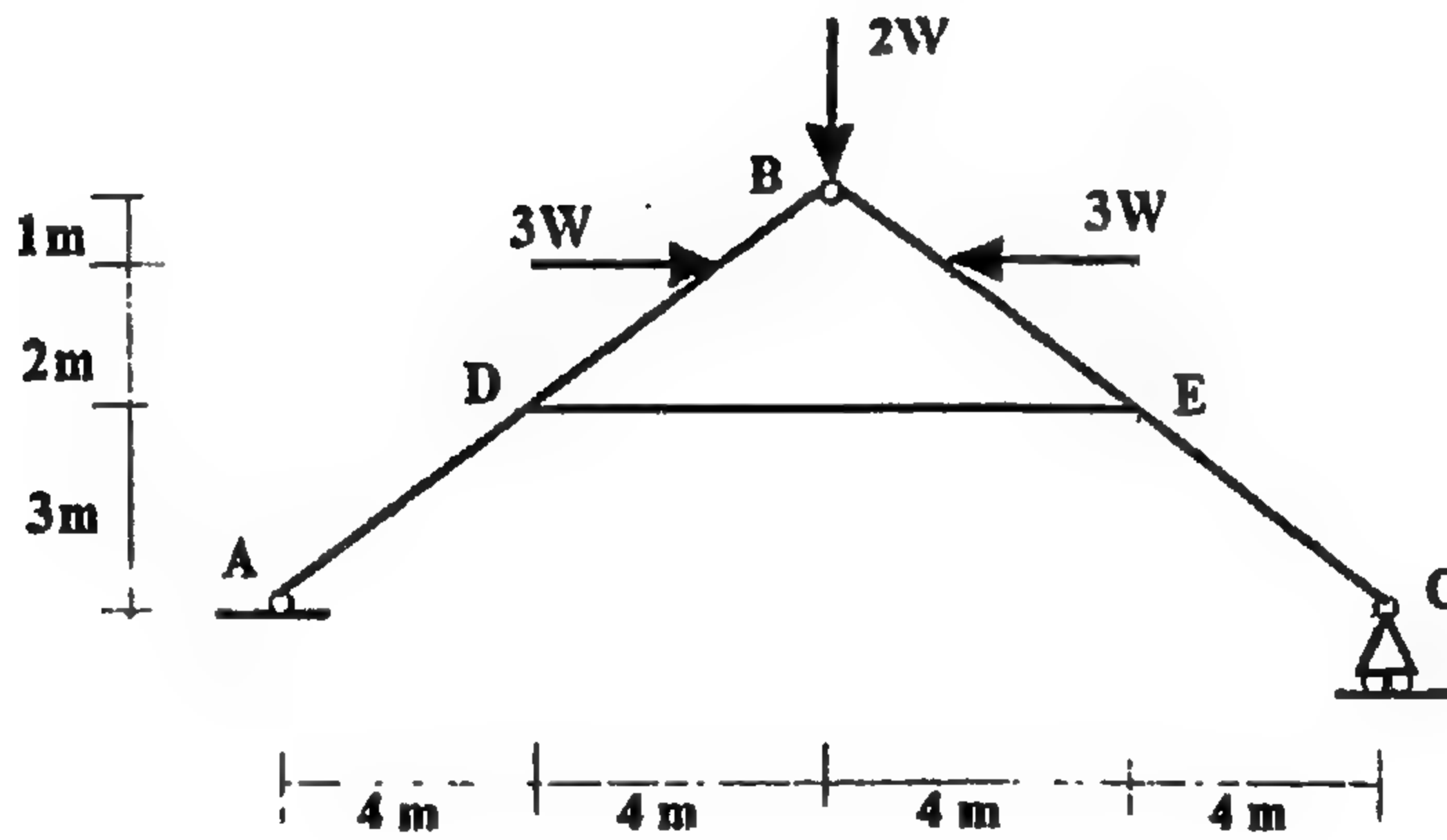




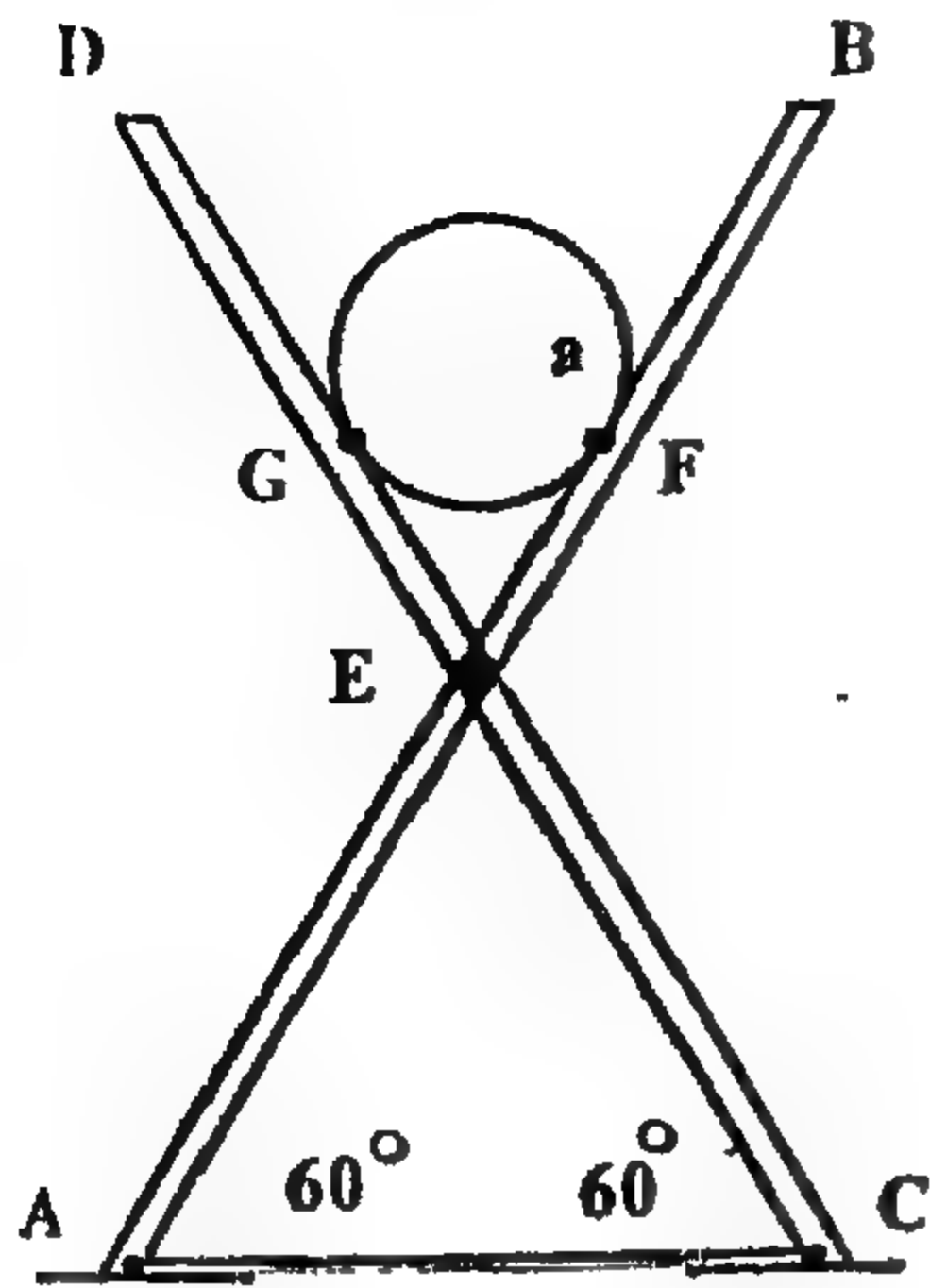
٣ - الهيكل الفصلي المبين  
بالتكامل يتكون من  
قضيبين وزن الواحد  
W وطوله ٥ أقدام  
معلقان من نقطة A و  
يحفظ اتزانهما قضيب  
خفيف BC. عين رد  
فعل المفصل A و القوة  
المحورية في BC.

٤ - للمنشأ المبين بالشكل عين ردود الأفعال في المفاصل B و A و عند الارتكاز الحر C وكذلك  
الشد في الحيط DE.

حيث أن وزن  $W = BC = AB$

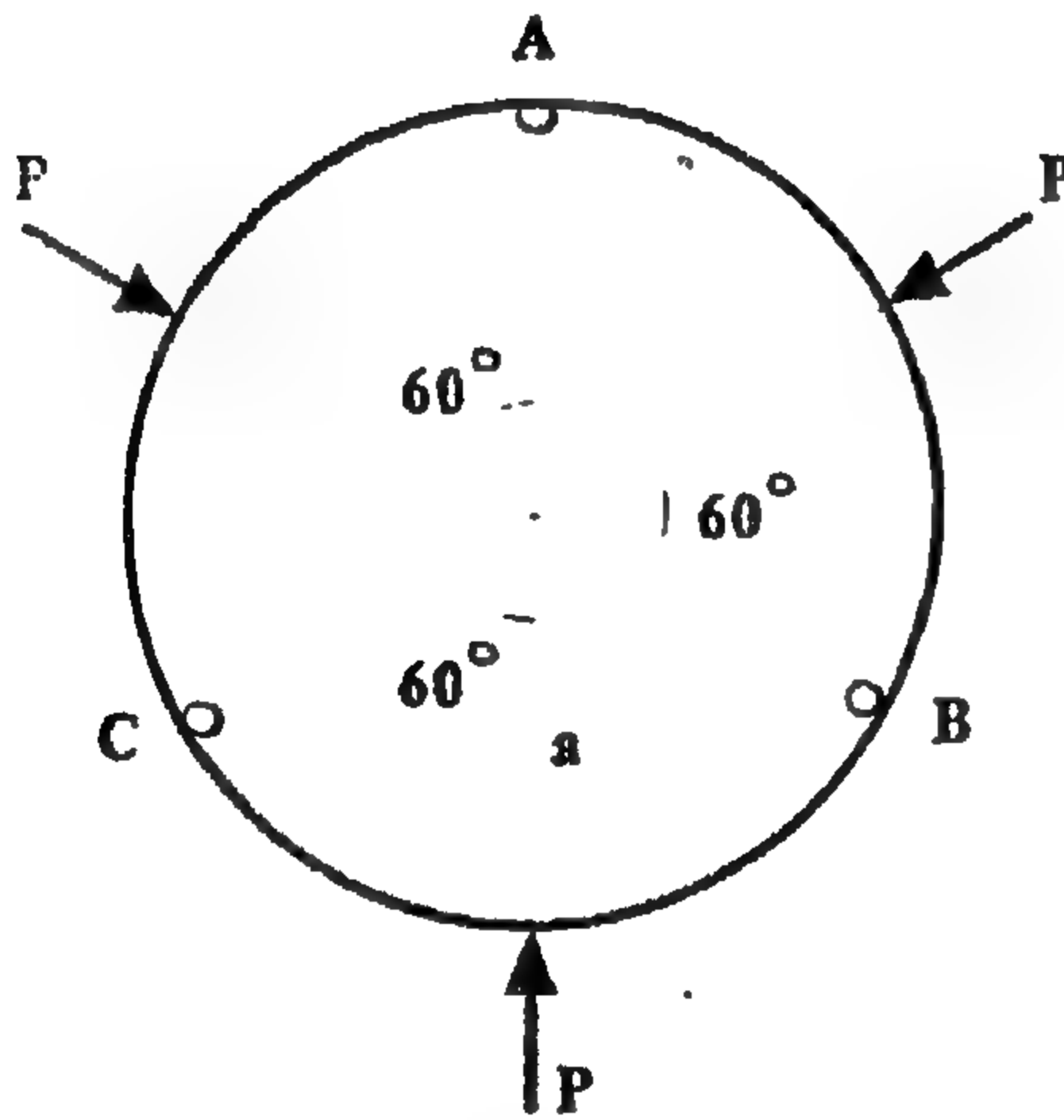


- ٥ - لوحان خفيفان أملسان  $AB$ ,  $CD$  يتصلان مفصلياً في  $E$  ويرتكزان على أرض ملساء.  $AC$  خيط خفيف يربط طرفيهما المرتكزين على الأرض. يحمل اللوحان كرة وزنها  $W$  و نصف قطرها  $a$ .



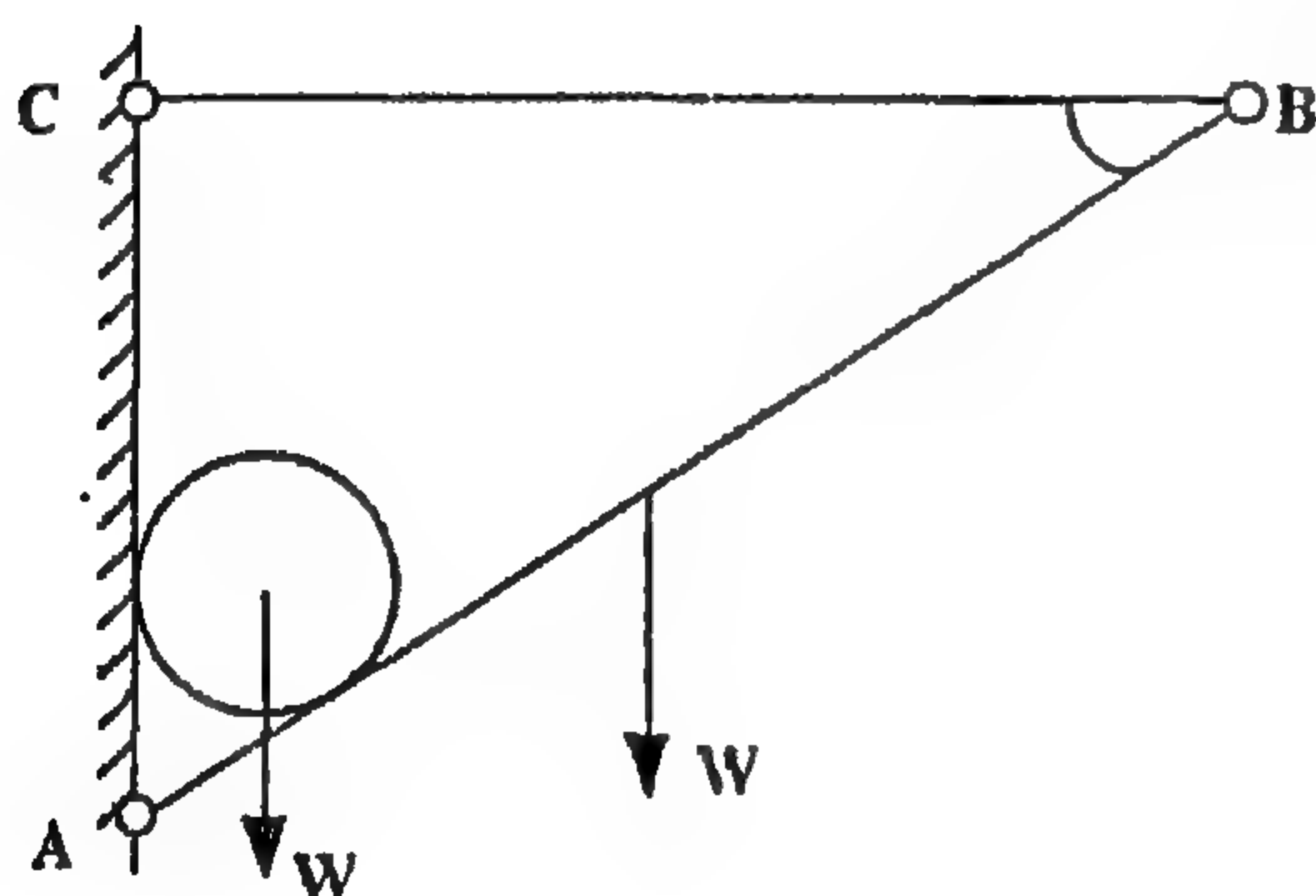
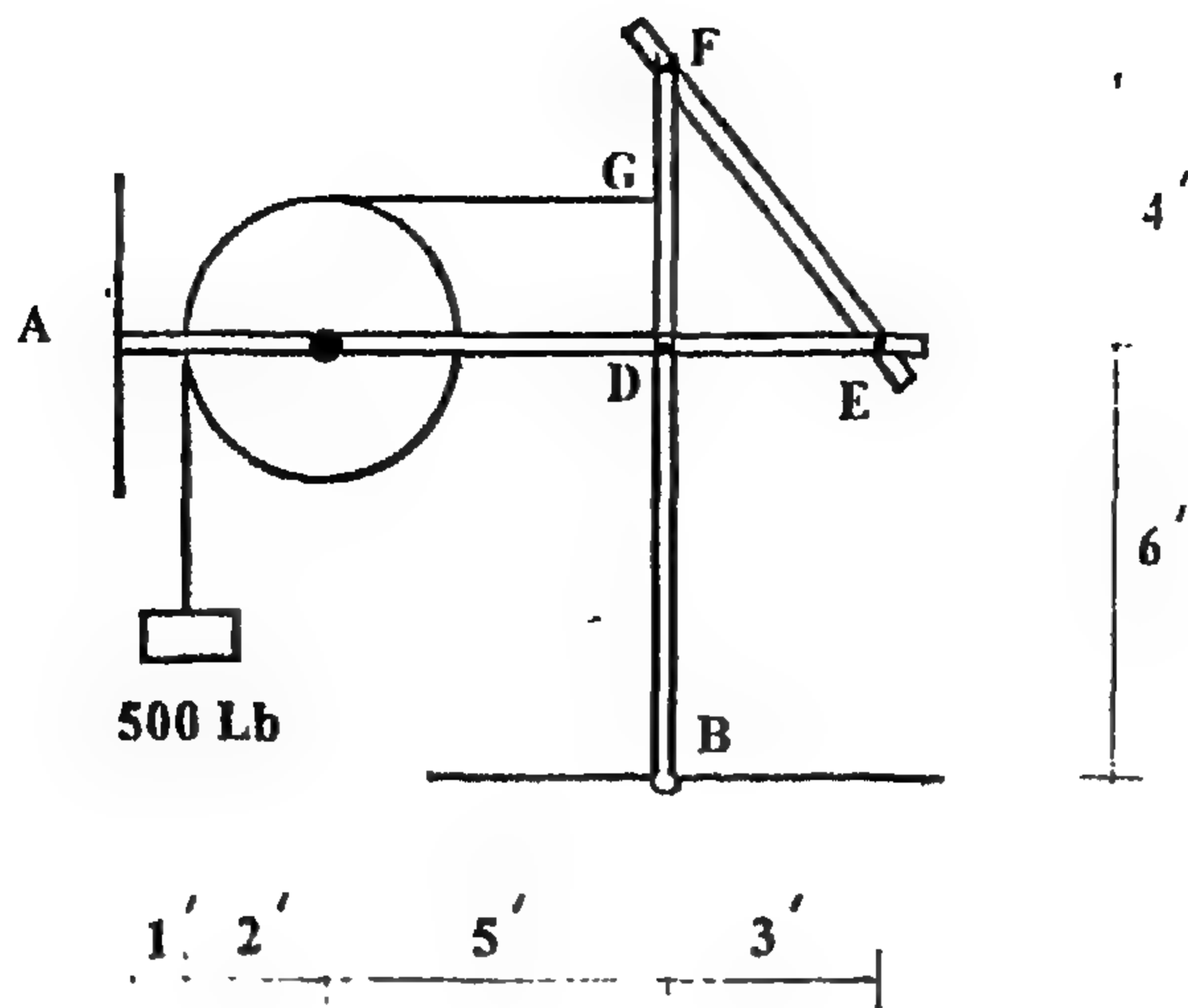
علماً بأن طول  $EC = ED$ ,  $EA = EB$

و طول  $GE = DG$ ,  $EF = BF$



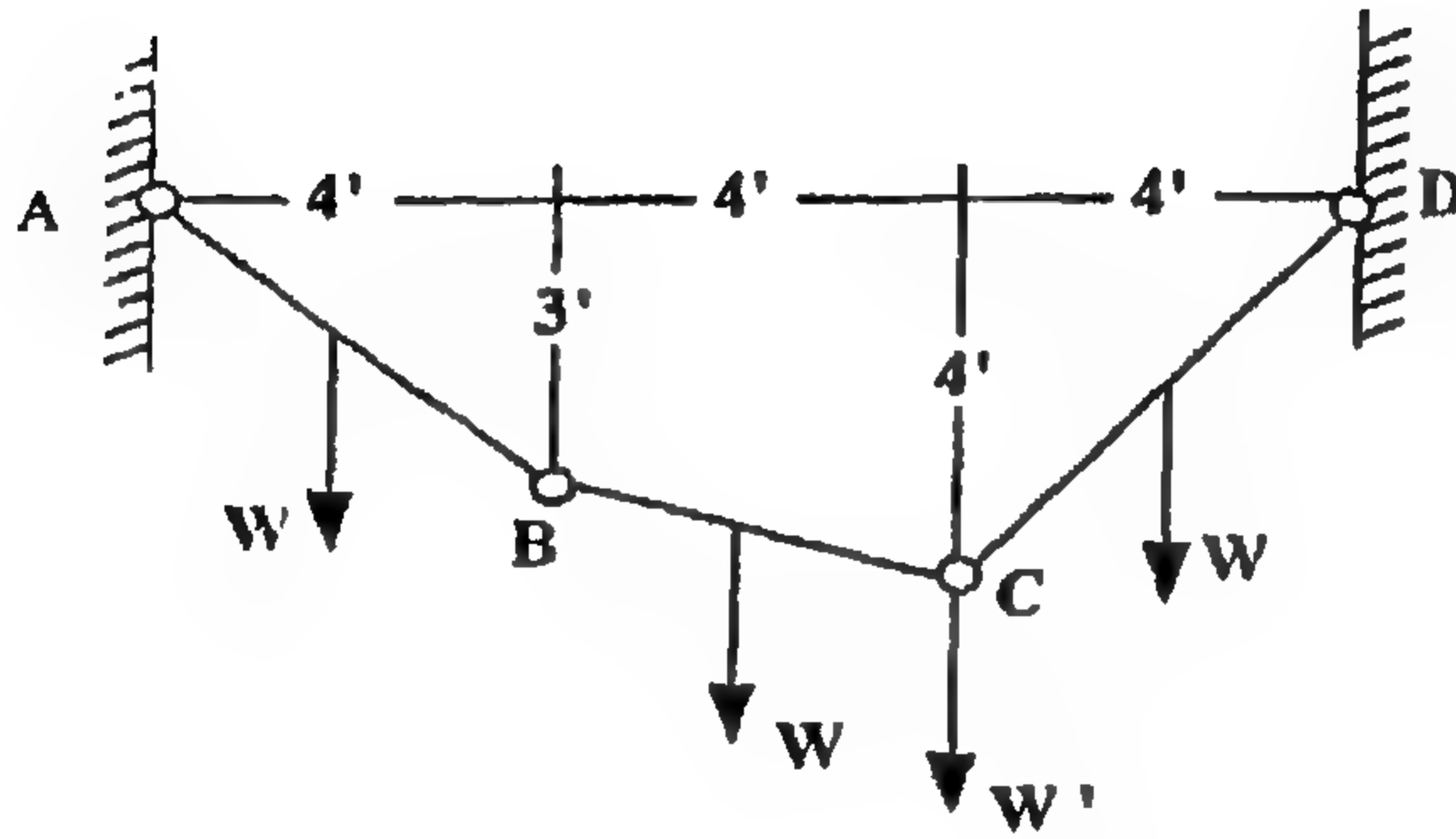
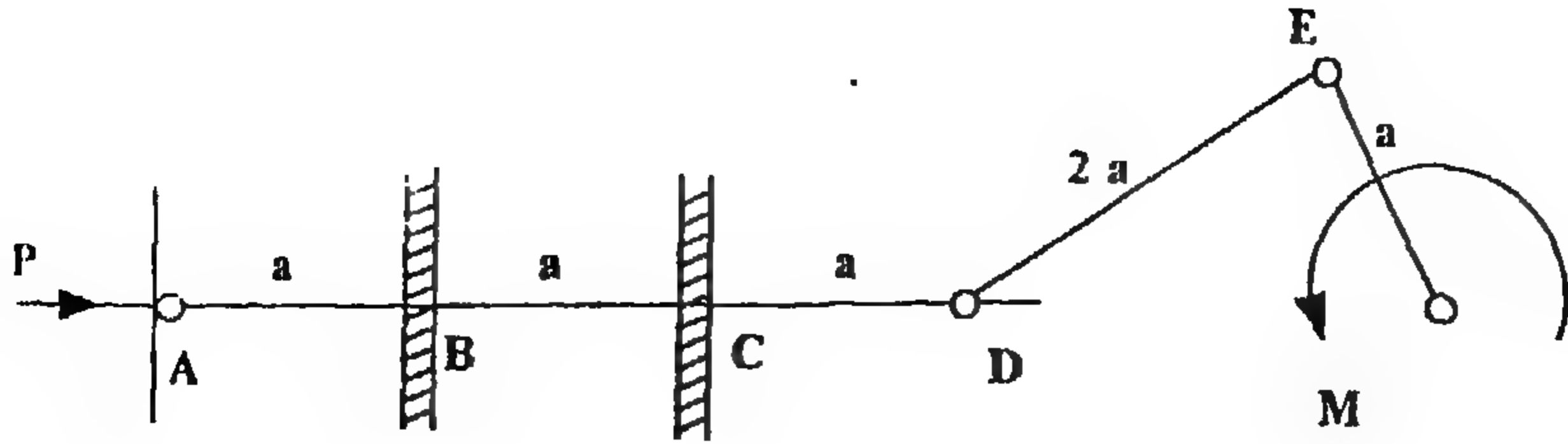
- ٦ - حلقة دائرية نصف قطرها  $a$  موضوعة على نضد أفقي أملس ويتألف من ثلاثة أعضاء  $CA$  و  $BC$  و  $AB$  تؤثر عليهما الأحمال المينة بالشكل عين ردود الأفعال في المقاصل  $B$  و  $C$  و  $A$ .

- ٧ - هيكل مفصلي كالين بالشكل يستند لحائط أملس عند  $A$  مرتكزاً مفصلياً عند  $B$  و مركب عليه بكرة خفيفة ملساء  $C$  يمر عليها خيط متصل بالهيكل عند  $G$ . أوجد رددي الفعل في  $A$ ,  $B$  و جميع القوى المؤثرة على الكمرة  $ACDE$ .

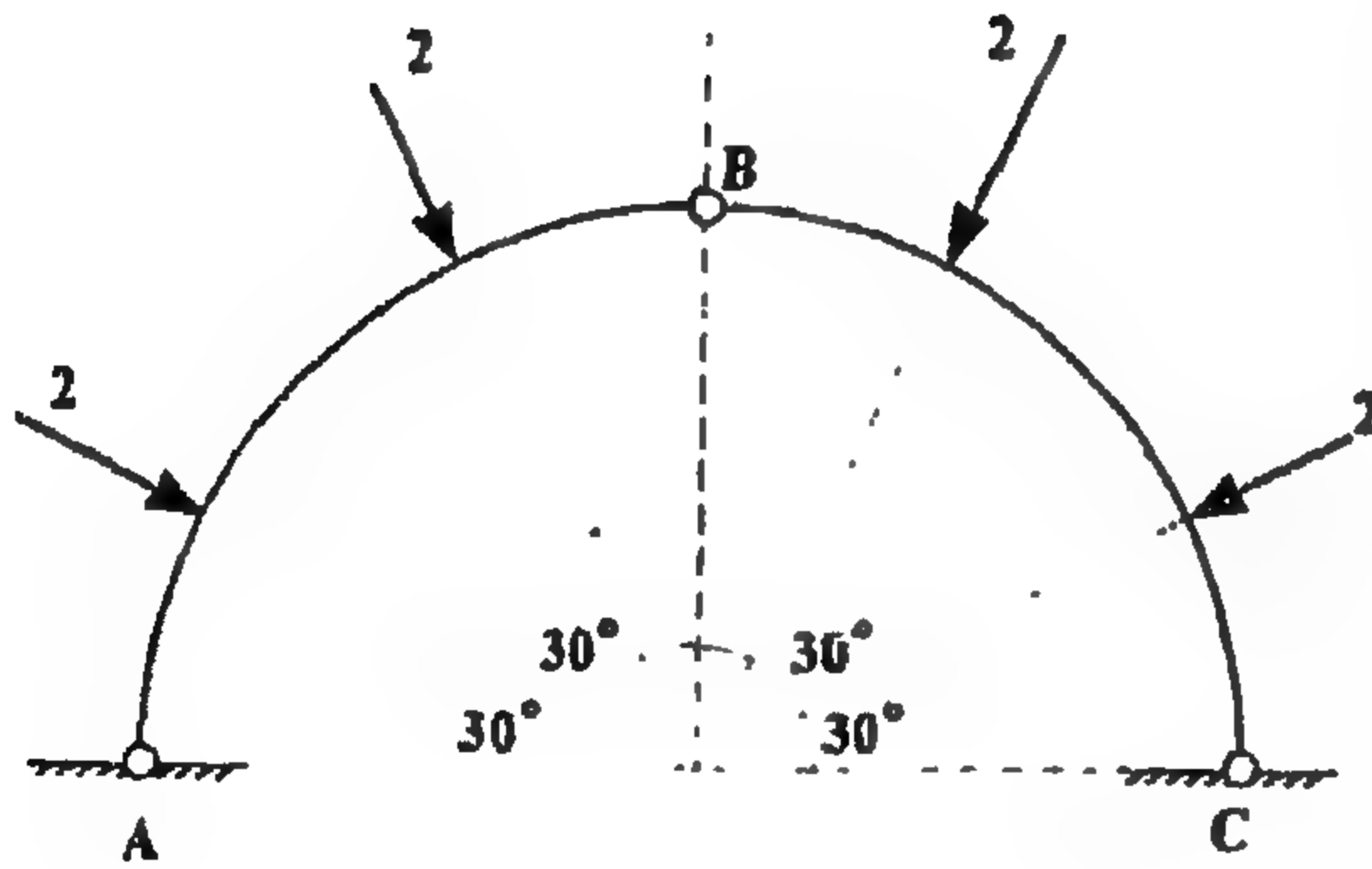


٨ - تستقر اسطوانة ملساء وزنها  $W$   
ونصف قطرها  $a$  بين حائط رأسي  
ولوح أملس  $AB$  وزنه  $W$   
وطوله  $(4\sqrt{3}a)$  واللوح  
يتصل بالحائط مقلبا في  $A$   
ويشده إليها خيط خفيف أفقي  
 $CB$  عين شد الخيط وردود  
الفعل على اللوح.

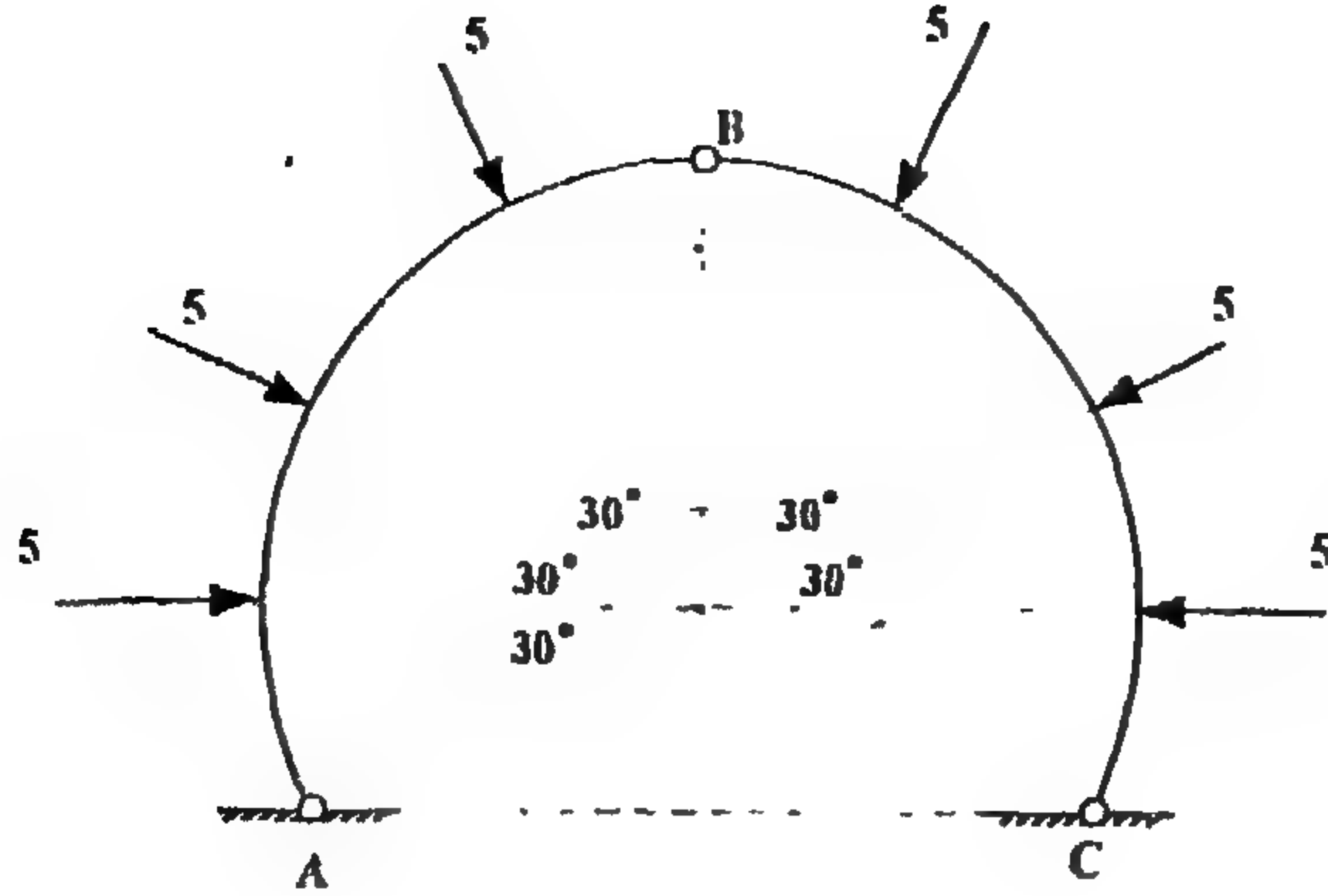
٩ - الشكل المرفق عبارة عن كروكي لآلة ترددية بسيطة في أحد أوضاعها عين العزم  $M$  على المرفق بدلالة ضغط البخار  $P$  على مكبسها.



١٠ - ثلاثة قضبان ثقيلة  
وزن كل منها  $W$  متصلة  
في  $B, C$  ومحمولة  
بفصلان ثابتان  $A, D$   
يؤثر في  $C$  حمل رأسي  
 $W$  عين بالطرق  
التحليلية مقدار رأسي  
 $W'$  بدلالة  $W$ .



١١ - عقد متماثل ثلاثي  
المفاصل على شكل  
نصف دائرة نصف  
قطرها  $4\text{ م}$  تؤثر على  
العقد مجموعة القوى  
المتساوية المركزية  
المبينة في الشكل. عين  
تحليلياً وبياناً ردود  
فعل المفاصل الثلاثة  
 $A, B, C$ .



١٢ - عقد ثلاثي المتفاعل

على شكل ثلثي

دائرة نصف قطرها

٤ م . تؤثر على

العقد مجموعة القوى

المتساوية المركزية

المبينة في الشكل.

عين تحليلياً وبياناً

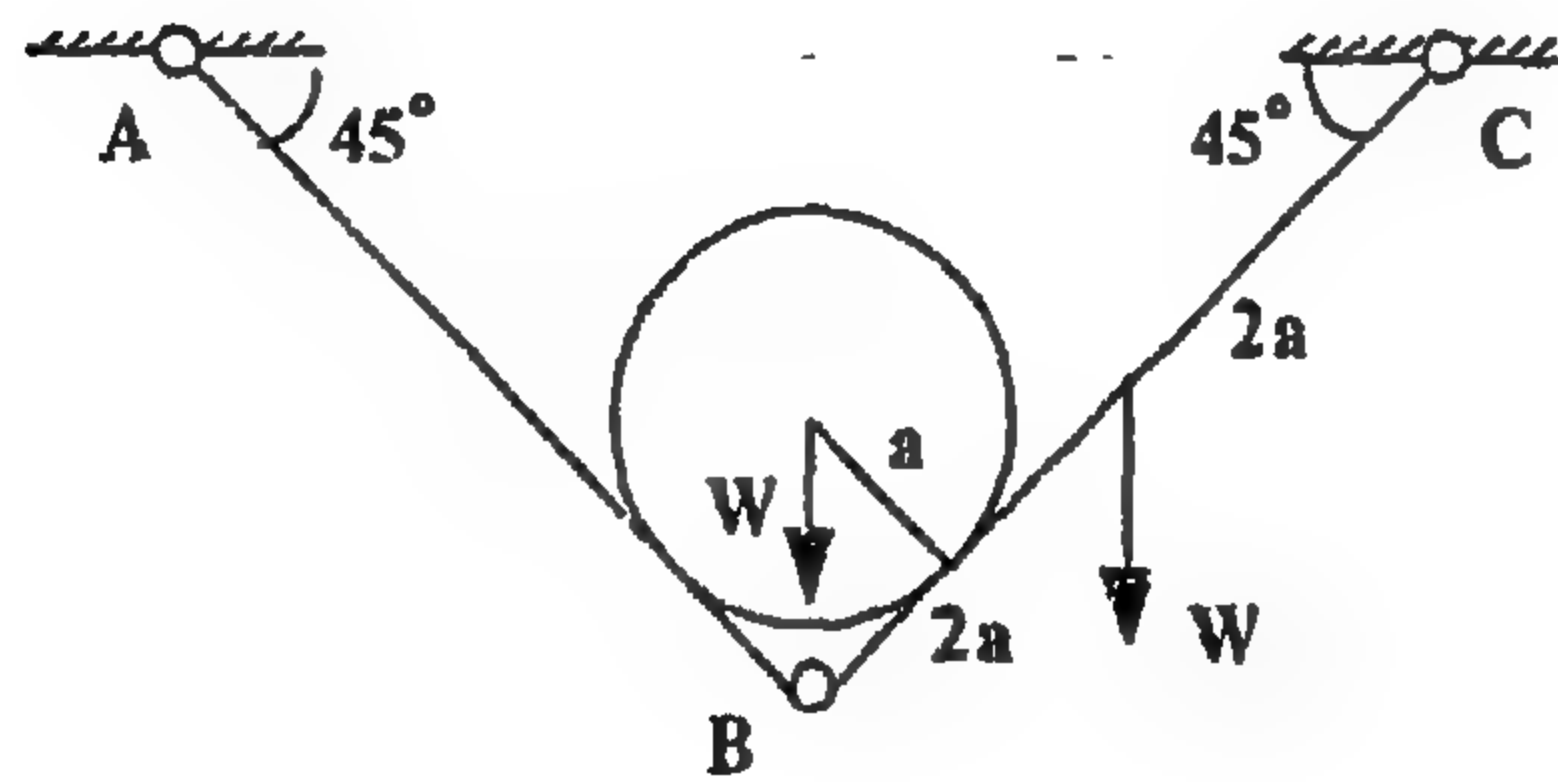
ردود فعل المفاصل

الثلاثة A, B, C .

١٣ - تتركز كرة ملساء وزنها  $W$  ونصف قطرها  $a$  على لوحين أملسين  $AB$  و  $BC$  وزن كل منها

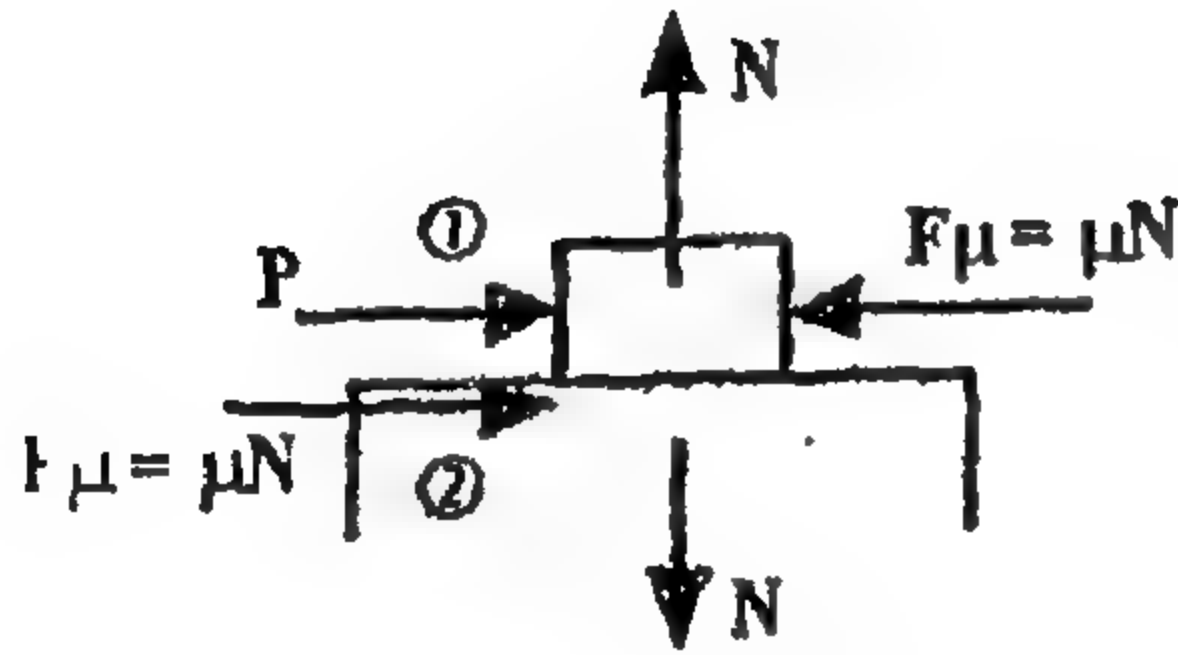
$W$  وطوله  $4a$  ، اللوحان يتصلان مفصلياً في  $B$  ومعلقان من مفصلين ثابتين  $A$  و  $C$  كما في

الشكل عين ردود فعل المفاصل الثلاثة تحليلياً وبياناً.



## الإحتكاك

إذا ارتكزا سطحين خشنين على بعضهما بدون أدنى حركة نسبية بين السطحين فيكون هناك قوة رد فعل عموديتين فقط.

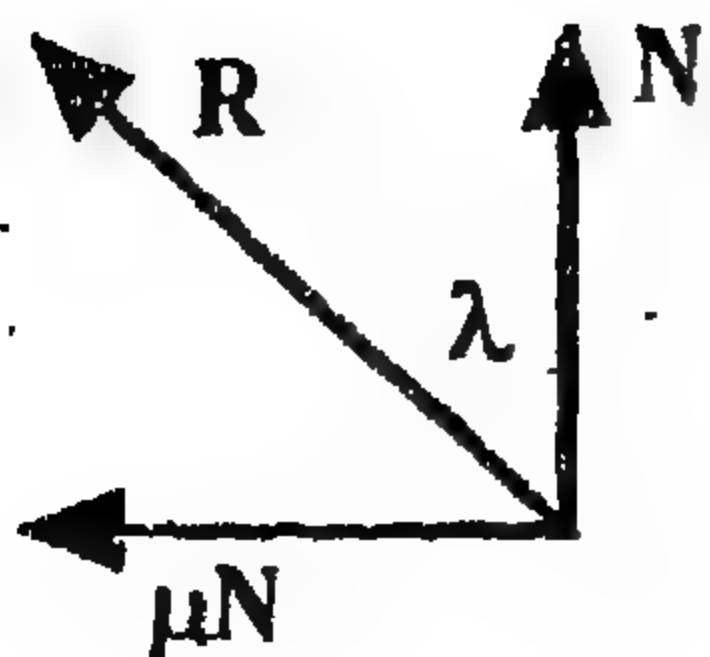


عند توليد حركة نسبية بين الجسمين وذلك بالتأثير على أحدهما بقوة  $P$  مثلاً فعند سطح التلامس يتولد قوتان  $F$  ،  $F$  في عكس الاتجاه قابلية الحركة تسمى القوة  $F$  مقاومة الإحتكاك وتصل إلى أقصى قيمة لها  $F_{\mu}$  عندما يوشك الجسم على الحركة ،

وتسمى أيضاً بقوة الإحتكاك النهائي وهي عادة تتناسب مع رد الفعل العمودي بين السطحين  $N$  . حيث  $\mu$  تسمى معامل الإحتكاك وهي قيمة ثابتة لكل سطحين معينين ومعامل الإحتكاك قبل حدوث الحركة < الإحتكاك بعد حدوث الحركة

( معامل الإحتكاك الإلستاتيكي ) < ( معامل الإحتكاك الكيناتيكي )

### ١ - زاوية الإحتكاك :



لو كان هناك جسم على وشك الإنزلاق فإن محصلة رد الفعل عليه  $R$  تكون عبارة عن رد الفعل العمودي  $N$  وقوى الإحتكاك  $\mu N$

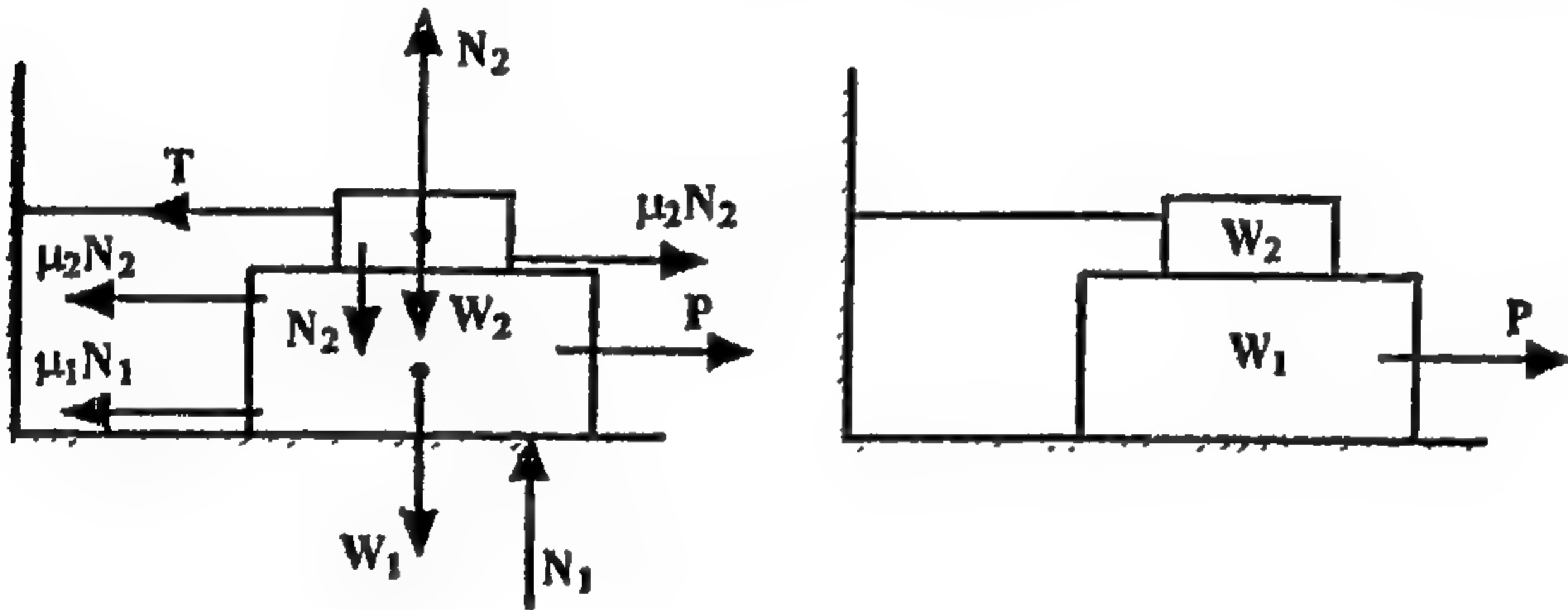
والزاوية  $\lambda$  التي يصنعها رد الفعل المحصل  $R$  مع رد الفعل العمودي  $N$  تسمى زاوية الاحتكاك.

$$\tan \lambda = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

أي أن معامل الاحتكاك يساوي ظل زاوية الاحتكاك.

مثال ١ :

كتلة وزنها  $W_1$  تستقر على سطح أفقي ومعامل الاحتكاك بينها وبين السطح يساوي  $\mu_1$  وضعت كتلة أخرى  $W_2$  فوق الكتلة الأولى وربطت بواسطة خيط أفقي كما في الشكل . معامل الاحتكاك بين الكتلتين  $\mu_2$  . عين أقل قوة  $P$  تلزم لتحريك الكتلة  $W_1$  ثم عين الشد في الخيط عندئذ.



الحل :

لإيجاد  $P$  ندرس إتران الكتلة  $W_1$

$$\sum x = 0$$

$$P = \mu_2 N_2 + \mu_1 N_1 \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum y = 0$$

$$N_1 = N_2 + W_2 \dots \dots \dots (2)$$



بدراسة الإتزان الراسي للكتلة  $W_2$

$$\sum y = 0$$

$$N_2 = W_2$$

وبالتعويض في (1) ، (2)

$$P = \mu_2 W_2 + \mu_1 (W_2 + W_1)$$

ولإيجاد  $T$  ندرس إتزان الكتلة  $W_2$

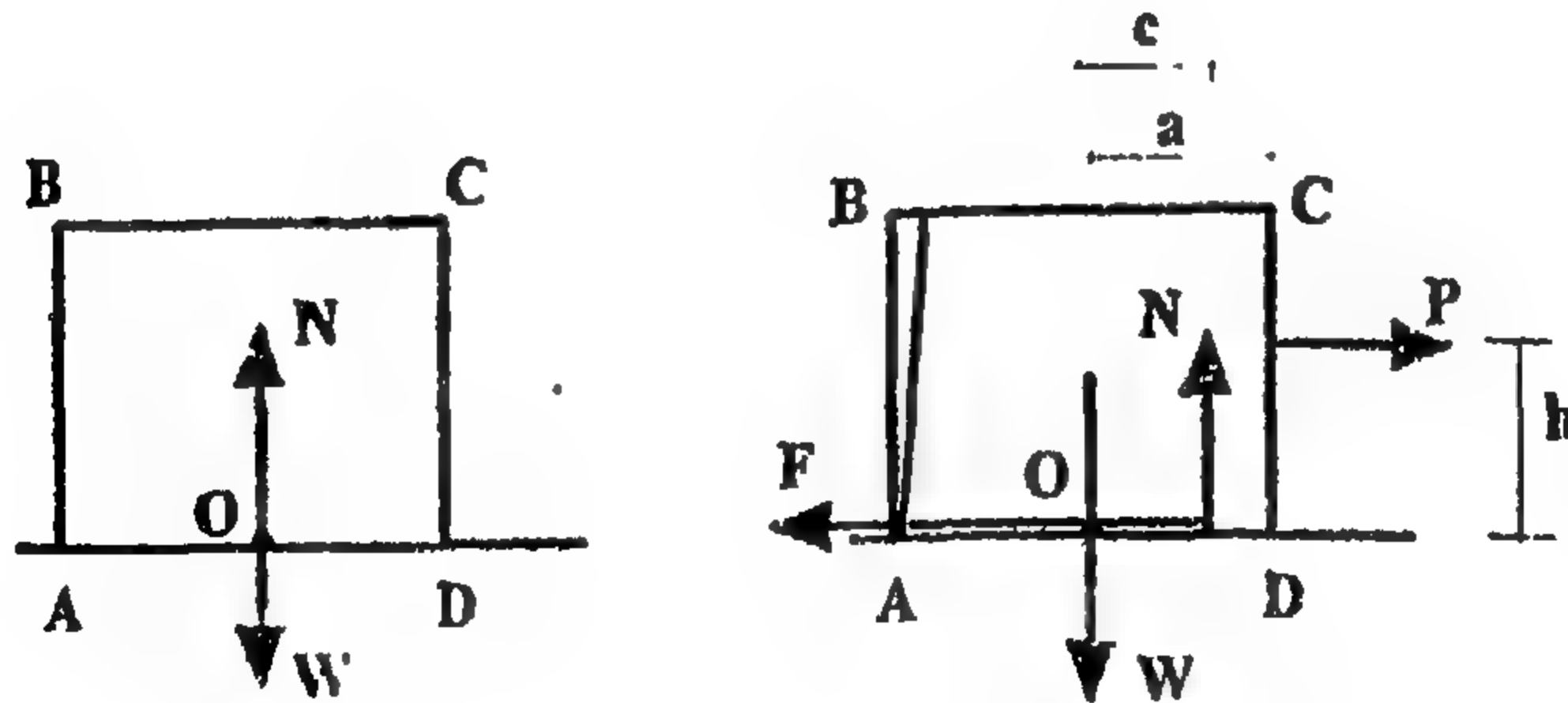
$$\sum x = 0$$

$$T = \mu_2 N_2$$

$$T = \mu_2 W_2$$

## ٢ - الإنزلاق والإنقلاب:

عند وضع جسم له أبعاد معلومة لا يمكن إهمالها على سطح أفقي خشن بدون تأثير أي قوة خارجية فإن الجسم يتزن تحت تأثير وزنه  $W$  ورد الفعل العمودي  $N$  بحيث  $N = W$  والقوتان على خط عمل واحد يمر بنقطة  $O$ .



حالة إتزان دون  
حدوث أي محاولة للحركة

محاولة حركة الجسم  
 $c < a, F < \mu N$

عند تحريك الجسم بواسطة  $P$  قوة أفقية يحدث شيان في نفس الوقت وهما:

١ - تولد قوة الاحتكاك  $F$  بحيث تحاول أن تمنع الجسم من الانزلاق وتكون قيمتها  $F = P$ .

٢ - يتحرك رد الفعل العمودي  $N$  من نقطة  $O$  نحو نقطة  $D$  وذلك لمنع الجسم من الانقلاب أو الدوران تبعاً للمعادلة الآتية :

$$\sum M_o = 0$$

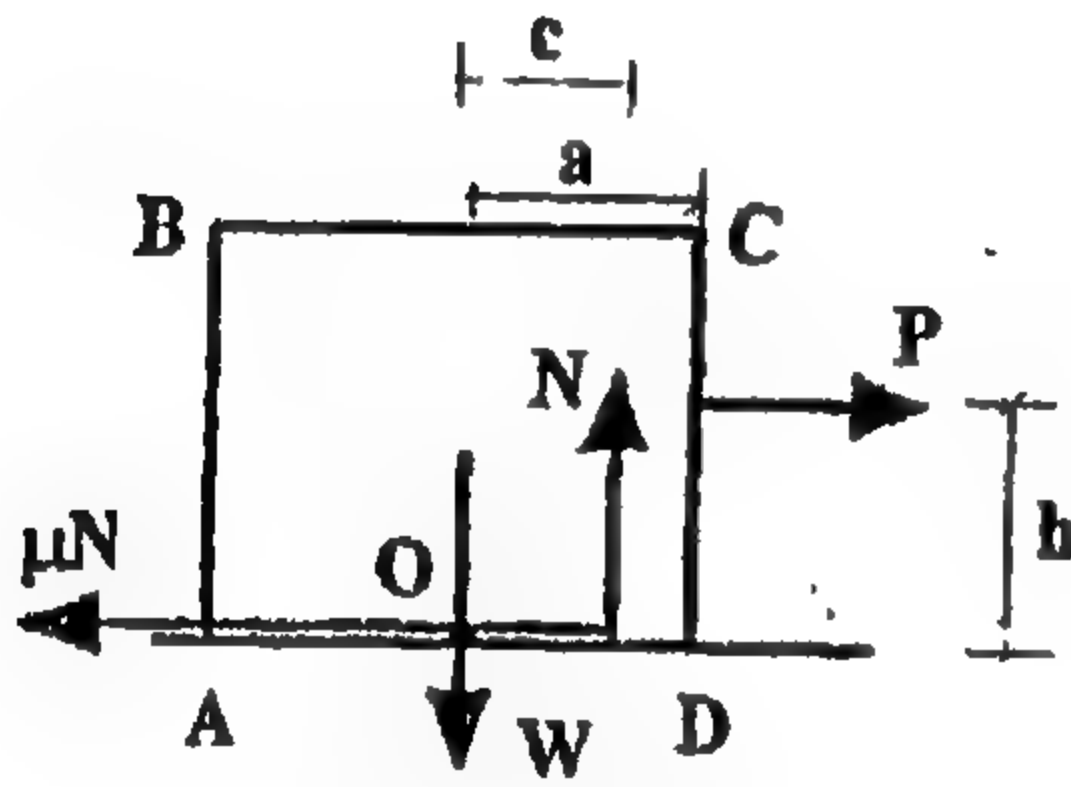
$$N \cdot C = P \cdot h$$

حيث  $N$  تساوي  $W$

بمحاولة تحريك الجسم بزيادة قيمة القوى  $P$  وتبعاً للمعادلتين

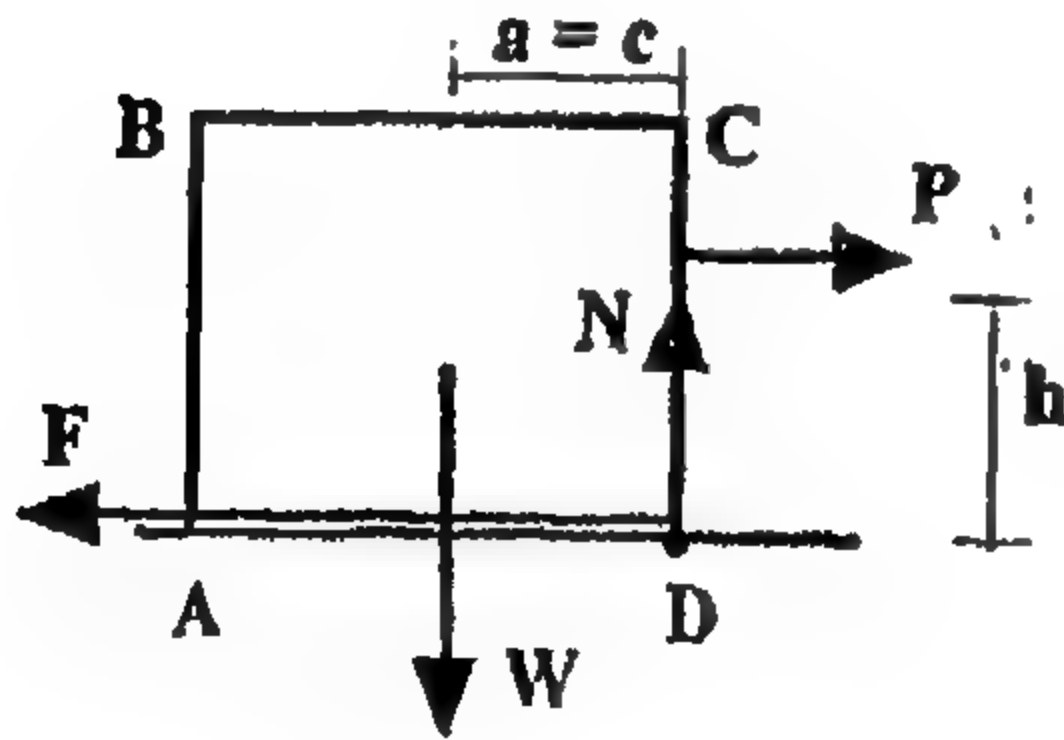
$$F = P, \quad N \cdot C = P \cdot h$$

نجد أن كلا من  $F$ ،  $C$  تزيد بزيادة  $P$ ، ومع زيادة  $P$  قد يحدث أحد الاحتمالات الآتية:



على وشك الانزلاق

$$c < a, \quad F = \mu N$$



على وشك الانقلاب

$$c = a, \quad F < \mu N$$

١ - تصل قوة الاحتكاك  $F$  إلى قيمتها العظمى

$\mu N$  قبل أن يصل  $N$  إلى نقطة  $D$  وعندئذ

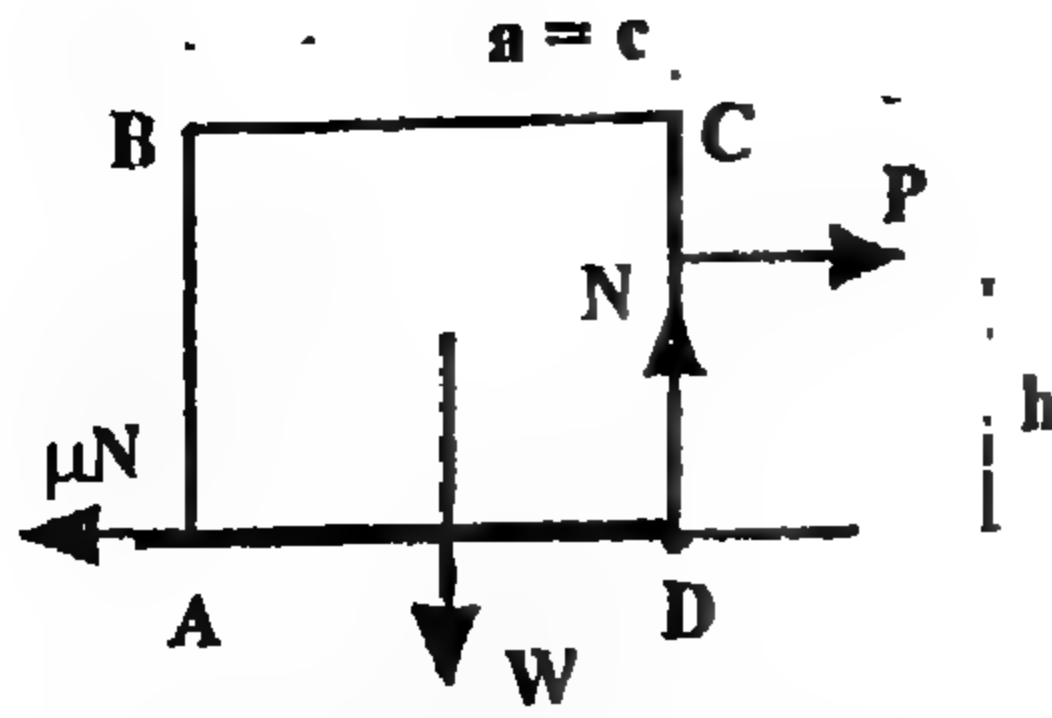
يبدأ الجسم في الانزلاق قبل الانقلاب.

٢ - يصل خط عمل  $N$  إلى نقطة  $D$  ( $c = a$ )

قبل أن تصل  $F$  إلى قيمتها العظمى  $\mu N$

وعندئذ يبدأ الجسم في الانقلاب حول  $D$

قبل الانزلاق.



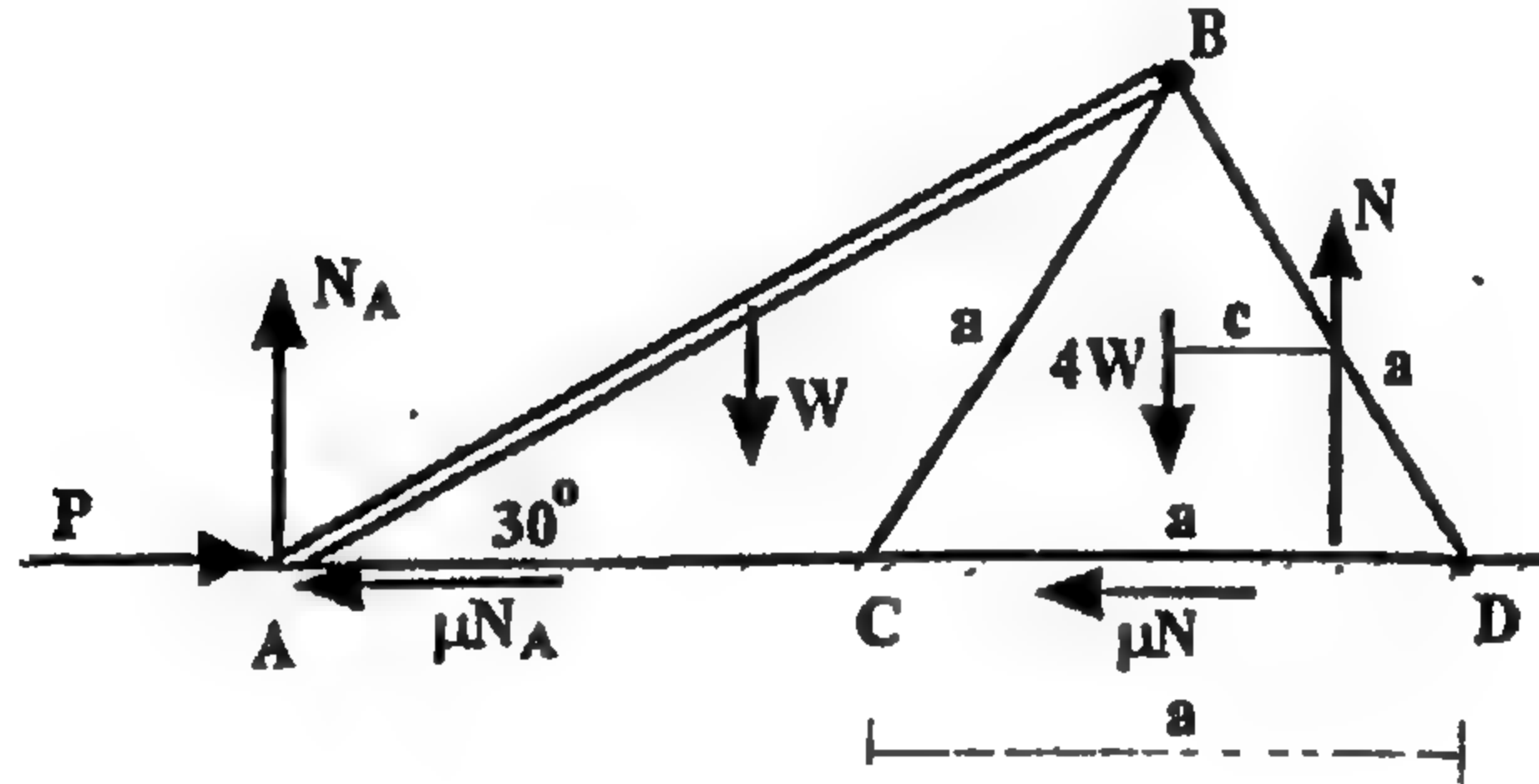
٣ - تصل قوة الاحتكاك  $F$  إلى قيمتها العظمى  $\mu N$  في نفس اللحظة التي يصل فيها خط عمل  $N$  إلى نقطة  $D$  وعندئذ يبدأ الجسم في الإنزلاق والانعقاد حول  $D$  معا.

على وشك أنزلاق و انعقاد

$$c = a, F = \mu N$$

مثال ١ :

لوح  $AB$  وزنه  $W$  يتصل مفصليا في  $B$  بمنشور ثلاثي  $BCD$  وزنه  $4W$  ويستقران على أرض خشنة بمعامل احتكاك يساوي  $\sqrt{3}/8$  أوجد القوة الأفقية  $P$  اللازمة لإحداث الإنزلاق وأثبت أن المنشور لا ينقلب في هذه الحالة .



الحل

بدراسة الإتران للمجموعة

$$\sum x = 0$$

$$P = \mu(N_A + N)$$

$$\sum y = 0$$

$$N_A + N = 5W$$

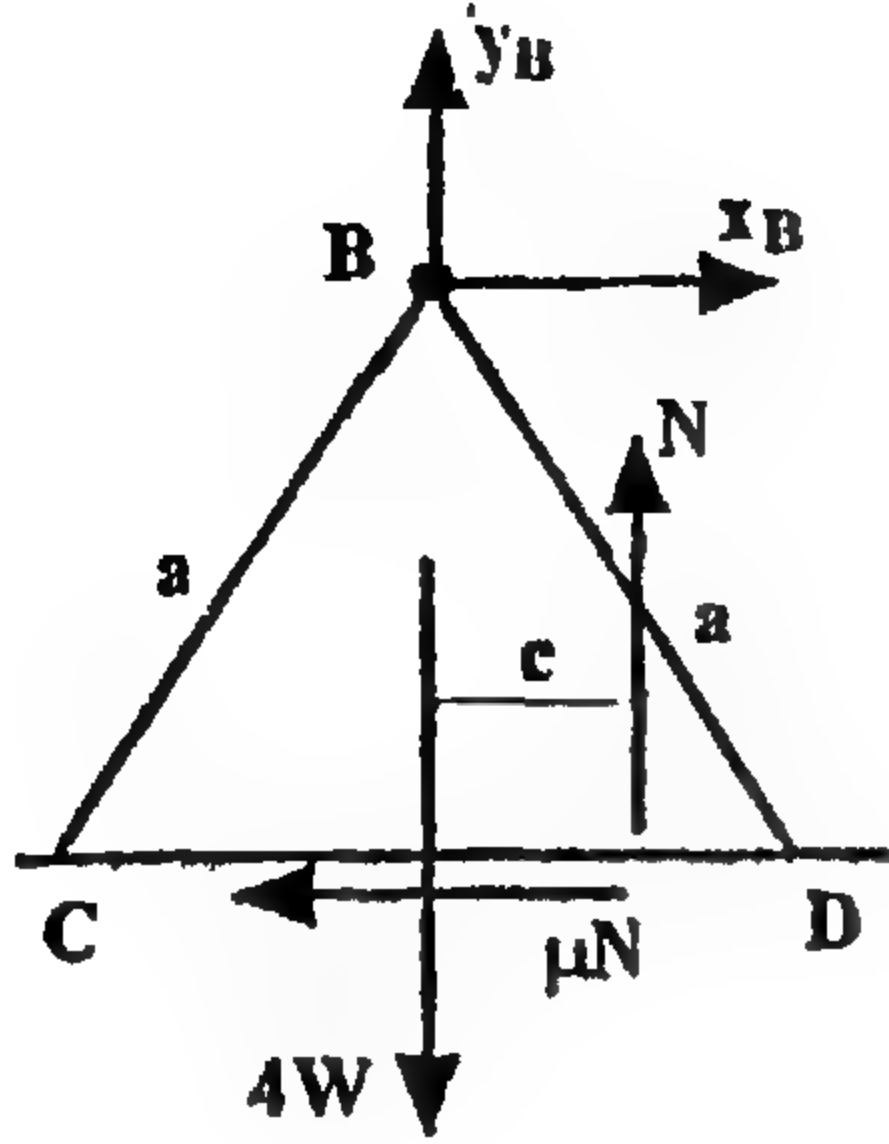
$$\therefore P = 5\mu W$$

$$\therefore \mu = \sqrt{3}/8$$

$$P = \frac{5\sqrt{3}}{8} W$$

لإثبات أن المنشور لا يتقلب يجب إثبات أن  $c \leq \frac{1}{2}a$ .

بدراسة إتران المنشور فقط



$$\sum M_B = 0$$

$$N \cdot C = \mu \cdot N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$C = \frac{3}{16}a$$

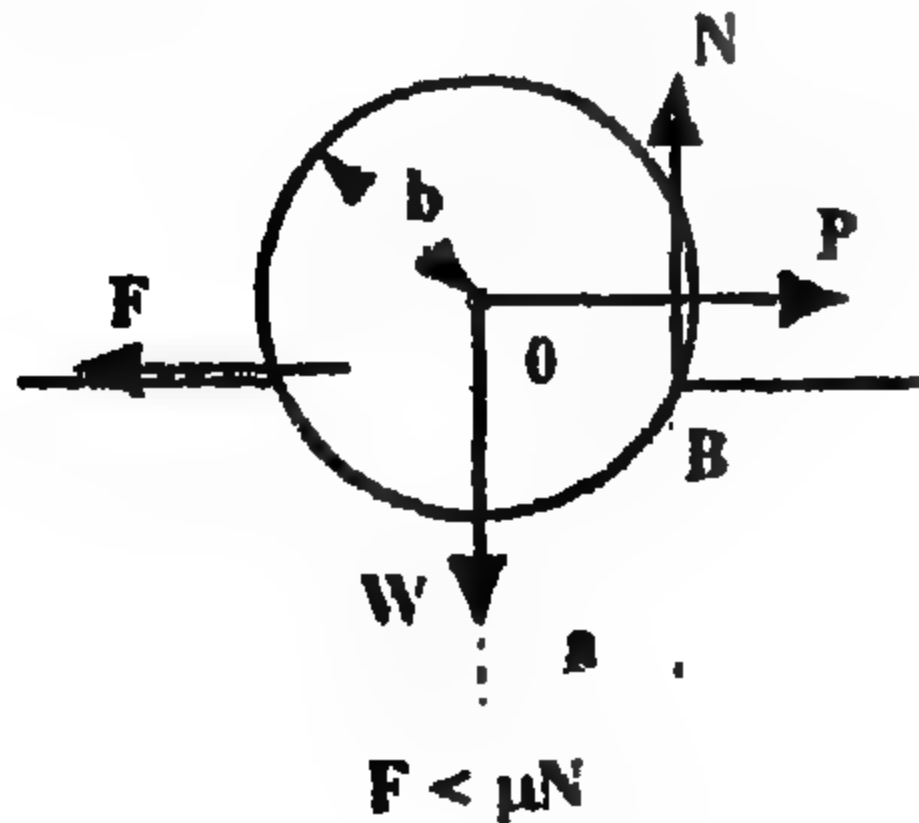
وهذا يعني أن المنشور لا يتقلب حيث أن  $C < \frac{1}{2}a$ .

### ٣ - مقاومة التدحرج:

تنشأ عن تدحرج إسطوانة أو كره أو عجله على سطح خشن . قد يحدث تفريط أو إبعاج في الكره أو الإسطوانة نتيجة أن أي من الأرض أو الإسطوانة غير متكافئ تامي الصلابة .

وإذا كانت صلابتهما تامه بحيث لا يحدث أي قدر من التفريط فإن التماس بينهما يكون على راسم في الإسطوانة ( يظهر نقطة واحده على الشكل ) أو نقطة تماس واحده بين الكره المتدحرجة والسطح و لكفت أي قوة سحب صغيرة P لإحداث التدحرج .

ويمكن إعتبار التدحرج مجموعة إنقلابات متلاحقة عند B التي تسكن لحظيا وتنقلب حول الإسطوانة



بحيث تتغير B باستمرار على سطح الإسطوانة ويكون طول القوس على سطح الإسطوانة مساويا لطول المسافة المقطوعة على الأرض.

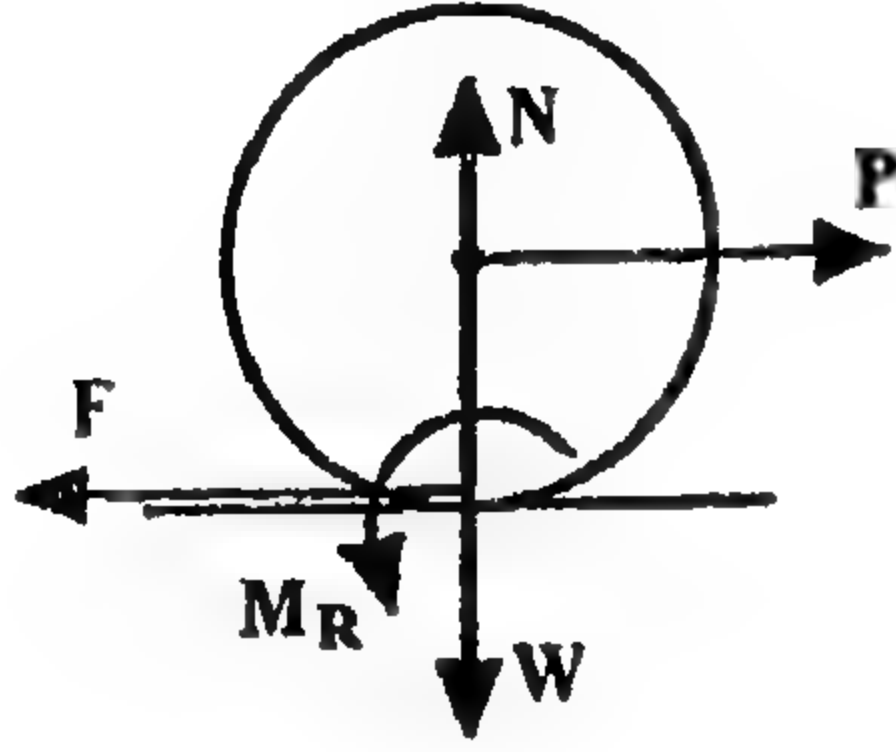
وهذا يعني أن  $F$  لا تصل إلى  $\mu N$  ، وبكتابة معادلة الإتران على الشكل :

$$F = P$$

$$N = W$$

$$P \cdot b \cos \theta = N \cdot a \quad \therefore P = \frac{Wa}{b \cos \theta}$$

نظراً لأن  $\theta$  صغيره جداً فإن  $\cos \theta = 1$



$$\therefore P = W \frac{a}{b}$$

و المسافة  $a$  تسمى عادة ذراع مقاومة التدحرج  $M_R = N \cdot a$

مثال ١ :

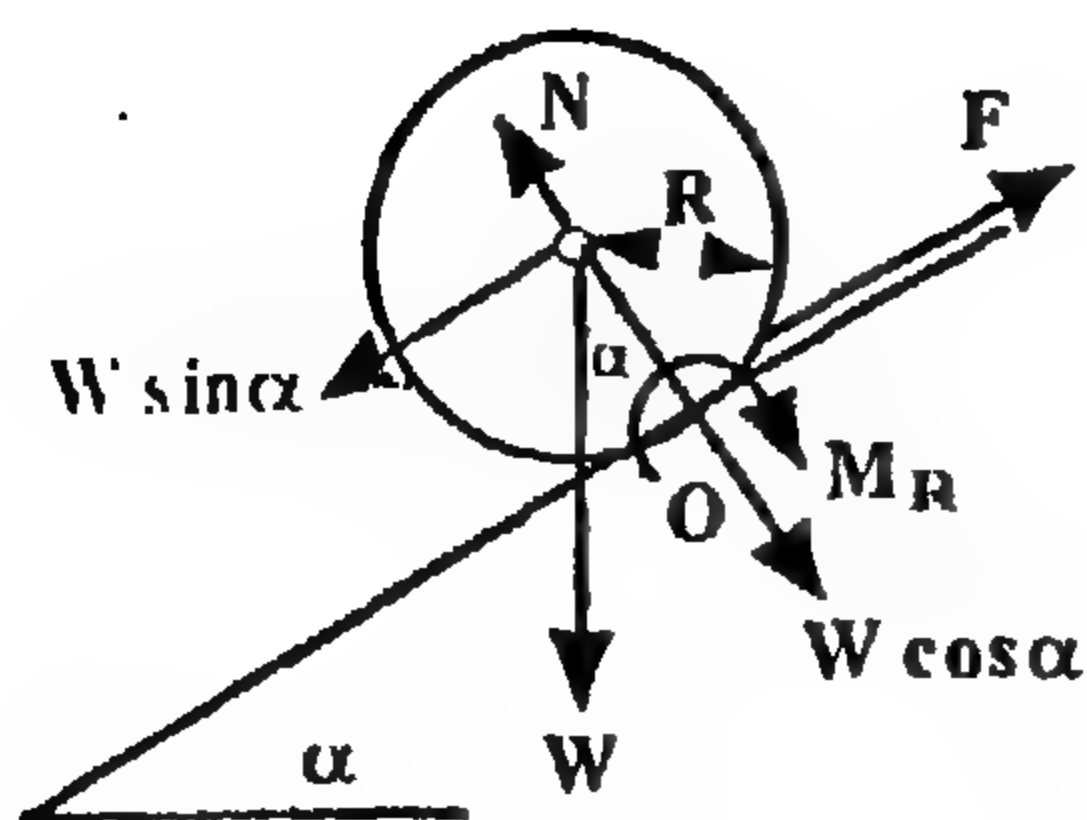
اسطوانة نصف قطرها  $R$  ووزنها  $W$  وضعت على مستوى مائل خشن زاوية ميله على الأفقي صغيرة و مقدارها  $\alpha$  فبدأت الاسطوانة في التدحرج بانتظام هابطه إلى أسفل المستوى المائل بتأثير وزنها. عين ذراع مقاومة التدحرج ثم عين القوة  $P$  التي اذا أثرت في مركز الأسطوانة موازيه للمستوى المائل لتدحرجت الأسطوانة صاعده المستوى بسرعه منتظمه .

الحل :

أولاً في حالة الهبوط :

بالتحليل عمودي على اتجاه المستوى المائل

$$N = W \cos \alpha \quad \text{..... ( 1 )}$$



ثم بأخذ العزوم حول O

$$W \sin \alpha \cdot R = N \cdot a = M_R \quad (2)$$

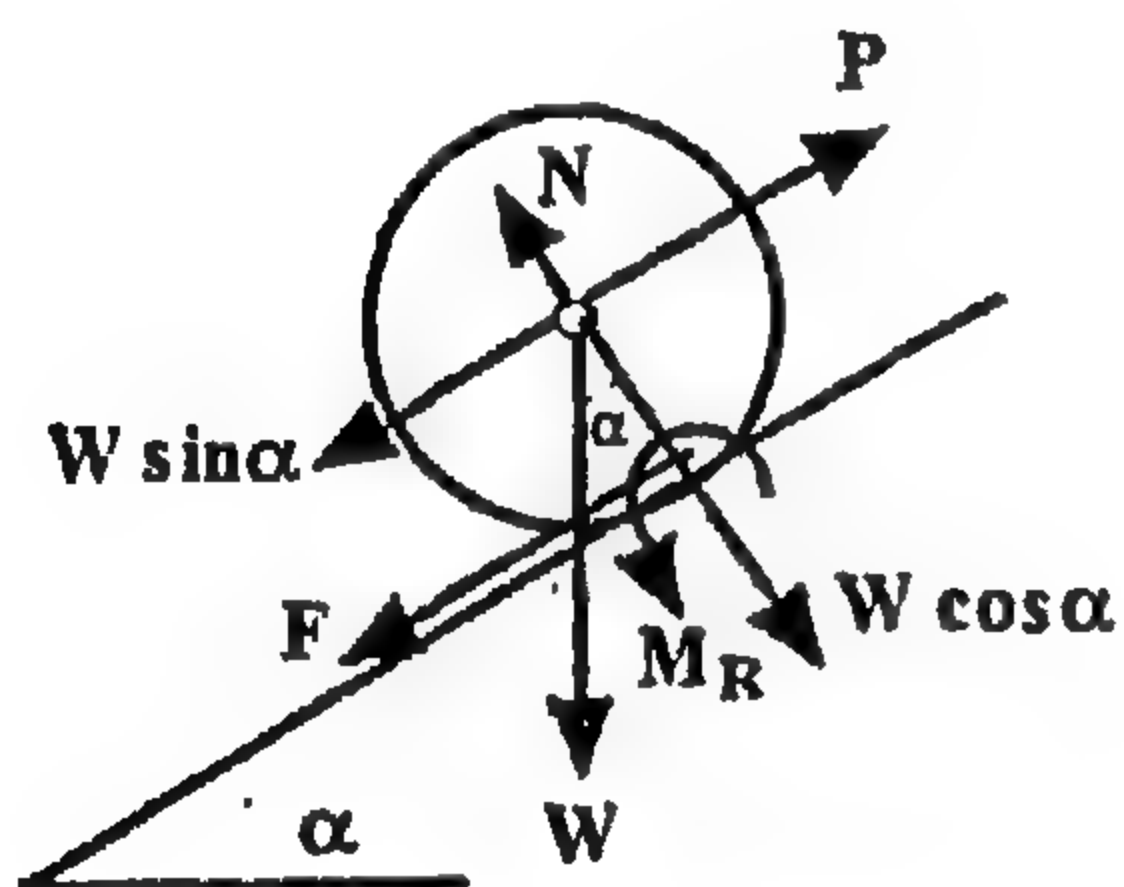
بحل (1) و (2) في a ينتج

$$W \sin \alpha \cdot R = W \cos \alpha \cdot a$$

$$= R \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad a = R \tan \alpha \quad (3)$$

ثانيا في حالة الصعود :

بأخذ العزوم حول O



$$M_O = P \cdot R = W \sin \alpha \cdot R + M_R$$

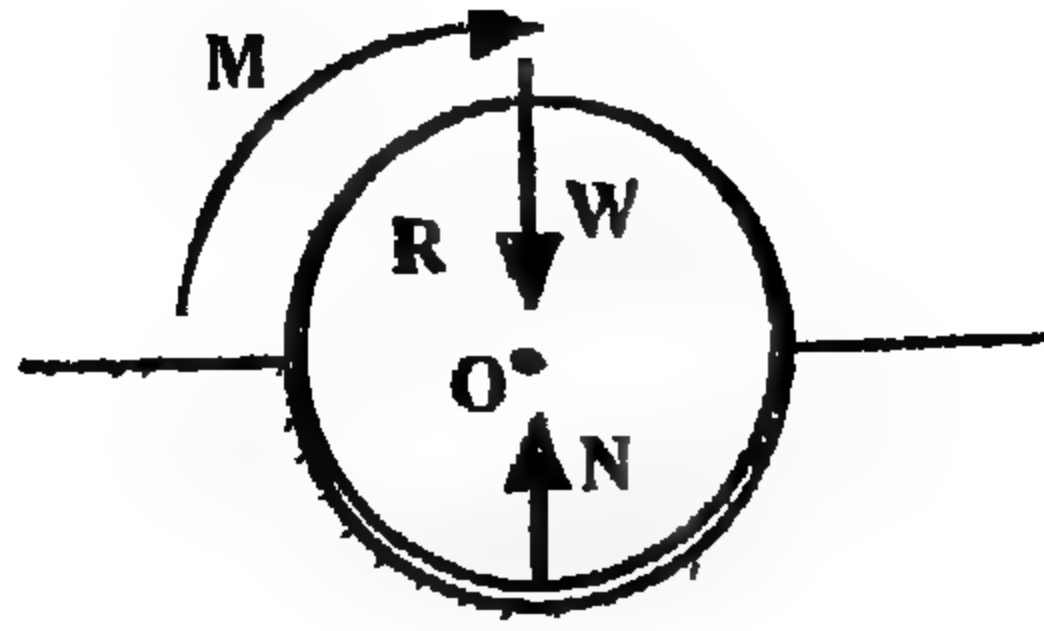
$$P \cdot R = W \sin \alpha \cdot R + W \cos \alpha \cdot a$$

و بالتعويض من المعادله (3) ينتج :

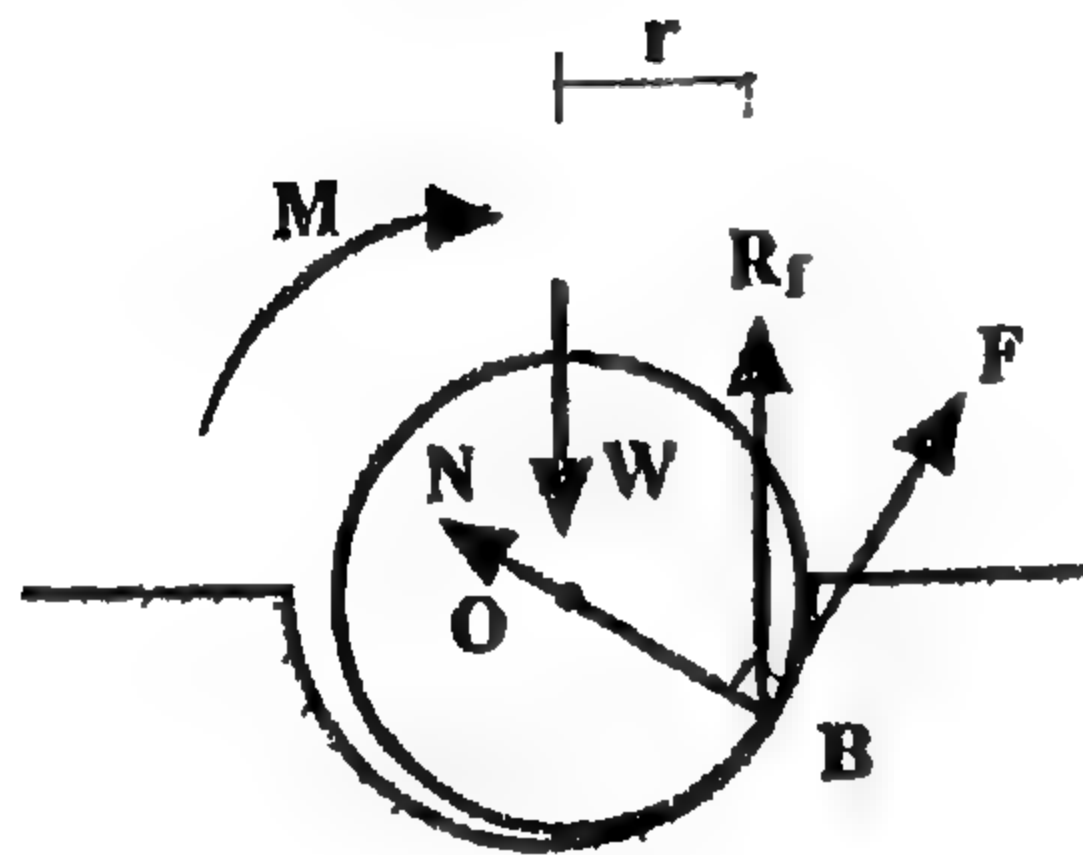
$$P \cdot R = W \sin \alpha \cdot R + W \cos \alpha \cdot R \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$P = 2W \sin \alpha$$

## ٤ - إحتكاك المحاور:



المحور هو عبارة عن جسم اسطواناني يؤثر عليه حمل و يمكن ادارته عن طريق التأثير عليه بعزم دوران . و يرتكز على كرمسي محور حيث يوجد بينه و بين المحور خلوص .

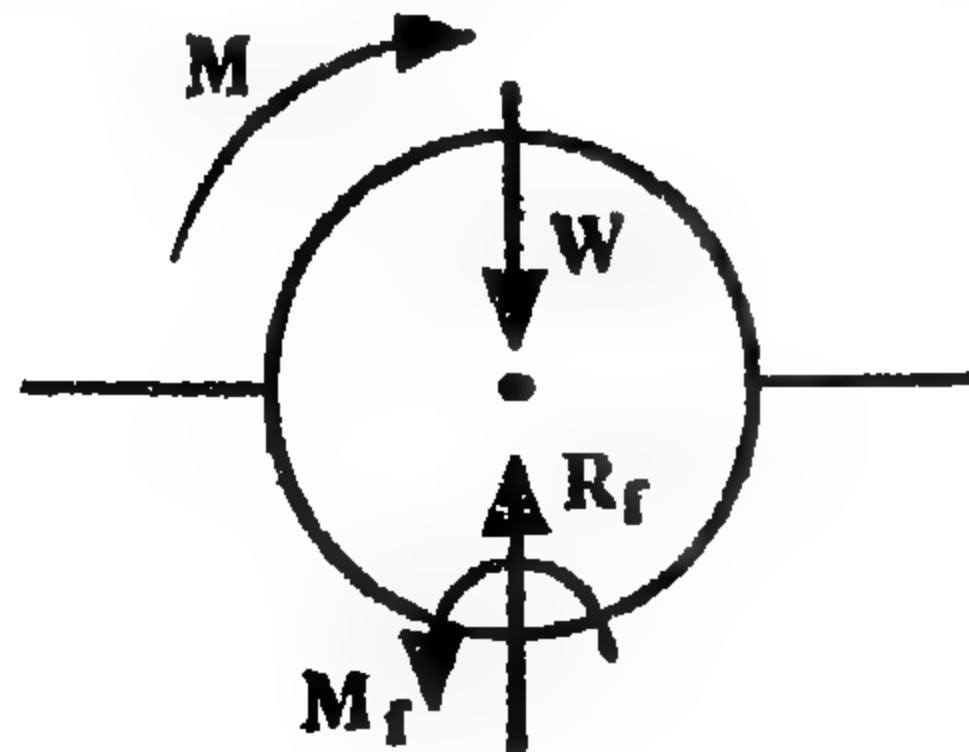


في عدم وجود أي خشونة في المحور أو الحامل فإنه أقل عزم دوران  $M$  تكفي لإدارة المحور .

نظراً لوجود قدر من الخشونة في المحور و حامله فإن قوة مقاومة الإحتكاك  $F$  تظهر على المحور بحيث تقاوم الدوران و تمر  $F$  بنقطة التماس بين المحور و الحامل ( رأس تماس ) التي تتقدم قليلاً لتسمح لردود الفعل من توليد عزم احتكاك مقاوم للدوران .

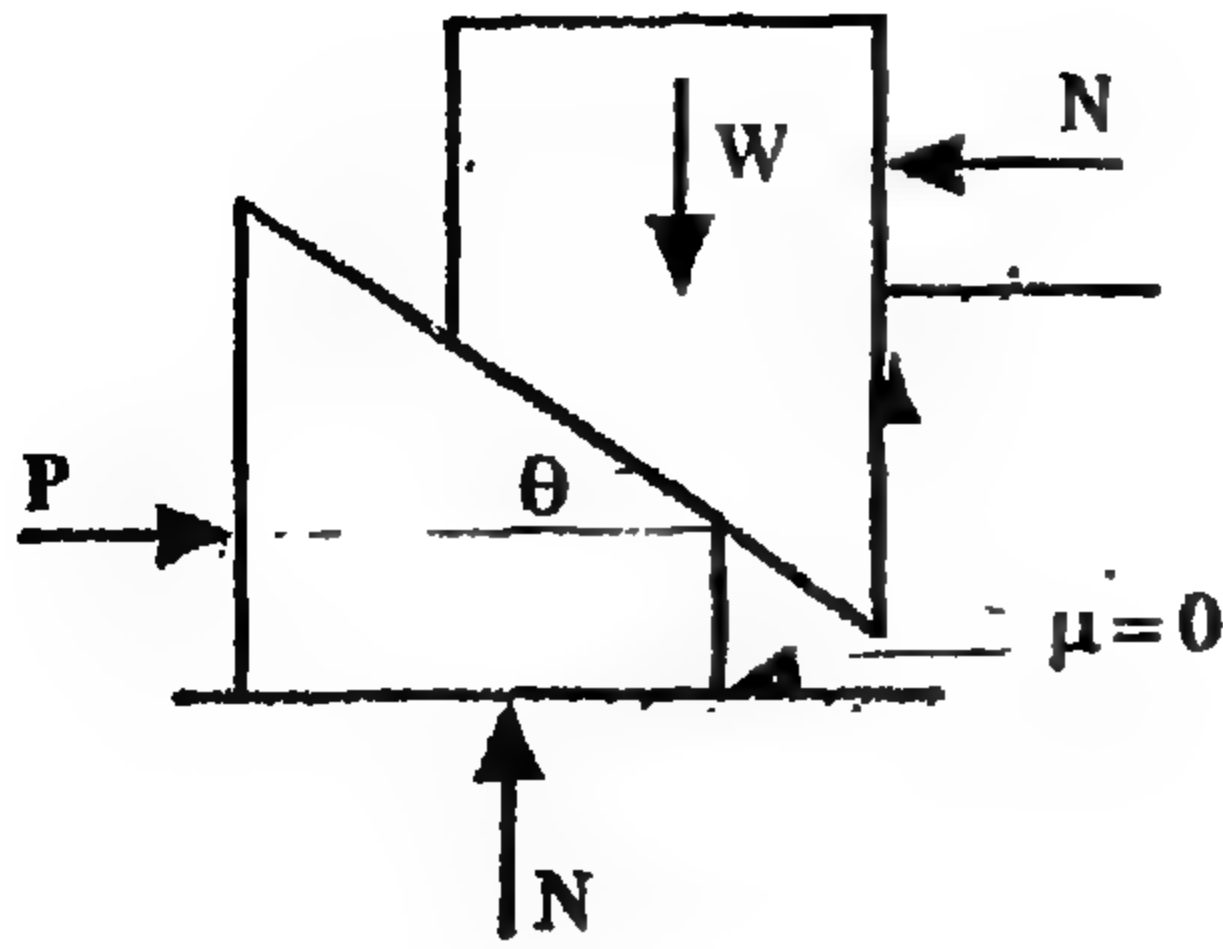
بتغير اتجاه الحمل  $W$  يتغير أيضاً اتجاه  $R_f$  و تظل المسافة  $r$  ثابتة و تسمى  $r$  بنصف قطر دائرة إحتكاك المحور .

يمكن إعادة  $R_f$  الى مركز المحور  $O$  موازيه لنفسها مع ازالة عزم ازدواج  $M_f$  يسمى عزم إحتكاك



المحور و هو مضاد لعزم الإدارة  $M$  و يساويه في المقدار حيث  $M_f = M = W \cdot r$  و يمكن تقليل عزم مقاومة الإحتكاك و كذلك عزم الدوران عن طريق تقليل قوة الإحتكاك  $F$  و بالتالي يقل  $M_f$  عن طريق التزييت أو التشحيم .

## ٥ - الأسفين :



هو عبارة عن آلة بسيطة نستخدمها في عملها أساساً على الاحتكاك . و يستعمل عادة لرفع حمل معين أو لوزح جسيمين عن بعضهما .

يتضح من اتران المجموعة أن

$$N = W \dots\dots\dots (1)$$

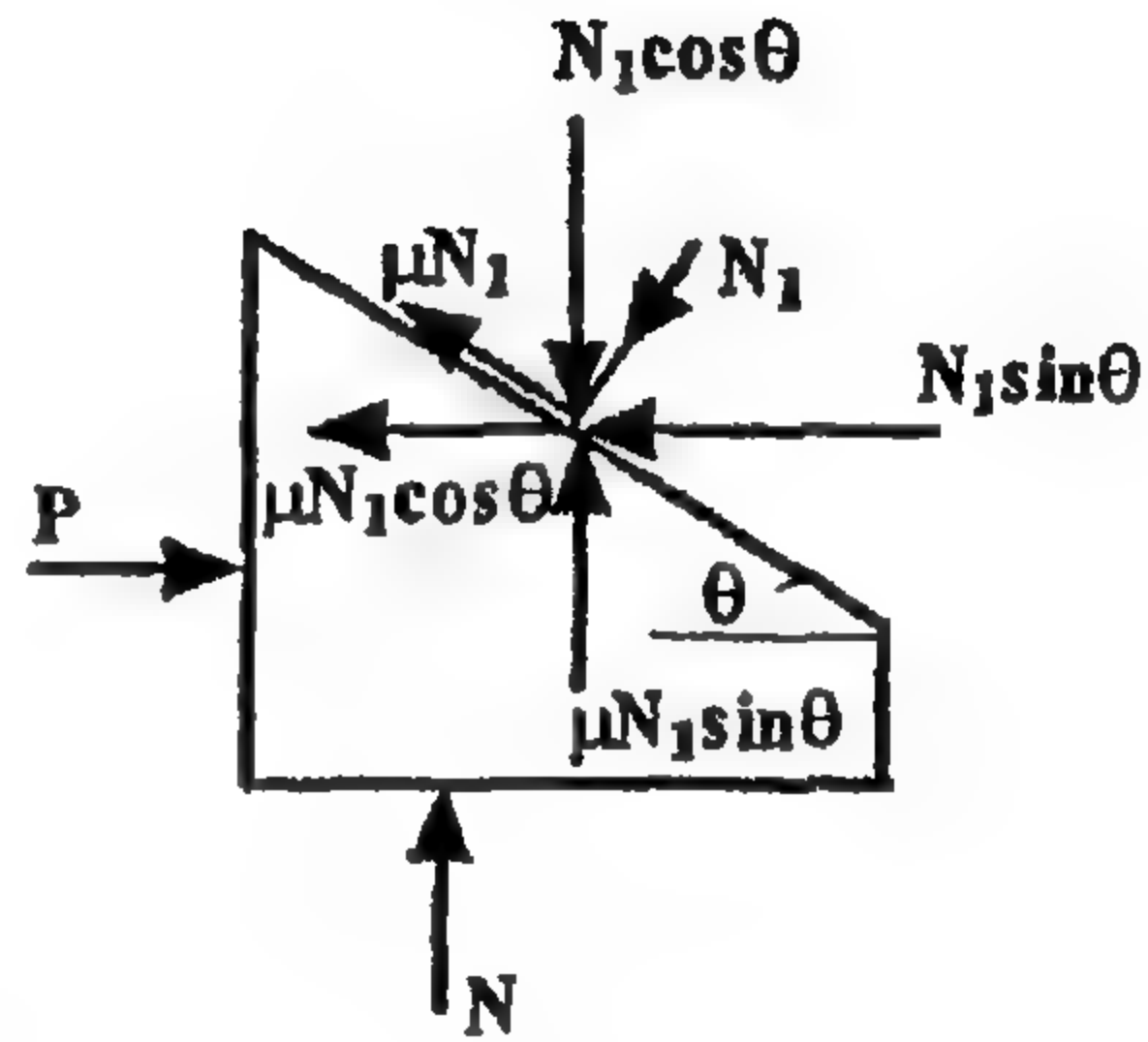
$$\Sigma y = 0$$

$$N_1 \cos \theta - \mu N_1 \sin \theta = N$$

$$N_1 = \frac{W}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \dots\dots\dots (2)$$

$$\Sigma x = 0$$

$$P = \mu N_1 \cos \theta + N_1 \sin \theta \dots\dots\dots (3)$$



بالتعويض من ( 2 ) في ( 3 ) ينتج أن

$$P = W \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \dots\dots\dots (4)$$

المعادلة ( 4 ) تعطي أقل قوة P تلزم لرفع الحمل W الى أعلى . و يتضح من هذه المعادلة أنه كلما زادت زاوية رأسي الأسفين θ فإن الكمية (  $\cos \theta - \mu \sin \theta$  ) تقل و بالتالي تزيد القوى p اللازمة لرفع W . و يستحيل رفع الحمل اذا وصلت الكمية (  $\cos \theta - \mu \sin \theta$  ) الى الصفر أي اذا كان :

$$\cos \theta = \mu \sin \theta$$

$$\mu = \cot \theta$$

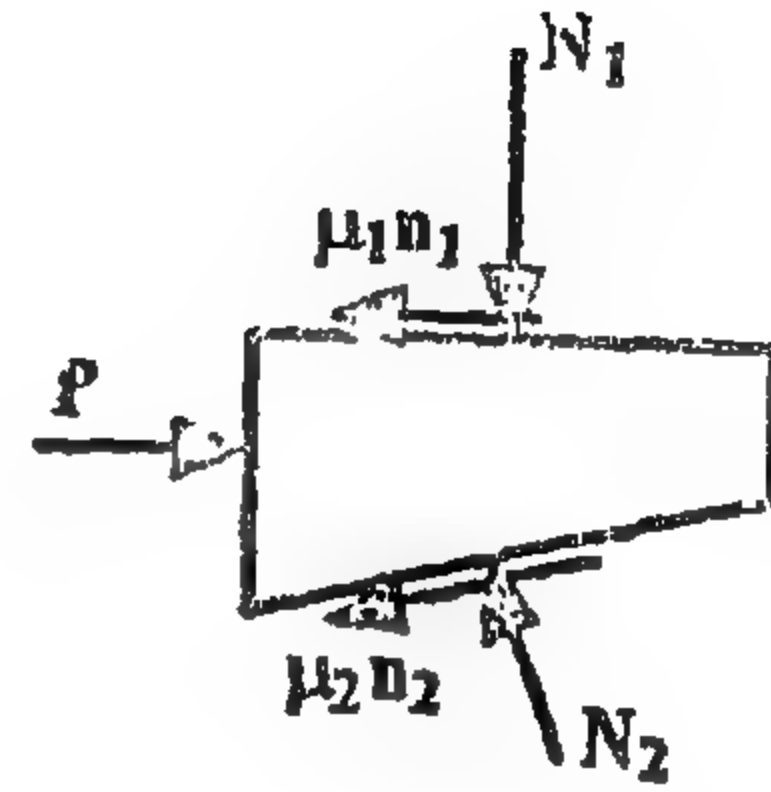
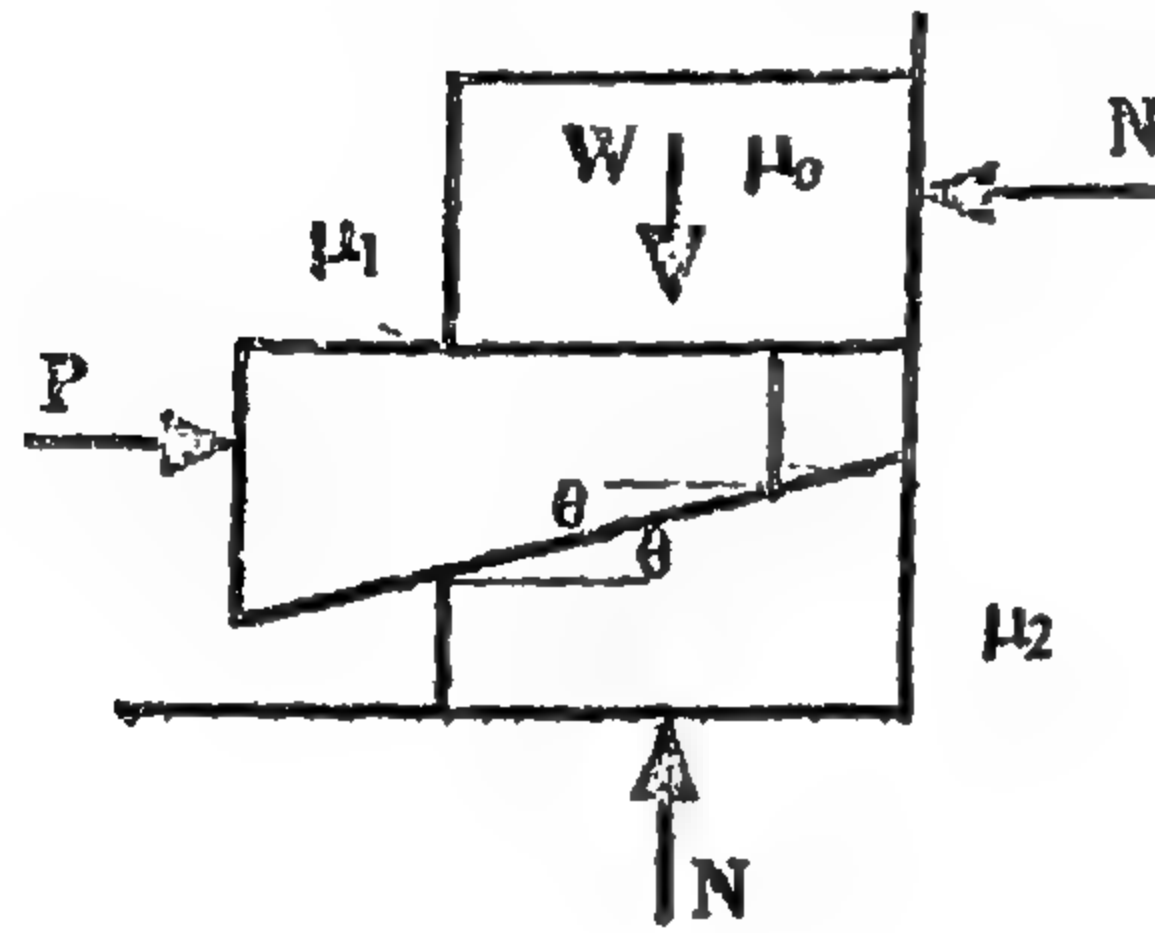
و عندها تتحول P الى اللانهاية .



مثال :

يستعمل الأسفين الموضح بالشكل لرفع الحمل  $W$  . معامل الاحتكاك بين الأسفين و الحمل  $\mu_1$  و بين الأسفين و الكتلة السفلى  $\mu_2$  و اعتبر الحائط أملس عين القوة  $P$  اللازمة لرفع الحمل  $W$  اذا كان :

$$W = 8000 \text{ lb} , \mu_1 = 0.3 , \mu_2 = 0.1 \text{ and } \theta = 10^\circ$$



الحل :

من اتزان الحمل نلاحظ .

من التحليل الراسي للأسفين :

$$N_1 = W$$

$$N_1 = N_2 \cos \theta - \mu_2 N_2 \sin \theta$$

$$N_2 = \frac{W}{\cos \theta - \mu_2 \sin \theta}$$

من التحليل الأفقي :

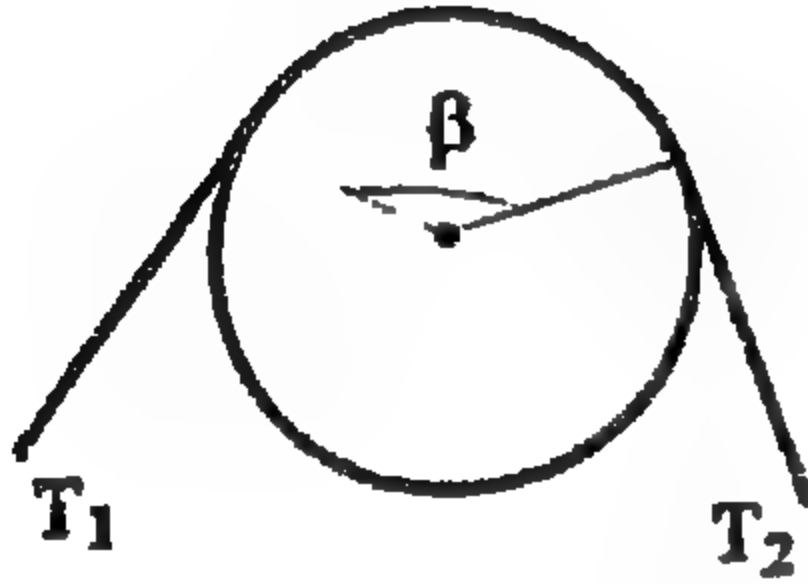
$$P = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 \cos \theta + N_2 \sin \theta$$

$$P = W \left( \mu_1 + \frac{\mu_2 \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \mu_2 \sin \theta} \right)$$

$$P = W \left( \mu_1 + \frac{\mu_2 + \tan \theta}{1 - \mu_2 \tan \theta} \right)$$

$$P = 4650 \text{ lb}$$

## ٦ - احتكاك الحبال أو السيور :



لو أن حبلًا أو سيرا يلتف حول محيط أسطوانة خشنة ثابتة بحيث يحمص زاوية مركزيه  $\beta$  و كان الشد في أحد طرفين  $T_1$  و في الطرف الآخر  $T_2$  و معامل الاحتكاك بين الحبل و الأسطوانة  $\mu$  .  
$$T_2 = T_1 e^{\mu \beta}$$

مثال ١ :

يراد منع وزن قدره ١٠٠٠ كغم من الهبوط و ذلك عن طريق ربطه بحمل و لف الحبل حول أسطوانة ثابتة خشنة . إذا كان معامل الاحتكاك بين الحبل و الأسطوانة  $\mu = \frac{1}{2}$  و لف الحبل مرتين على سطح الأسطوانة ، فعين القوة اللازمة لمنع الحمل من الهبوط .

الحل :

$$\mu = 1/2$$

$$\beta = 2\pi \times 2 = 4\pi$$

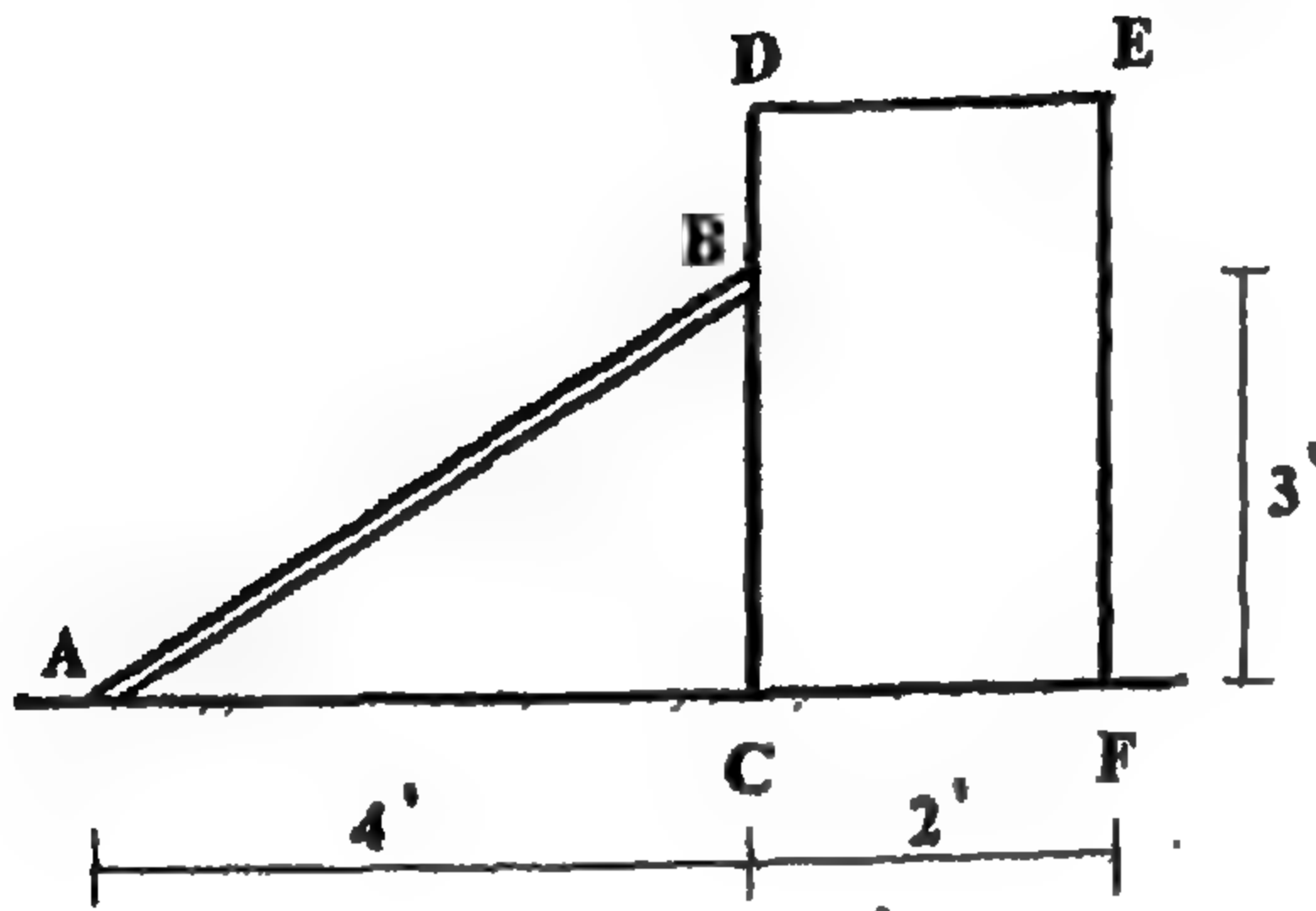
$$T_2 = 1000 \text{ kg}$$

$$\text{Then } T_2 = T_1 e^{\mu\theta}$$

$$1000 = T_1 e^{1/2 4\pi}$$

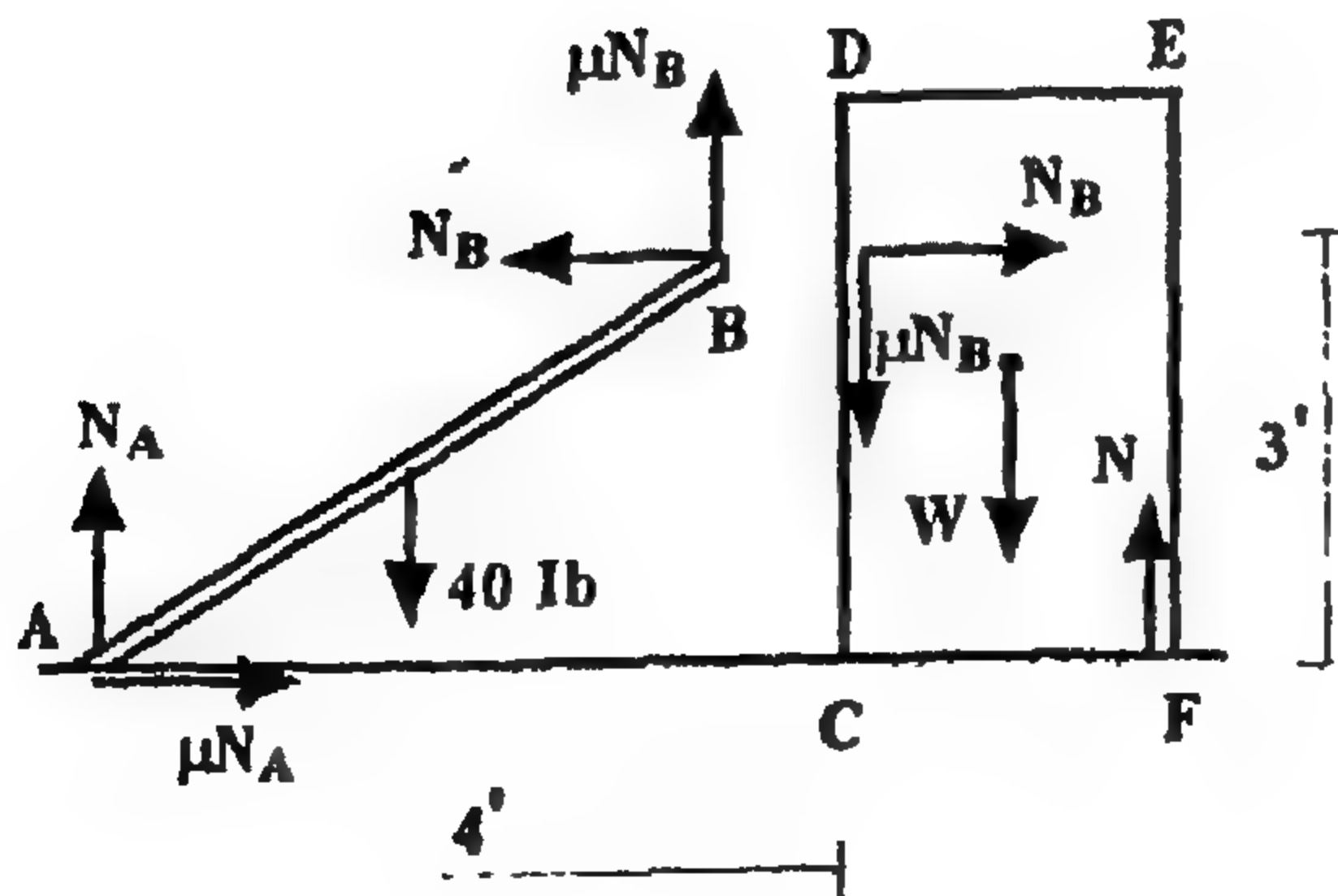
$$T_1 = \frac{1000}{e^{2\pi}} = 1.867 \text{ kg}$$

مثال ٢ :



قضيب منتظم AB وزنه ٤٠ باوند يتركز على أرض خشنة وعلى كتله مستطيله المقطع CDEF بنفس الحشونه كما في الشكل . اذا كان القضيب على وشك الانزلاق و الكتله على وشك الانقلاب . أوجد معامل الاحتكاك ، وزن الكتلة W .

الحل :



$$\sum X = 0$$

$$N_B = \mu N_A \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum Y = 0$$

$$N_A + \mu N_B = 40 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\sum M_A = 0$$

$$40 \times 2 = 3N_B + 4\mu N_B \quad \dots\dots\dots (3)$$

على (1)، (2)، (3) في المجاهيل الثلاثة  $N_B$ ،  $N_A$ ،  $\mu$  ينتج :

$$\mu = 1/2$$

$$N_B = 16 \text{ Ib}$$

$$N_A = 32 \text{ Ib}$$

بدراسة اتزان الكتلة :

$$\sum M_F = 0$$

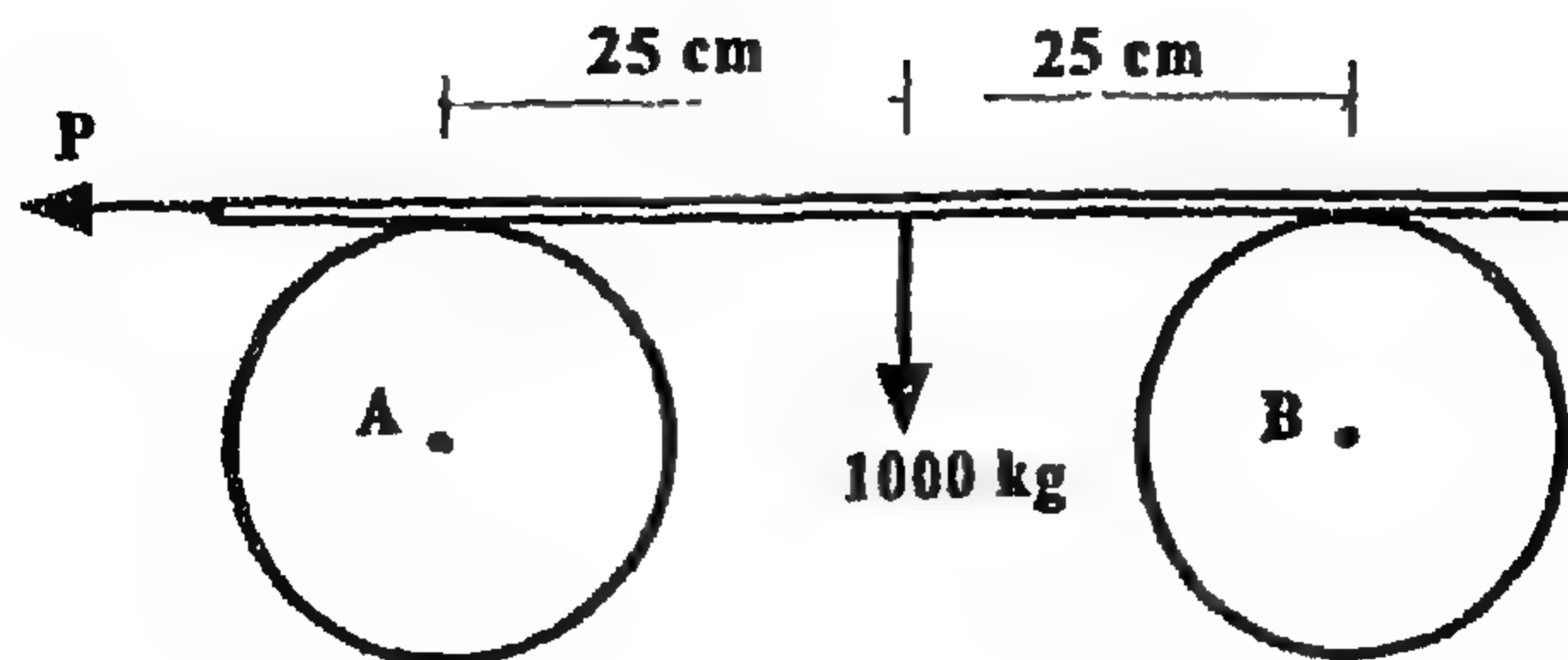
$$W \cdot 1 = 3 N_B - 2\mu N_B$$

$$W = 32 \text{ Ib}$$

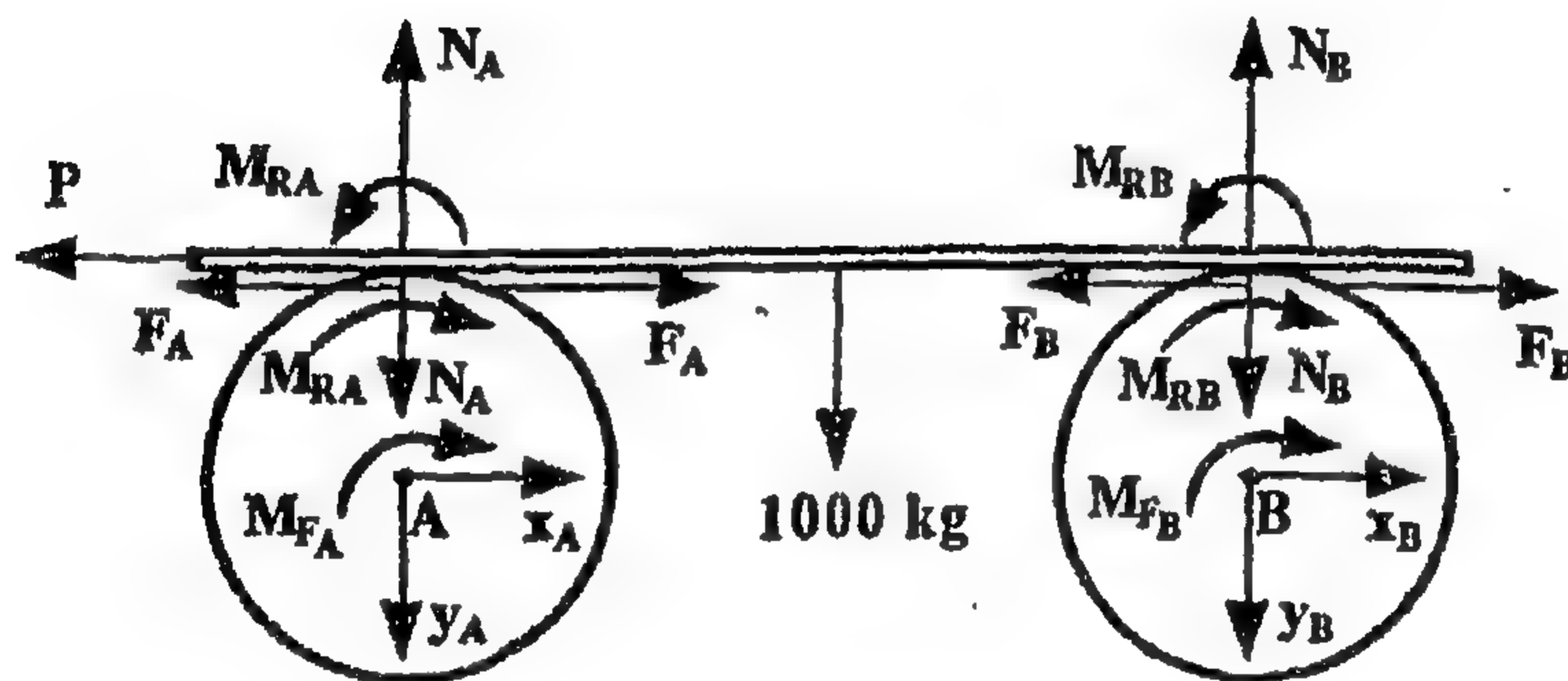
مثال ٣ :

يستعمل الجهاز المبين بالشكل داخل المصانع لجر الألواح الثقيلة و ذلك عن طريق وضعها على عجلتين خفيفتين مركبتين على محورين ثابتين A ، B في مستوى أفقي واحد ثم شد اللوح بقوة أفقية P . و المطلوب حساب قيمة P اذا كان :

وزن اللوح ١٠٠٠ كجم ، ذراع مقاومة التدحرج بين اللوح و كل من العجلتين = ٢٥ سم ،  
 نصف قطر دائرة احتكاك المحور عند A ، B يساوي ٢٥ سم ، نصف قطر العجلة ١٠ سم والمسافة  
 بين المحورين ٥٠ سم .



الحل :



من اتران اللوح :

$$\Sigma X = 0$$

$$P = F_A + F_B$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$N_A + N_B = 1000$$

من اتزان العجلة A :

$$\Sigma M_A = 0$$

$$F_A \times 10 = M_{RA} + M_{FA}$$

$$M_{RA} = 1/4 N_A$$

$$M_{FA} = 1/4 Y_A$$

$$10 F_A = 1/4 (N_A + Y_A) \dots\dots\dots (1)$$

وكذلك من اتزان العجلة B و العزم حول B :

$$\Sigma M_B = 0$$

$$10 F_B = M_{RB} + M_{FB}$$

$$10 F_B = 1/4 (N_B + Y_B) \dots\dots\dots (2)$$

جمع (1) ، (2) ينتج :

$$F_A + F_B = 1/40 (N_A + y_A) + 1/40 (N_B + y_B)$$

$$= 1/40 (N_A + N_B) + 1/40 (y_A + y_B)$$

$$= 1/40 \times 1000 + 1/40 \times 1000$$

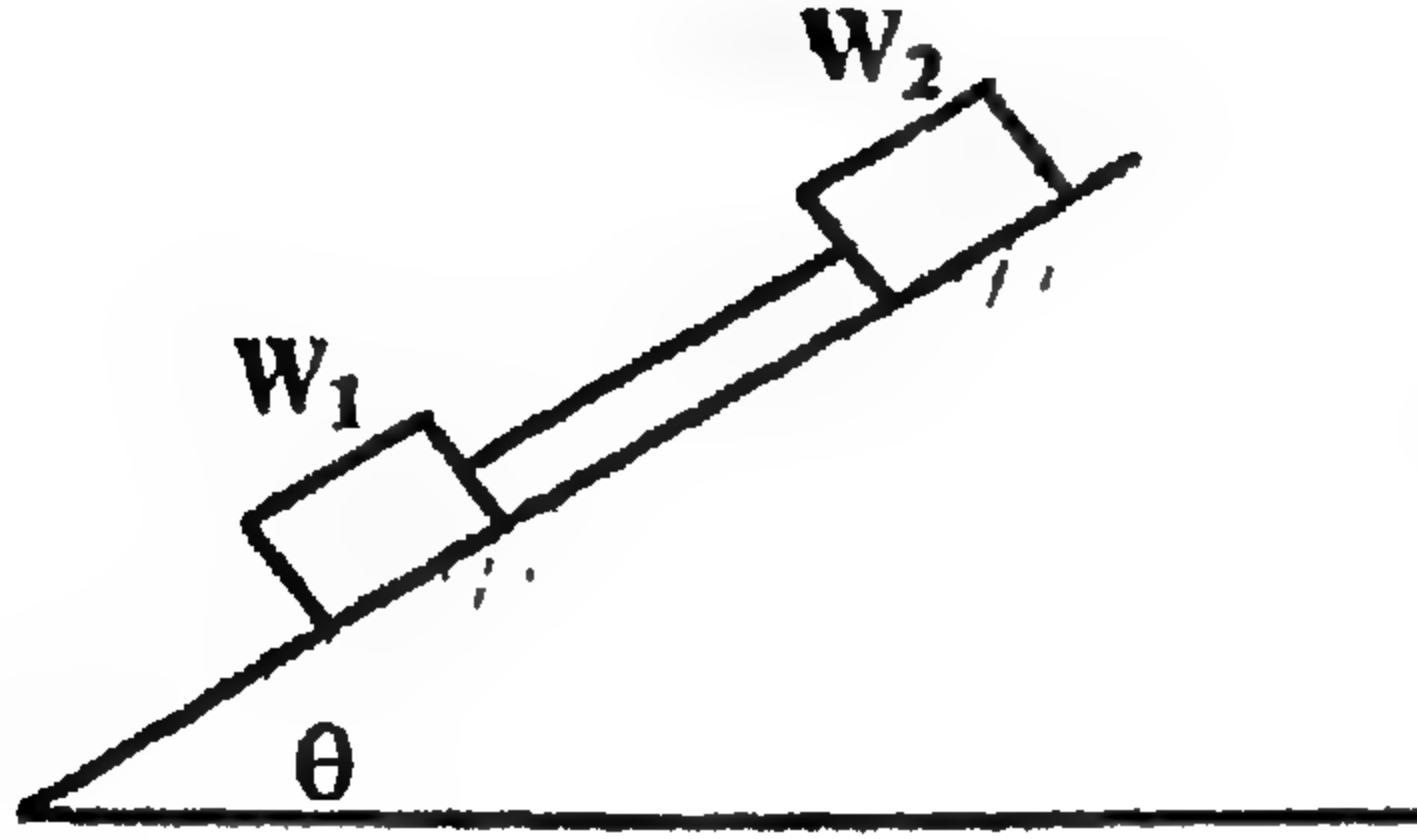
$$= 50$$

$$\therefore P = 50 \text{ kg}$$

أي أننا نحتاج إلى قوة تساوي ٥٠ كجم لسحب لوح وزنه ١٠٠٠ كجم .

## أمثلة متنوعة :

مثال ١ :

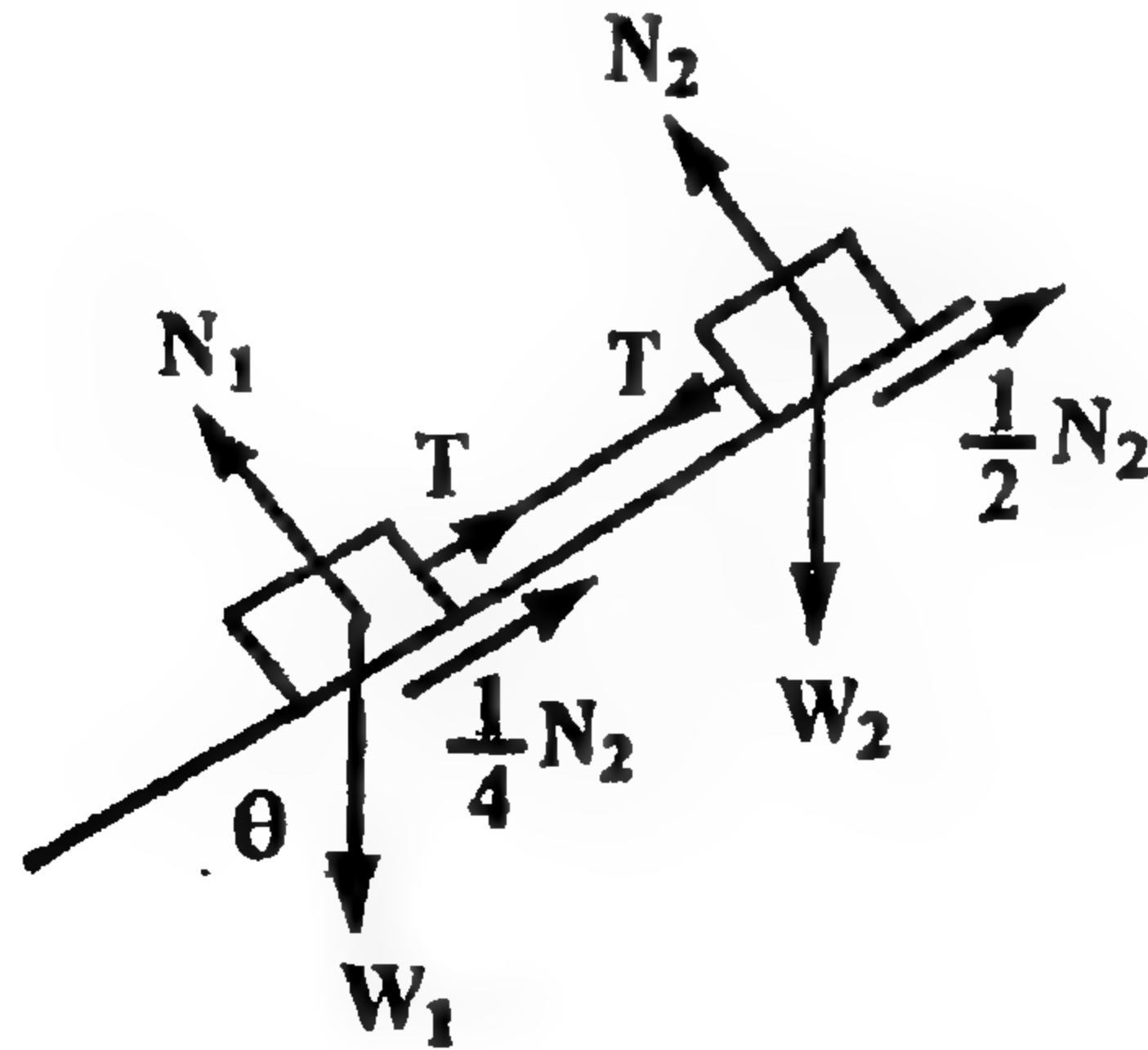


في الشكل المبين  $W_1$  تساوي ٥٠ كجم و  $W_2$  ٣٠ كجم وهما مربوطان معا بحبل مواز للمستوى المائل بزاوية  $\theta$ . معامل الاحتكاك بين  $W_1$  والمستوى يساوي  $\frac{1}{4}$  وبين  $W_2$  والمستوى يساوي  $\frac{1}{2}$ . احسب قيمة الزاوية  $\theta$  التي يحدث عندها الإنزلاق و قيمة الشد في الحبل عندئذ.

الحل :

بالتحليل في اتجاه المستوى المائل و العمودي عليه لإتزان  $W_1$  :

$$T + \frac{1}{4}N_1 = W_1 \sin \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$



$$N_1 = W_1 \cos \theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

من المعادلتين ( 1 ) ، ( 2 ) نحصل على :

$$T = W_1 \sin \theta - \frac{1}{4} W_1 \cos \theta \quad \dots\dots\dots (a)$$

كذلك بالتحليل في اتجاه المستوى المائل و العمودي عليه إتران  $W_2$  :

$$T + W_2 \sin \theta = \frac{1}{2} N_2 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$N_2 = W_2 \cos \theta \quad \dots\dots\dots (a)$$

من المعادلتين ( 3 ) ، ( 4 ) نحصل على :

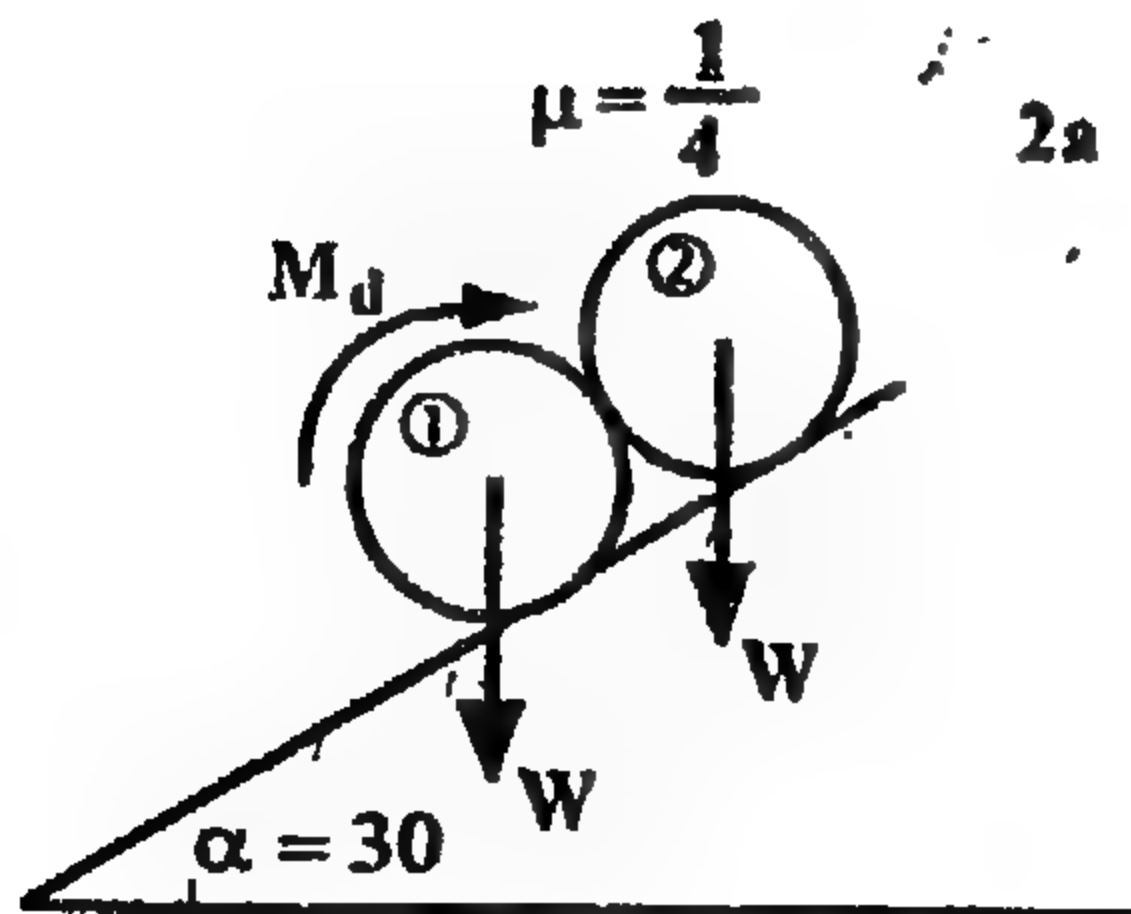
$$T = \frac{1}{2} W_2 \cos \theta - W_2 \sin \theta \quad \dots\dots\dots (a)$$

بقسمة المعادلتين ( a ) ، ( b ) ينتج أن :

$$\tan \theta = 0.344 \quad \therefore \theta = 19.0^\circ$$

نم من المعادلتين ( a ) و ( b ) نحصل على  $T = 4.43 \text{ kg}$

مثال ٢ :

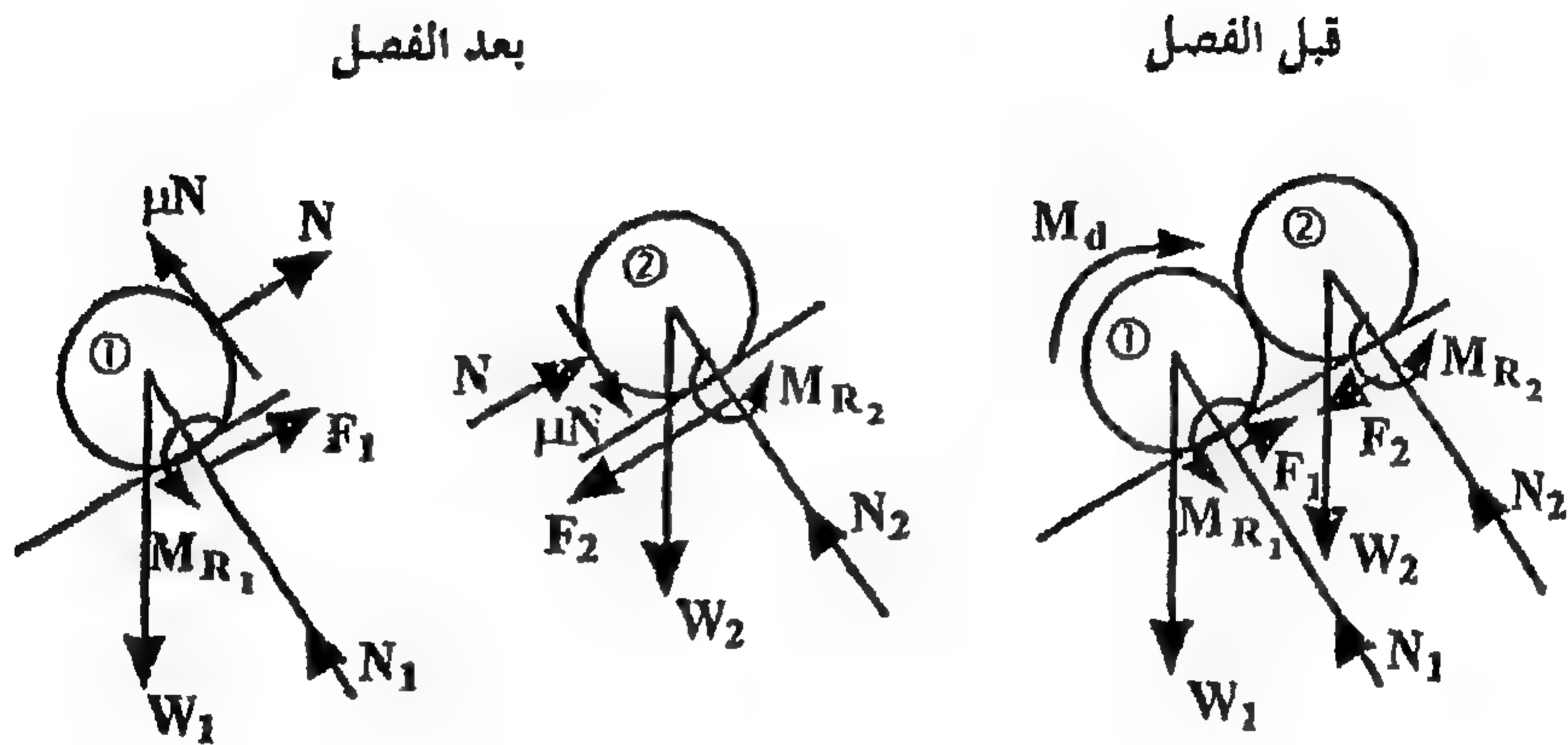


أسطوانتين متماثلتين وزن كل منهما (  $W = 500 \text{ N}$  ) ونصف قطر كل منهما (  $a = 50 \text{ cm}$  ) وضعت الأسطوانتان كما هو مبين بالشكل على مستوى مائل خشن (  $\alpha = 30^\circ$  ) على الألفي عين عزم



الإدارة ( $M_d$ ) لكي تدحرج الأسطوانتان بانتظام على المستوى علما بأن معامل الاحتكاك الإنزلاقي بين الأسطوانتين يساوي  $\frac{3}{4}$  ، و معامل الاحتكاك التدحرج بين الأسطوانتين و الأرض ( $a_R = 0.01 \text{ m}$ ) .

الحل :



دراسة الأسطوانة ٢

$$\sum M_A = 0$$

$$-N(a) + \mu N(a) + M_{R_2} + W \sin \alpha (a) = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum Y = 0$$

$$\therefore N_2 - \mu N - W \cos \alpha = 0$$

$$M_{R_2} = N_2 \times a_R = (\mu N + W \cos \alpha) a_R \quad \dots \dots \dots (2)$$

بالتعويض من 2 في 1 :

$$\therefore -N(a) + \mu N(a) + W \sin \alpha (a) + (\mu N + W \cos \alpha) a_R = 0$$

و للحالة العددية المعطاة نجد أن  $N = 346.6$

$$\sum M_B = 0$$

$$-M_d + N(a) + \mu N(a) + W \sin \alpha(a) + M_{R_1} = 0 \quad (3)$$

$$\sum Y = 0$$

$$\therefore N_1' - W \cos \alpha + \mu n = 0$$

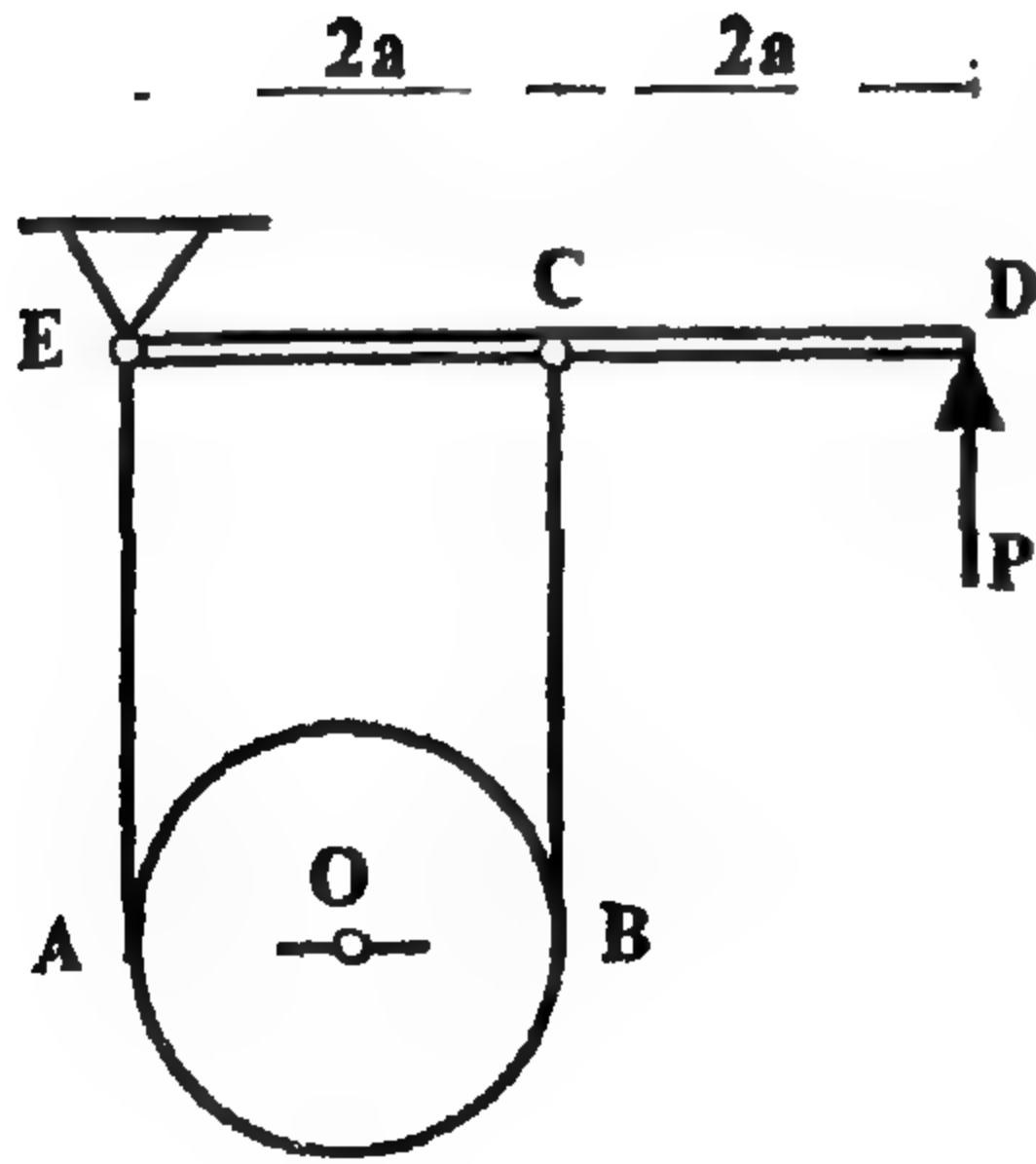
$$M_{R_1} = N_1 \times a_R$$

$$M_{R_1} = (W \cos \alpha - \mu N) \times a_R \quad (4)$$

بالتعويض من 4 في 3 يمكن إيجاد  $M_d$

و الحالة العددية المعطاة نجد أن :  $M_d = 345.1 \text{ N.m}$

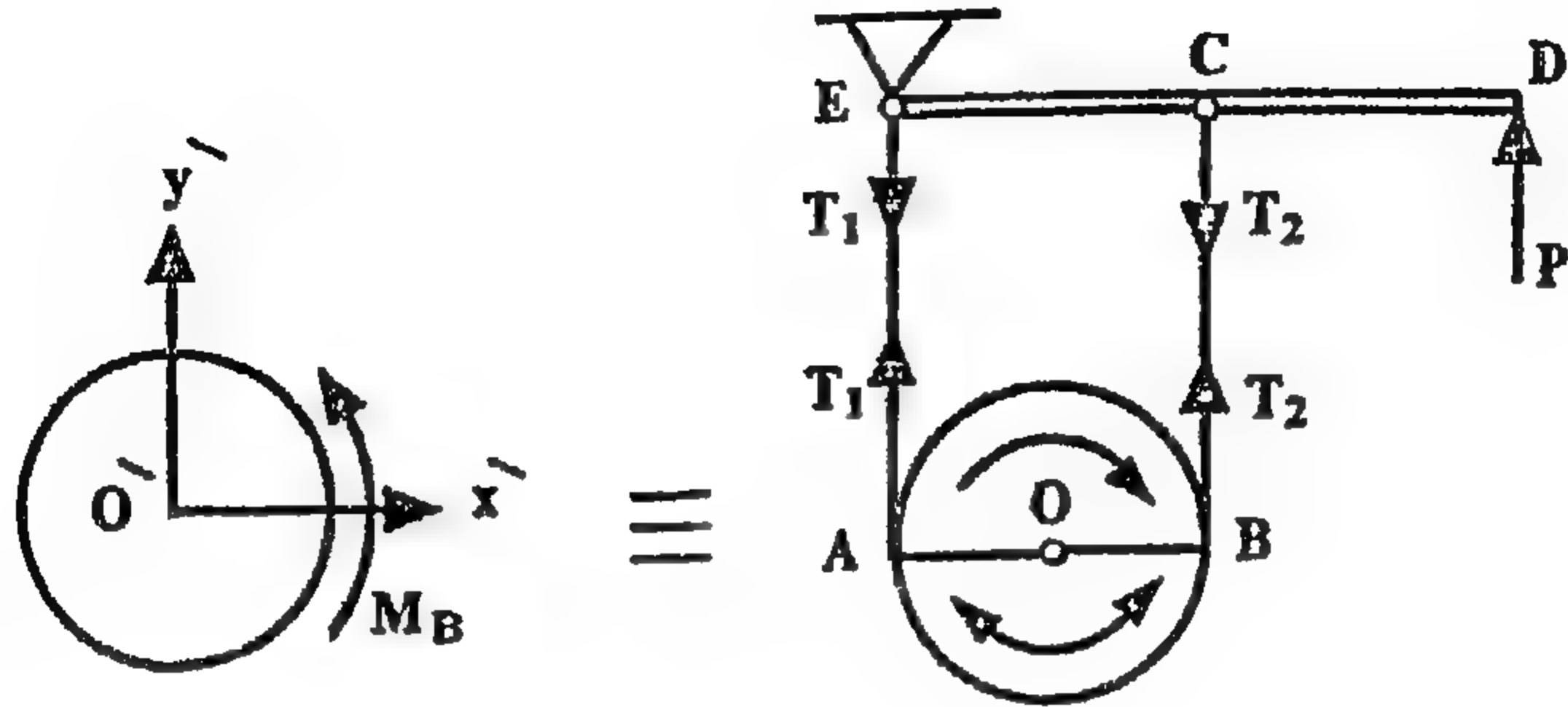
مثال ٣ :



تؤثر قوة  $P$  في طرف رالعة  $ED$  قابلة للدوران  
حول مفصل  $E$  ، عبارة عن سير ملفوف  
حول طارة خشبية معامل الاحتكاك بينهما  $\mu = 1/2$   
بفرض فرملتها ، عين عزم مقاومة دوران الطارة الناشئ  
من احتكاك السير.

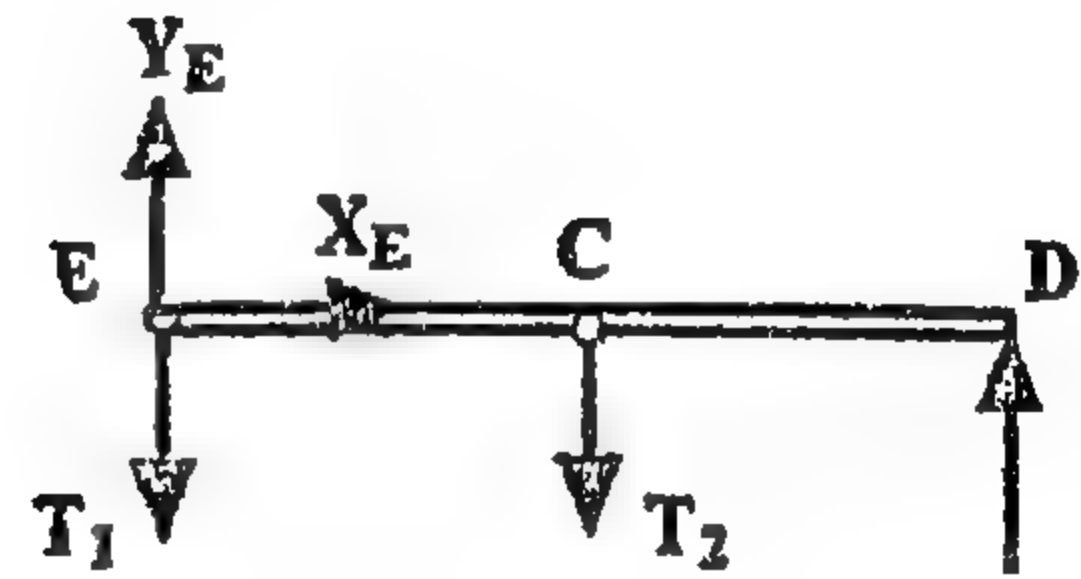
الحل :

الإحتمال الأول : أن الطائرة تدور مع عقارب الساعة و عليه فإن BC الطرف الساحب للفرملة ،  
AE الطرف المسحوب .



دراسة اتزان القضيب :

$$\begin{aligned}\sum M_L &= 0 \\ -T_2(2a) + P(4a) &= 0 \\ T_2 &= 2P\end{aligned}$$



و من قانون الجبال

$$\begin{aligned}T_2 &= T_1 e^{\mu\theta} \\ 2P &= T_1 e^{\frac{1}{2}\pi} \\ \therefore T_1 &= 2P e^{-\frac{1}{2}\pi}\end{aligned}$$

$$\sum M_{O'} = \sum M_O$$

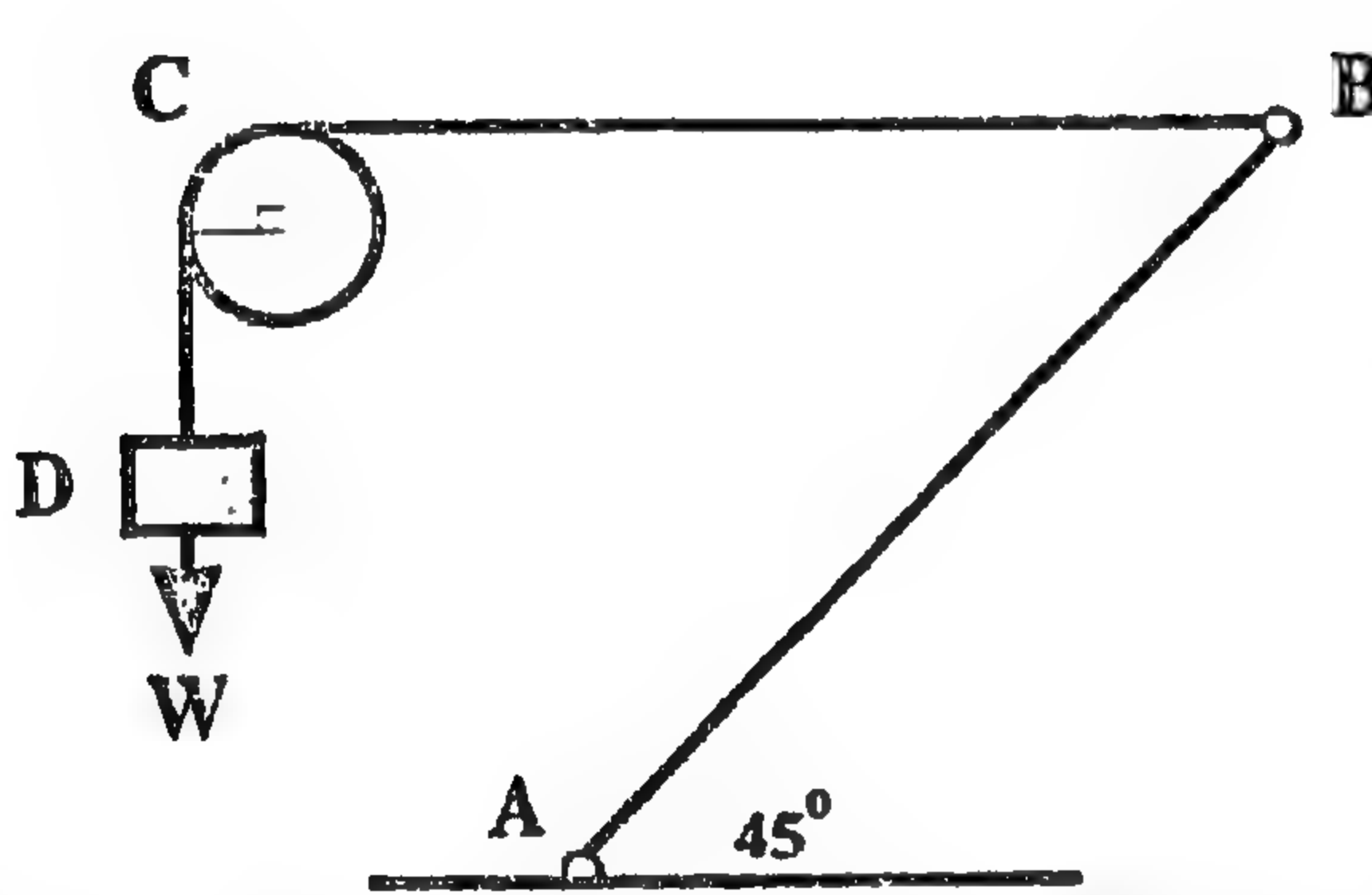
$$M_B = T_2(a) - T_1(a)$$

$$M_B = 2P(a) - 2Pe^{-\frac{1}{2}\pi}(a)$$

$$M'_B = 2Pa(1 - e^{-\frac{1}{2}})$$

الاحتمال الثاني : الطارة تدور ضد عقارب الساعة و عليه فان AE يكون الطرف الساحب ،  
BC الطرف المسحوب ، و باتباع نفس الخطوات السابقة يمكن تعيين مقدار عزم القرملة .

مثال ٤ :

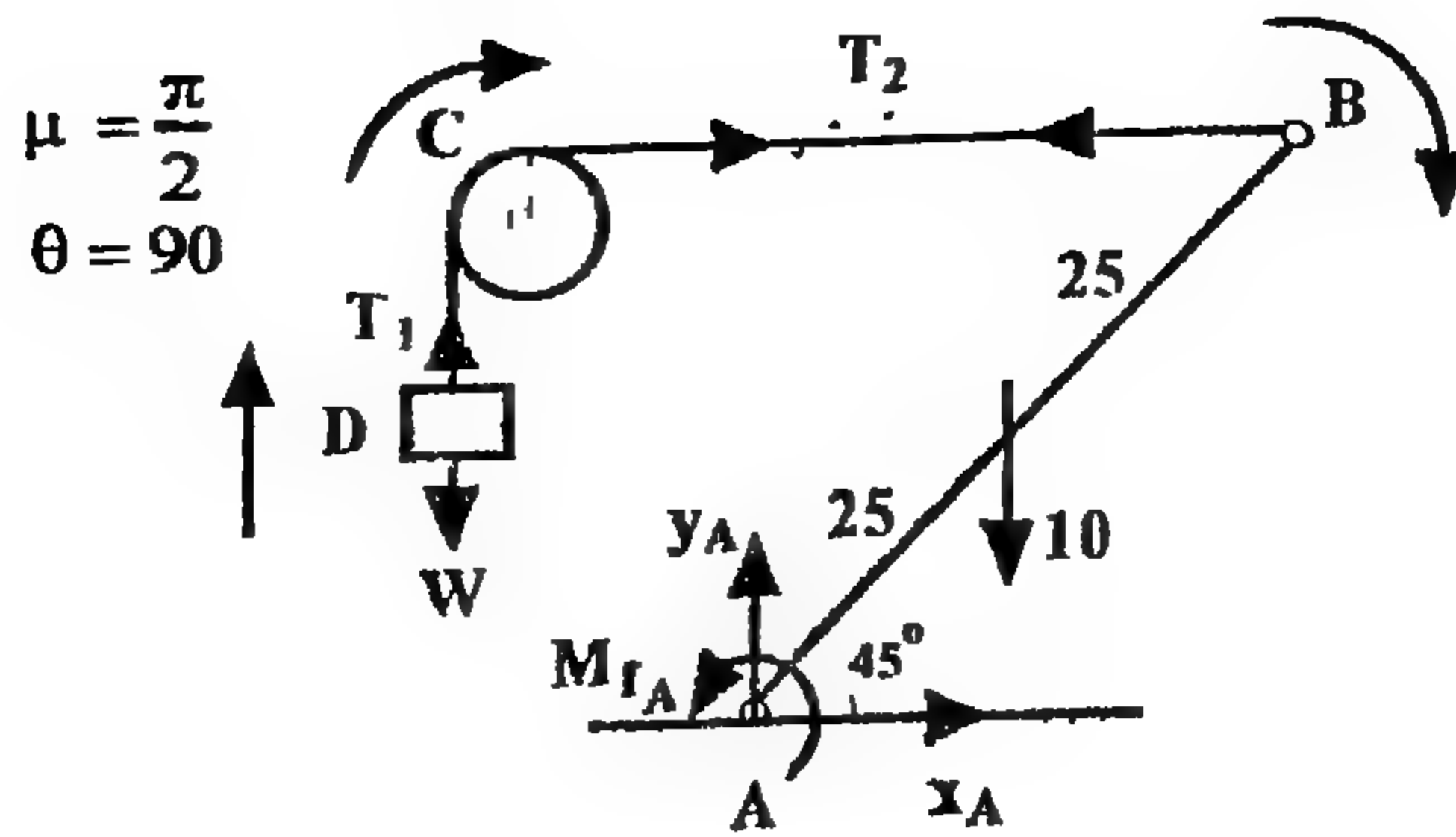


قضيب منتظم AB  
وزنه N 10 وطوله 50  
cm مثبت عند A بفصل  
خشن معامل احتكاك  
المفصل  $a_f = 0.5$  cm و  
يميل في وضع الاتزان بزاوية  
٤٥° مع الأفقي متصل  
بالقضيب عند B خيط أفقي

يمر على ا طوانة ثابتة خشنة C معامل الاحتكاك عندها  $\mu = 2/\pi$  و يتدلى بنهاية الطرف الآخر للخيط  
وزن W عين القيم الحرجة للوزن W .

الحل :

الحالة الأولى : الوزن يتحرك لأعلى



دراسة اتزان الجسم D

$$\sum Y = 0$$

$$T_1 - W = 0 \dots\dots\dots (1)$$

دراسة الحبل " قانون الحبال "

$$T_2 = T_1 e^{\mu\theta} = W e^{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = W e \dots\dots\dots (2)$$

دراسة اتزان القضيب

$$\sum X = 0$$

$$\therefore x_A - T_2 = 0 \quad \therefore x_A = T_2 = W e \dots\dots\dots (3)$$

$$\sum Y = 0$$

$$y_A - 10 = 0 \quad \therefore y_A = 10 \dots\dots\dots (4)$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_{f_A} - 10\left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right) + T_2\left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$M_{f_A} = R_A a_f = \frac{1}{2} \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(We)^2 + (10)^2}$$

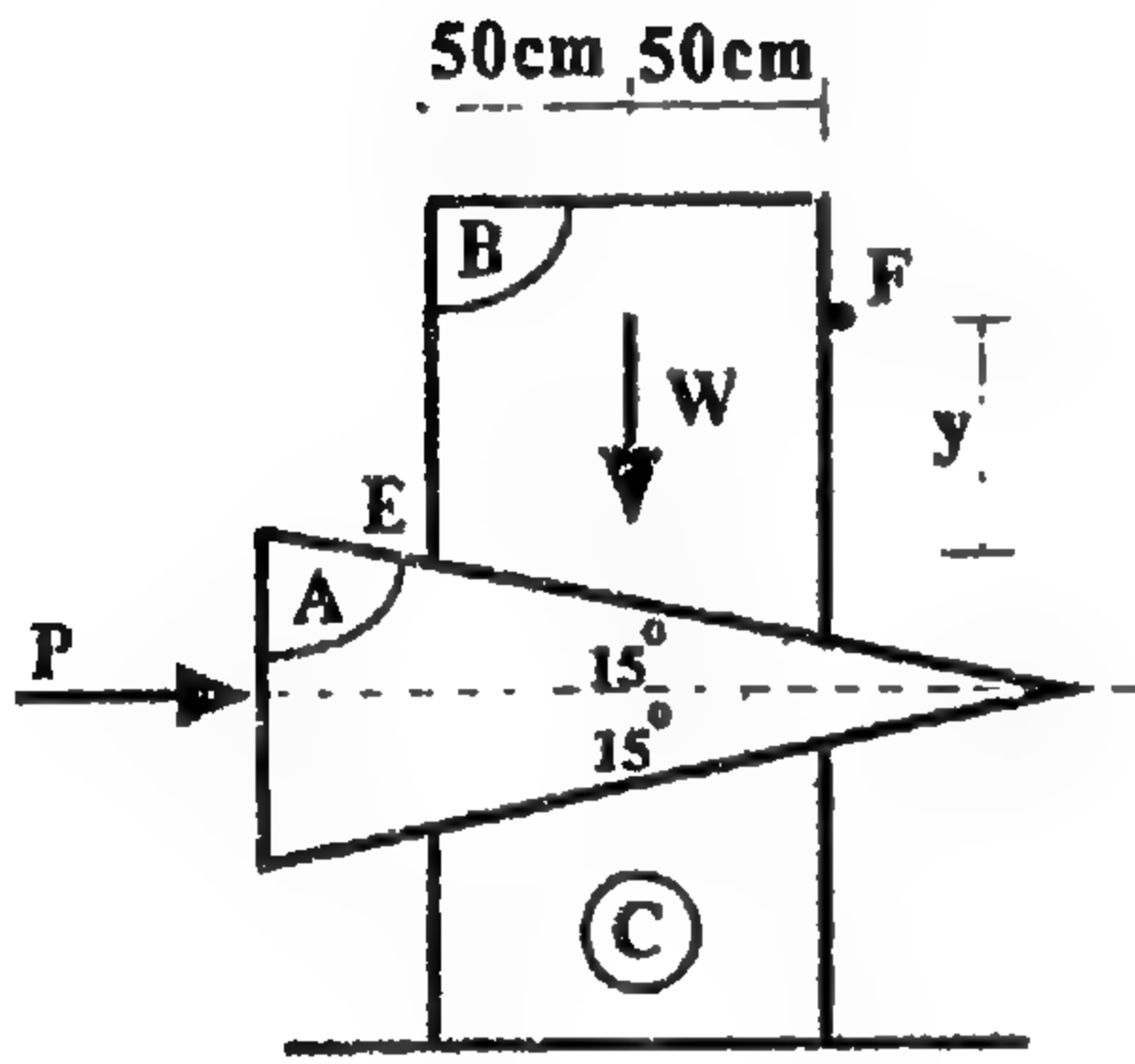
بالتعويض في 5 يتج

$$\frac{1}{2}\sqrt{(We)^2 + (10)^2} - 10\left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right) + W_c\left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$W_c = 4.8765 \text{ N}$$

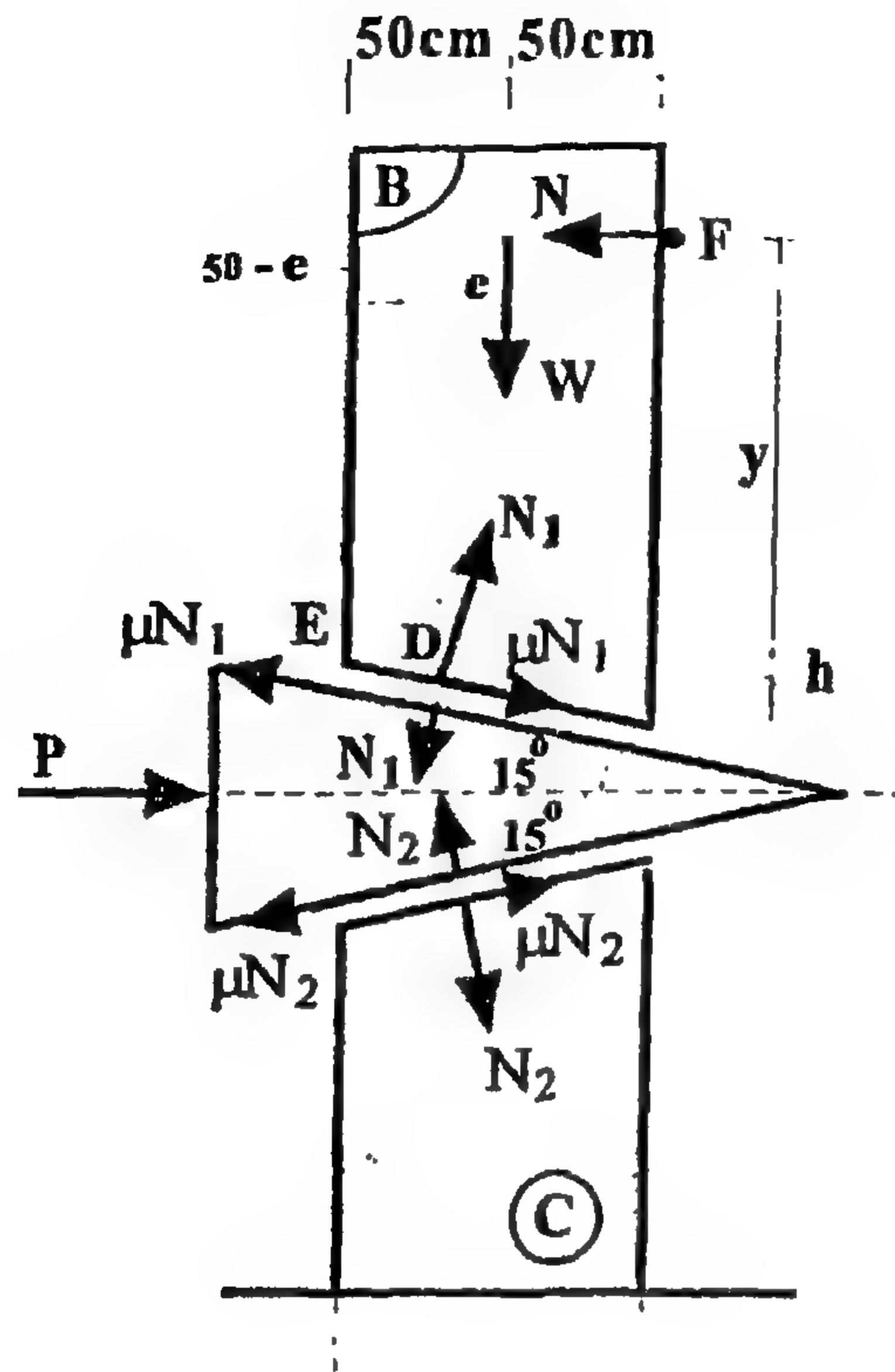
الحالة الثانية : بدراسة اتزان الجسم ثم دراسة اتزان الحيط ثم دراسة اتزان القضيب يمكن تعيين القيم الأخرى لـ  $W$  .

مثال ٥ :



يراد رفع كتلة B وزنها  $W$  بواسطة اسفين A على شكل منشور مثلثي خشن زاوية رأسه  $30^\circ$  وزاوية احتكاكه تساوي  $15^\circ$  ينزلق بين كتلة C مثبتة في الأرض و بين الكتلة B المرتكزة على وتد أملس عند  $y$  . عين أكبر بعد  $y$  للوتد حتى لا تنقلب الكتلة B و عين قيمة  $P$  بدلالة الوزن  $W$  .

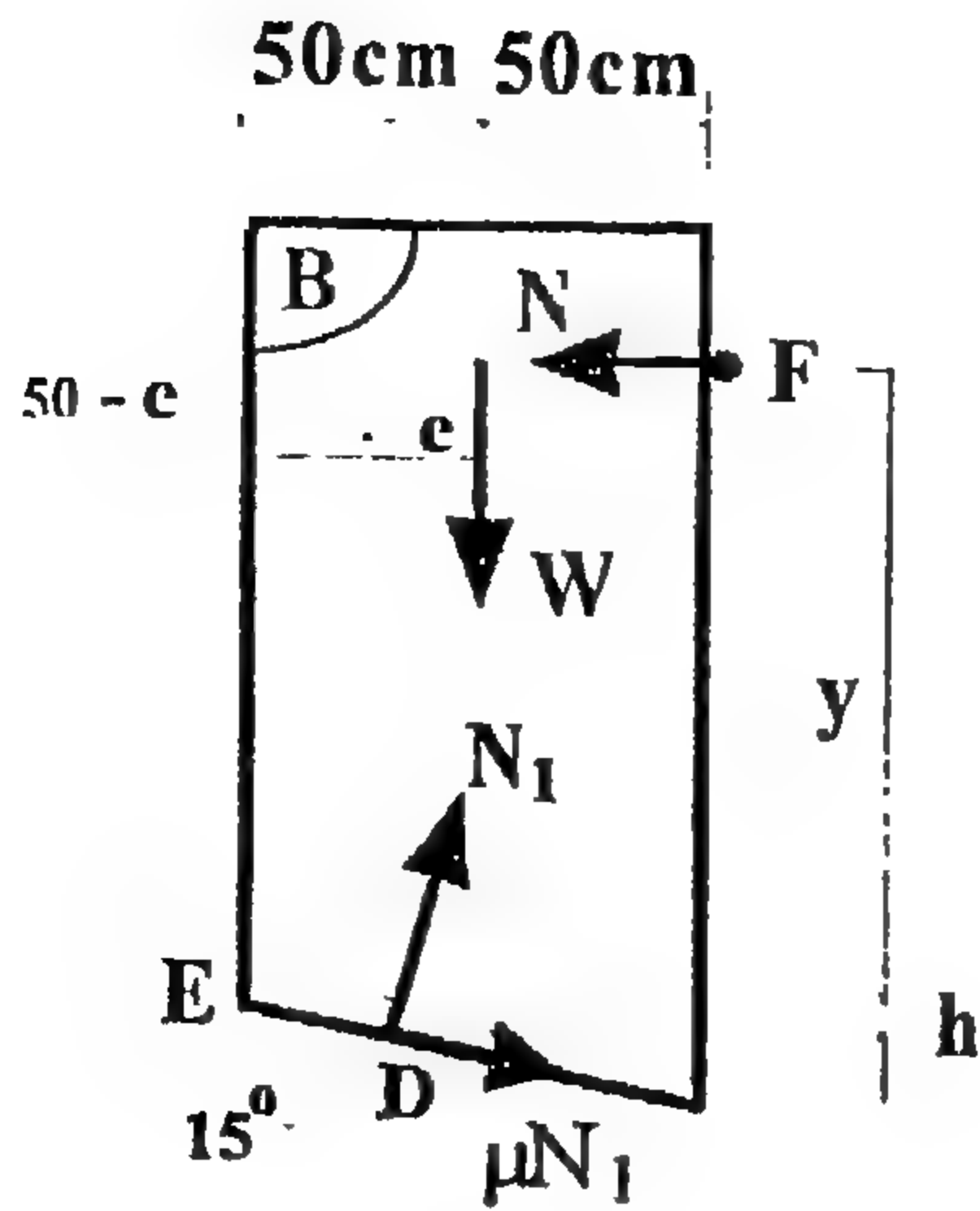
الحل :



$$\mu = \tan \lambda = \tan 15^\circ$$

$$\frac{h}{50 - e} = \tan 15^\circ$$

$$\therefore h = (50 - e) \tan 15^\circ$$



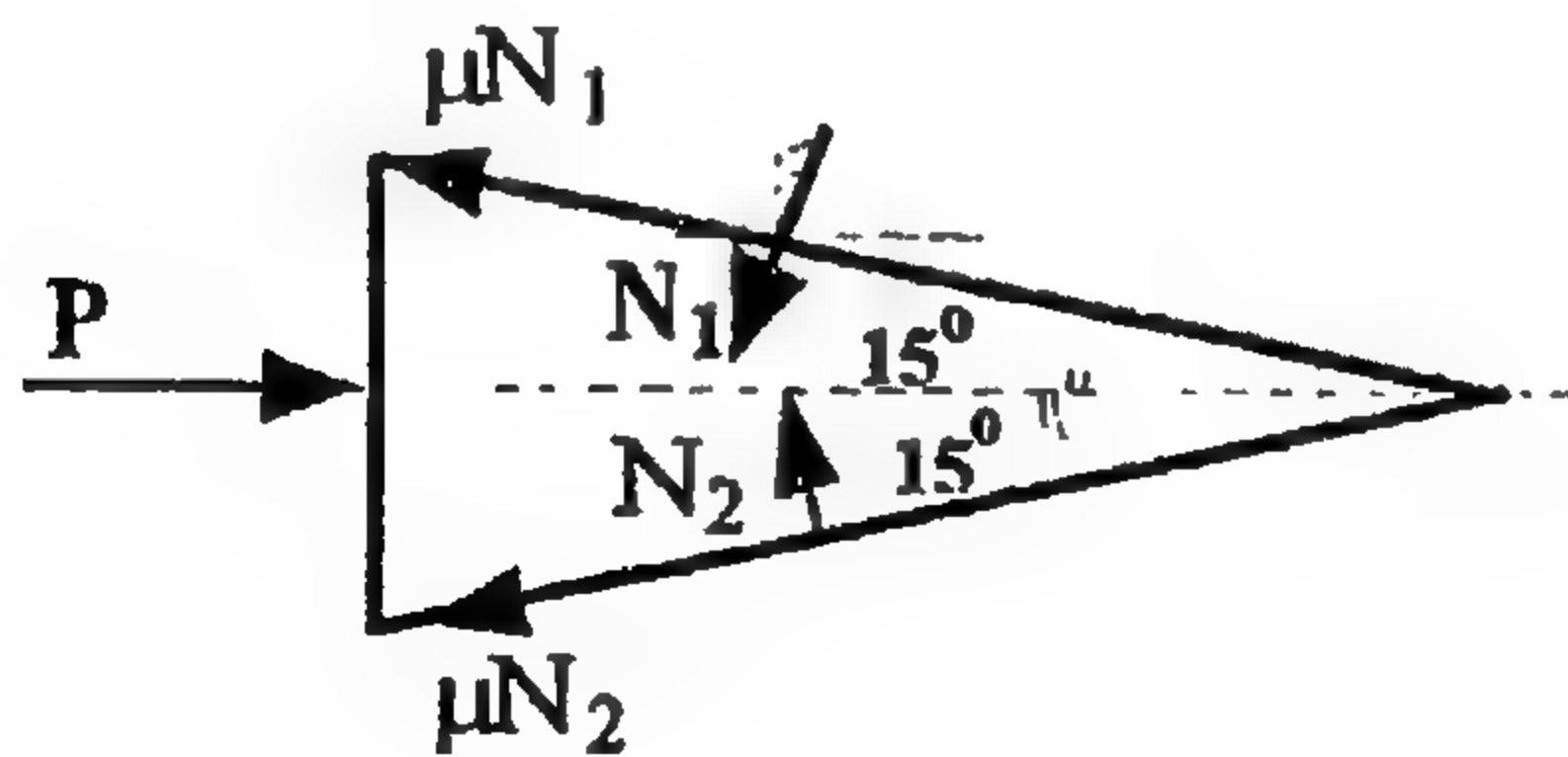
اتزان الكتلة B :

$$\therefore \sum Y = 0$$

$$\therefore N_1 \cos 15^\circ - \mu N_1 \sin 15^\circ - W = 0$$

$$\therefore N_1 = \frac{W}{\cos 15^\circ - \mu \sin 15^\circ} \dots \dots \dots (1)$$

$$= 1.1154 W$$





$$\therefore \sum X = 0$$

$$\therefore N - N_1 \sin 15^\circ - \mu N_1 \cos 15^\circ = 0$$

$$\therefore N = \frac{W(\sin 15^\circ + \mu \cos 15^\circ)}{\cos 15^\circ - \mu \sin 15^\circ} = 0.5774 W$$

$$\therefore \sum M_D = 0$$

$$\therefore N(y + h) = We$$

$$0.5774 W(Y + 13.3975 - 0.2679e) = We$$

$$\therefore \frac{W(\sin 15^\circ - \mu \cos 15^\circ)(y(50 - e) \tan 15^\circ)}{\cos 15^\circ - \mu \sin 15^\circ} = We$$

$$\frac{0.5774y + 7.7357}{1.1547} = e$$

$$\therefore \mu = \tan 15^\circ$$

$$\therefore e = \frac{2(y + 50 \tan 15^\circ) \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ \tan 15^\circ} \dots \dots \dots (3)$$

$$e = 0.5Y + 6.7$$

و لتفادي الانقلاب حول E يجب أن تكون :

$$e < 50 \text{ cm} \dots \dots \dots (4)$$

$$0.5y + 6.7 < 50$$

$$y < 86.6$$

و بالتعويض من (3) في (4)

$$\therefore y < 25(\cot 15^\circ - \tan 15^\circ)$$

$$\therefore y < 87 \text{ cm} \dots \dots \dots (5)$$

و لإيجاد مقدار القوة p :

من التوازن الأسفین A :

$$\therefore \sum Y = 0$$

$$\therefore \mu N_1 \sin 15^\circ - N_1 \cos 15^\circ + N_2 \cos 15^\circ - \mu N_2 \sin 15^\circ = 0$$

$$\therefore N_1 = N_2 \dots\dots\dots (6)$$

$$\therefore \sum X = 0$$

$$\therefore P = \mu N_1 \cos 15^\circ - N_1 \sin 15^\circ - \mu N_2 \cos 15^\circ - N_2 \sin 15^\circ = 0 \dots\dots (7)$$

و بالتعويض من (1) ، (6) في (7) مع مراعاة أن  $\mu = \tan 15^\circ$

$$\therefore P = 2N_1 \sin 15^\circ + 2\mu N_1 \cos 15^\circ$$

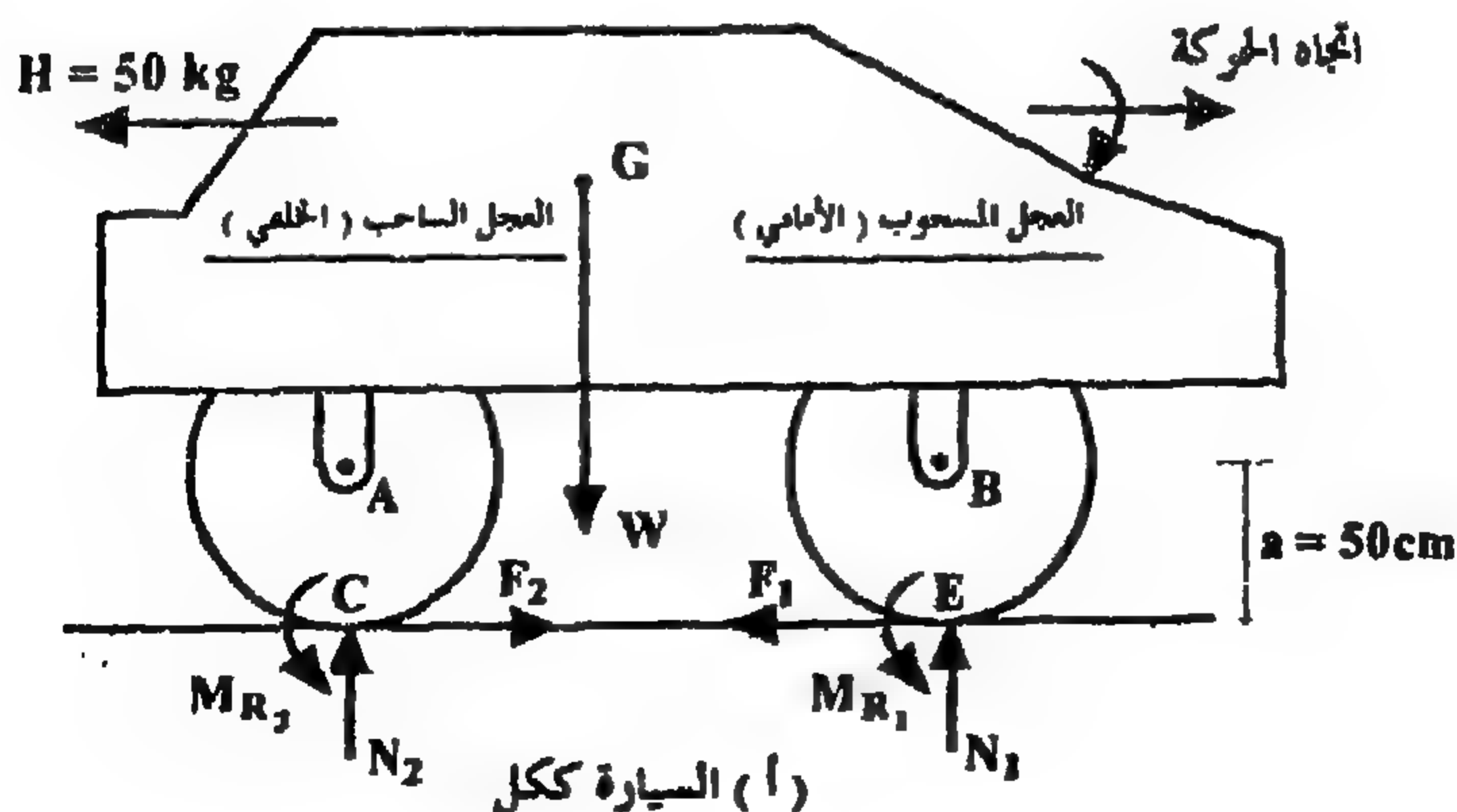
$$P = \frac{2W \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ \tan 15^\circ}$$

$$\therefore P = 1.15 W$$

مثال ٦ :

سيارة وزنها الكلي 1000 kg و وزن كل من عجلاتها الأربع 25 kg و نصف قطر كل منها 50 cm . فإذا كان مقاومة التدحرج لكل عجلة يساوي نصف قطر دائرة احتكاك محورها يساوي 0.05 cm . عين عزم الادارة اللازم لتحريك السيارة بسرعة منتظمة على ارض أفقية خشنة ضد مقاومة هواء قدرها 50 kg .

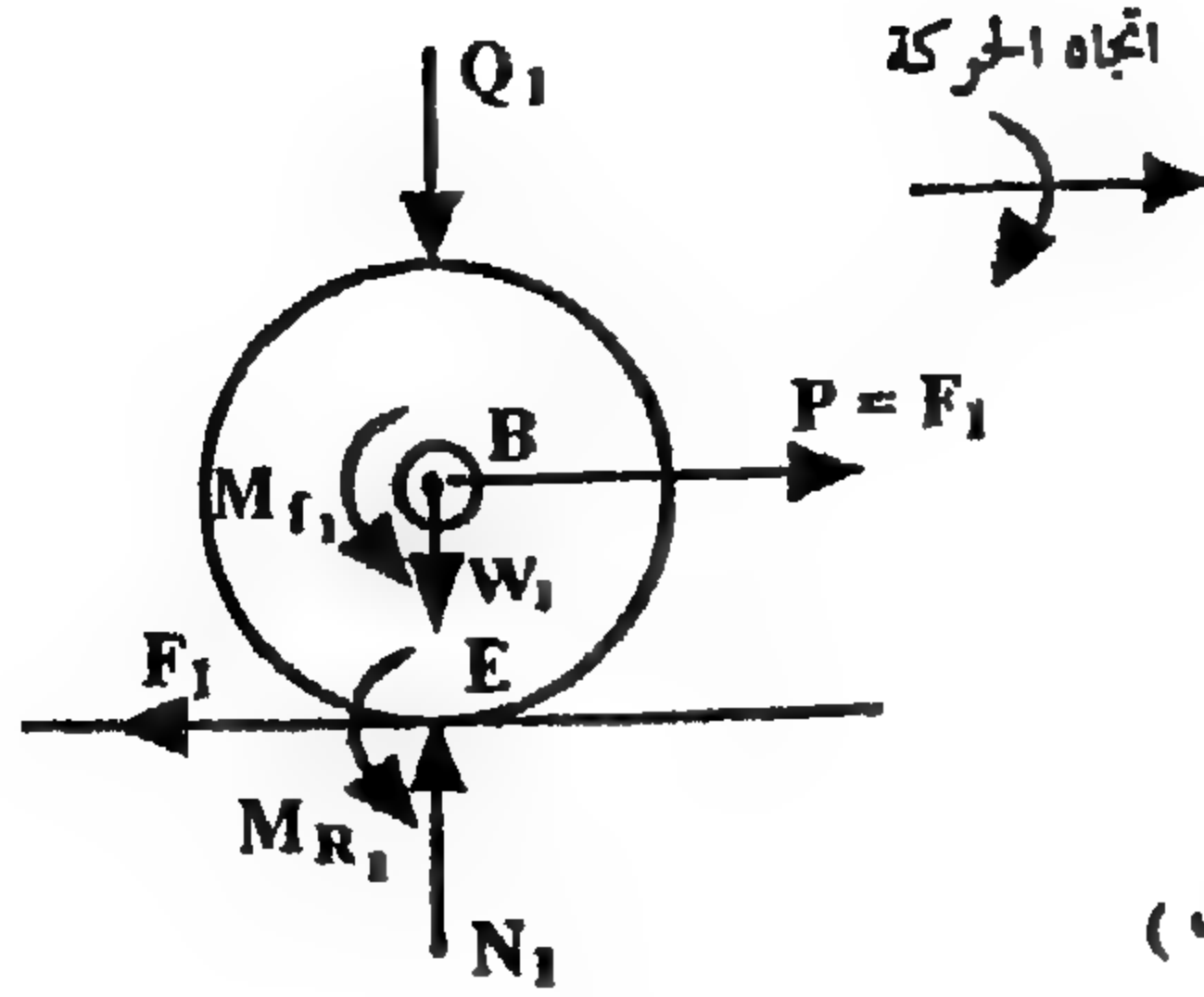
الحل :



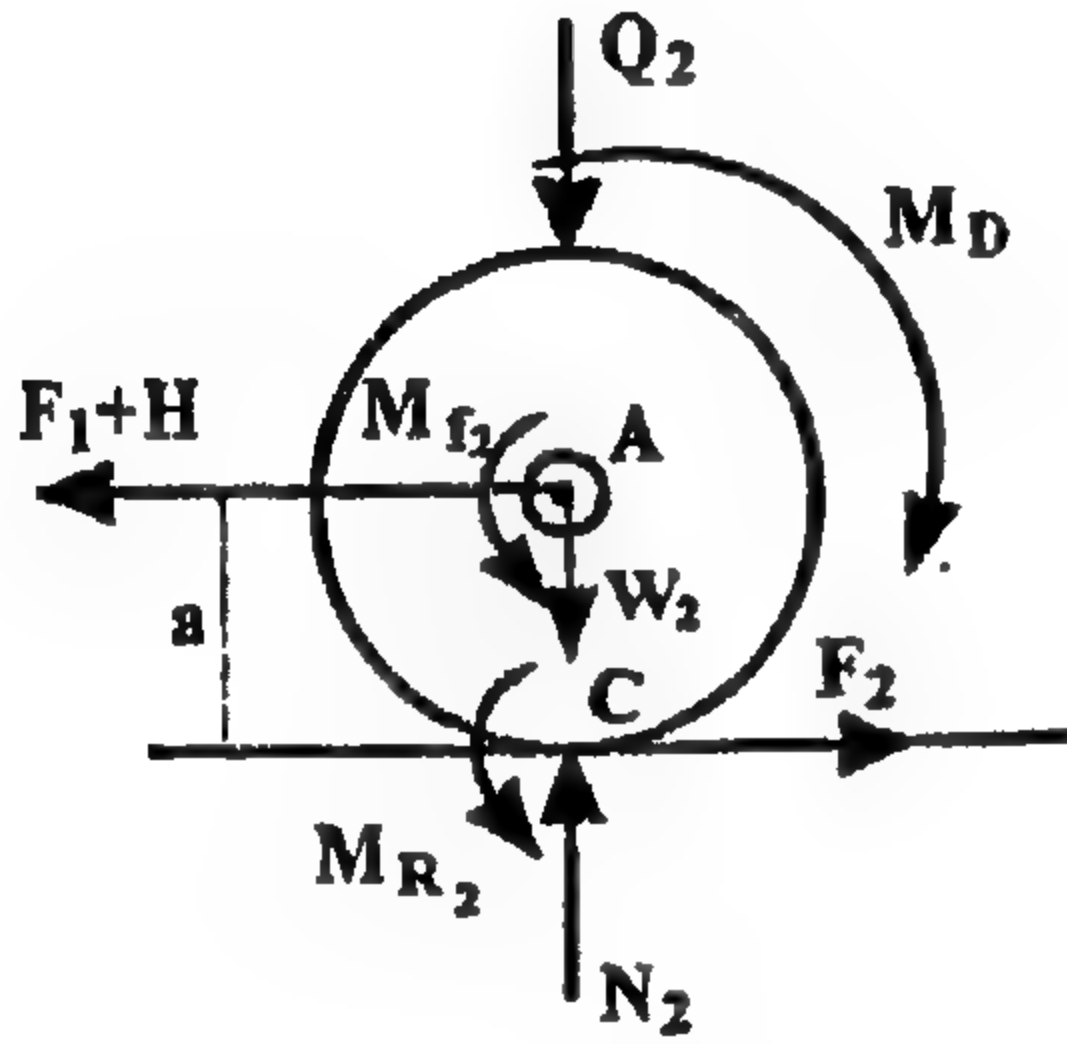
.  $W = 1000 \text{ kg}$  = وزن السيارة كلها

.  $W_1 = 50 \text{ kg}$  = وزن العجلتين الأماميتين

.  $W_2 = 50 \text{ kg}$  = وزن العجلتين الخلفيتين



( ب ) العجل الأمامي ( المسحوب )



( ج ) العجل الخلفي ( الساحب )

.  $H = 50 \text{ kg}$  = مقاومة الهواء

.  $a = 50 \text{ cm}$  = نصف قطر العجلة

.  $a_f = 0.05 \text{ cm}$  = ذراع مقاومة التدحرج

.  $r_f = 0.05 \text{ cm}$  = نصف قطر دائرة الاحتكاك

.  $Q_1$  = الحمل الواقع على العجل الأمامي فقط

.  $Q_2$  = الحمل الواقع على العجل الخلفي فقط

من اتران السيارة ككل ( شكل أ ) :

$$\sum Y = 0 \quad N_1 + N_2 = W \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum X = 0 \quad F_2 = F_1 + H \quad \dots\dots\dots (2)$$

من اتران العجل الأمامي ( المسحوب ) شكل ( ب ) :

$$\sum Y = 0 \quad \therefore N_1 = Q_1 + W_1$$

$$\therefore Q_1 = N_1 - W_1$$

$$\therefore M_{f1} = Q_1 \cdot r_f = (N_1 - W_1)r_f$$

$$M_{R1} = N_1 a_r$$

$$\sum M_s = 0$$

$$\therefore F_1 a = M_s + M_{R1}$$

$$\therefore F_1 a = (N_1 - W_1)r_f + N_1 a_r \quad \dots\dots\dots (3)$$

من اتران العجل الخلفي ( المساحب ) شكل ( ج ) :

$$\sum Y = 0 \quad \therefore N_2 = Q_2 + W_2$$

$$\therefore Q_2 = (N_2 - W_2)$$

$$\therefore M_{f2} = Q_2 r_f = (N_2 - W_2)r_f$$

$$M_{R2} = N_2 a_r$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\therefore M_D = M_{f2} + M_{R2} + F_2 a$$

$$\therefore M_D = (N_2 - W_2)r_f + N_2 a_r + F_2 a \quad \dots\dots\dots (4)$$

وبالتعويض من ( 2 ) ، ( 3 ) في ( 4 ) :

$$\therefore M_D = (N_2 + W_2)r_f + N_2 a_r + (N_1 - W_1)r_f + N_1 a_r + H a$$

$$M_D = (N_1 + N_2)a_r + (N_1 + N_2 - W_1 - W_2)r_f + H a \quad \dots\dots\dots (5)$$

ومن التعويض من ( 1 ) في ( 5 ) :

$$\therefore M_D = Wa_r + (W - W_1 - W_2)r_f + Ha \dots\dots\dots (6)$$

و للحالة العددية المعطاة :

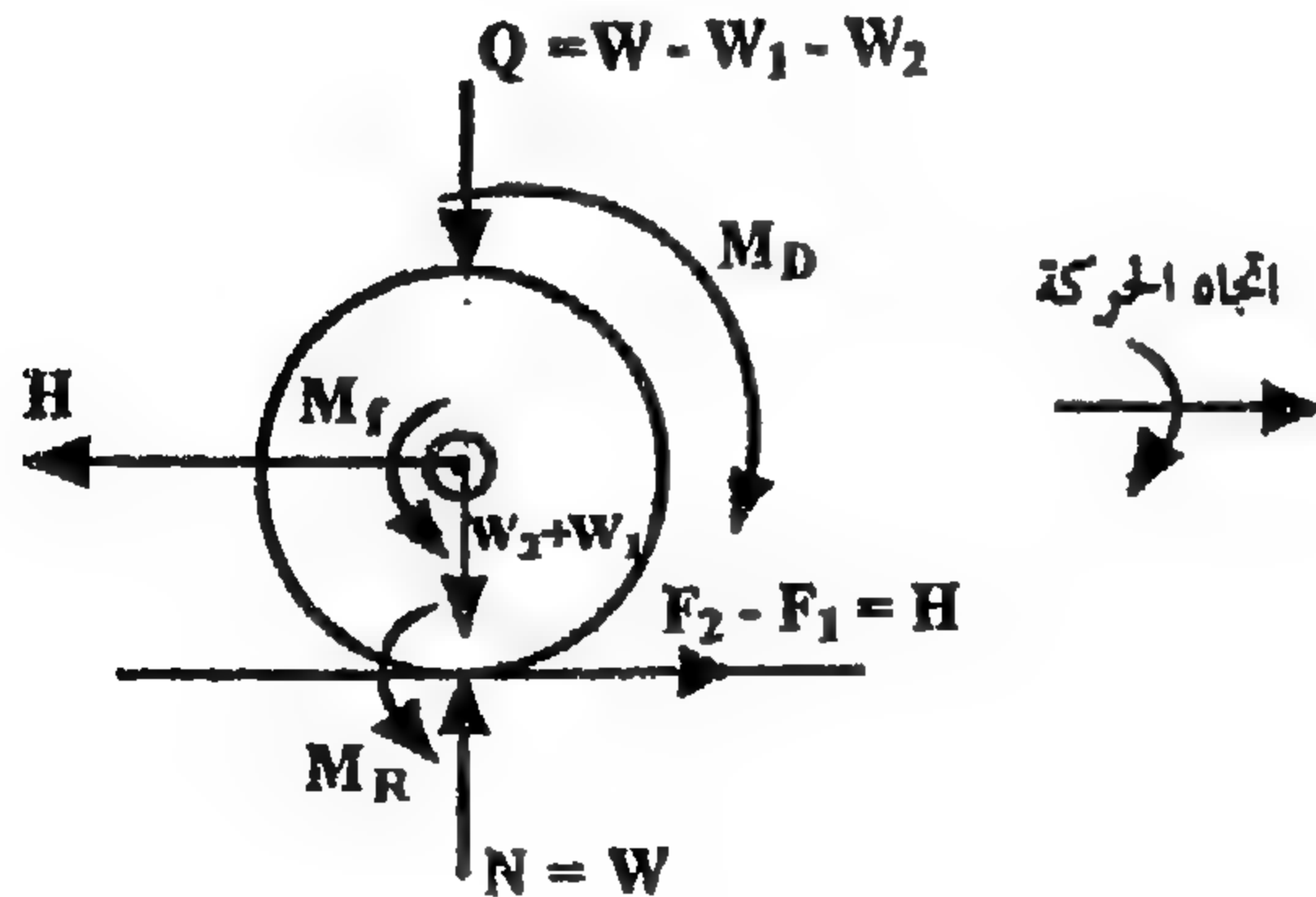
$$\therefore M_D = 1000 \times \frac{5}{100} + (1000 - 50 - 50) \times \frac{5}{100} + 50 \times 50$$

$$\therefore M_D = 2595 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

ملاحظة :

المعادلة ( 6 ) التي تعطي مقدار عزم الإدارة  $M_D$  اللازم للعجل الساحب يمكن الحصول عليها فيما لو اعتبرنا جميع العجلات عجلة واحدة ماحبة وزنها هو وزن العجلات الأربع (  $W_1 + W_2$  ) و الحمل الواقع عليها  $Q$  هو الوزن للسيارة دون العجلات (  $W - W_1 - W_2$  ) و يؤثر عند مركزها مقاومة الهواء  $H$  كما هو مبين بشكل ( د ) . و من هذا الشكل يتضح :

$$M_f = Qr_f = (W - W_1 - W_2)r_f \quad ; \quad M_R = Na_r = Wa_r$$



$$\Sigma M_O = 0$$

$$\therefore M_D = M_R + M_f + H \cdot a = Wa_r + (W - W_1 - W_2)r_f + H \cdot a$$

و هي نفس المعادلة ( 6 ) .

## تمارين

١ - قضيب AB وزنه  $W$  يرتكز في وضع

اتزان حرج على أرض خشنة و على

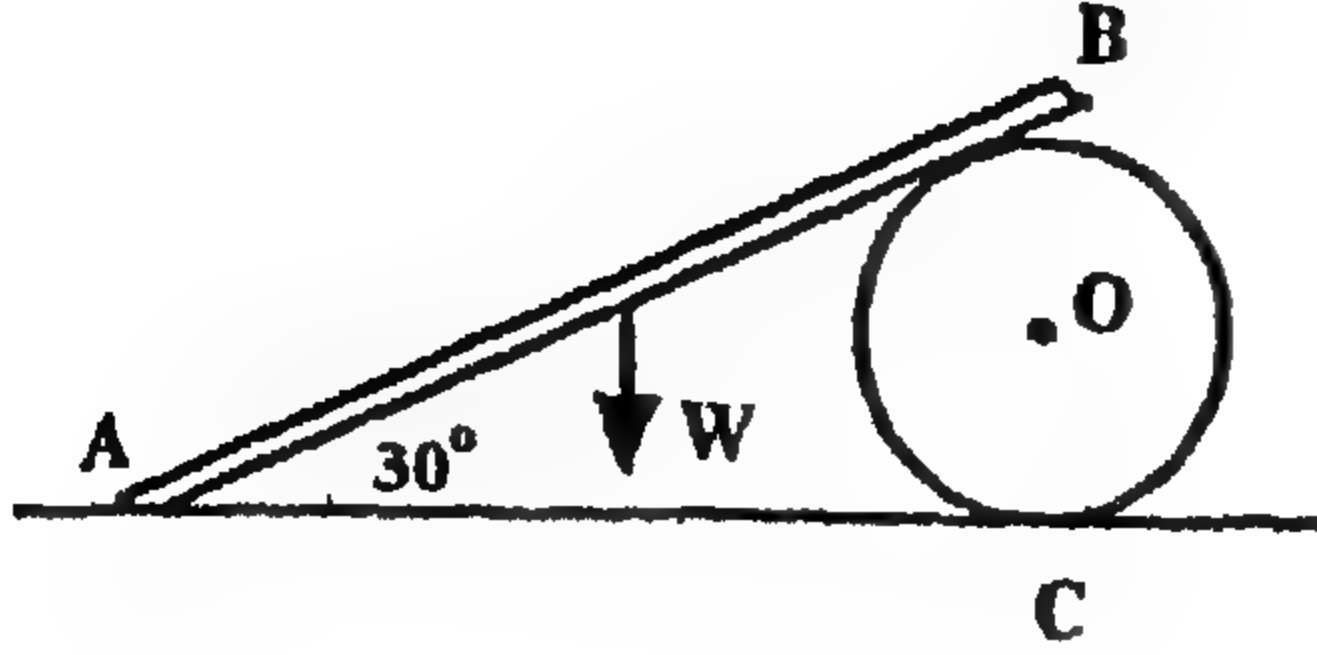
اسطوانة خفيفة مساوية لها في الخشونة

و نصف قطرها  $a$ . أثبت أن زاوية

الإحتكاك  $= 15^\circ$  و عين طول

القضيب . أحسب رد فعل الأرض في

C .



الجواب :  $l = 4.32 a$  ,  $R_D = R_C = 0.52 W$

٢ - منشور ثقيل متجانس مقطعه شبه

منحرف بعده العمودي على الورقة

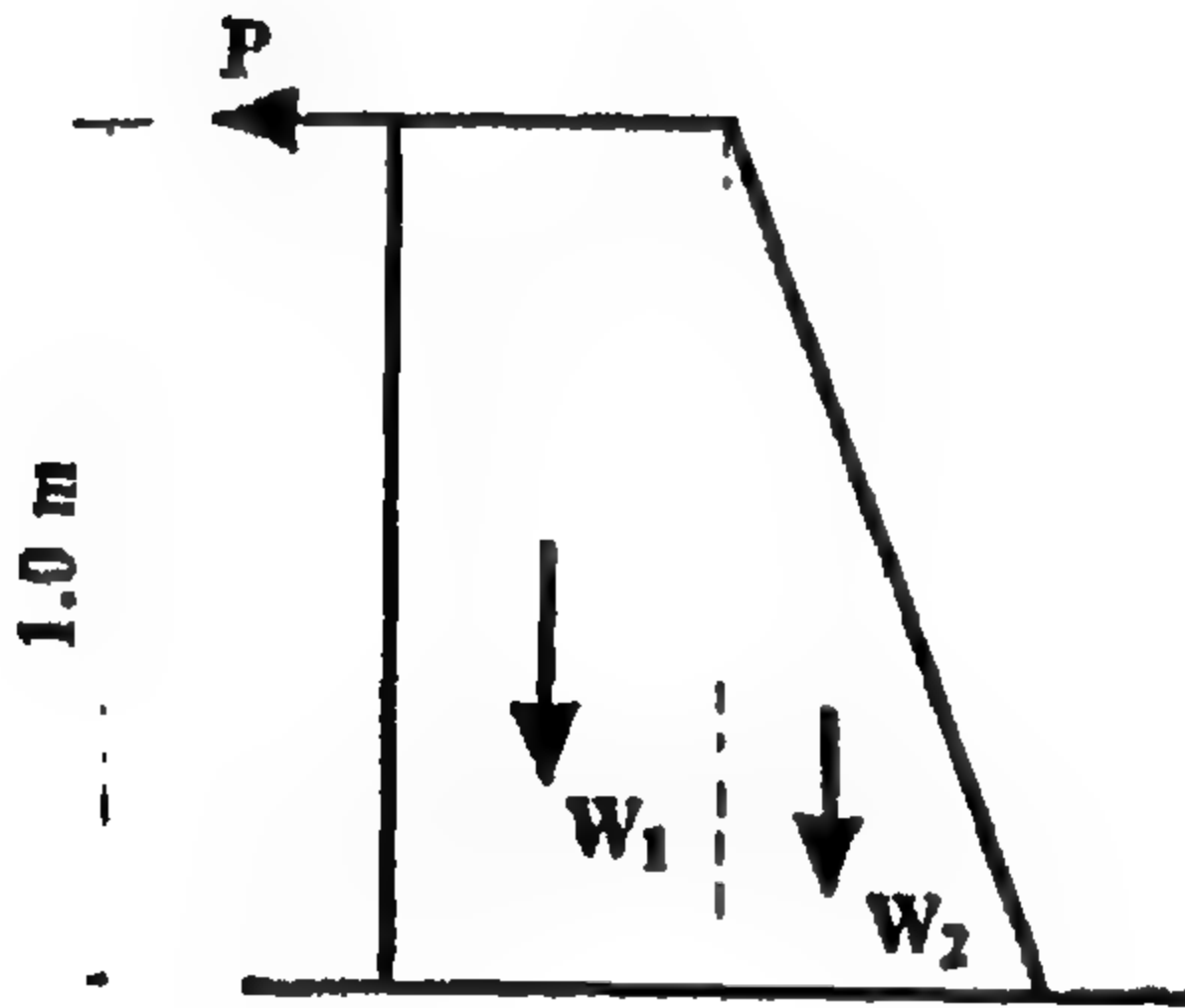
من موضوع فوق أرض أفقية

خشنة ( $\mu = 1/3$ ) كما في الشكل

عين أقل قيمة للبعد لو أثرت قوة أفقية

كافية  $P$  على المنشور لاتزلق دون أن

ينقلب .



0.2 m      b

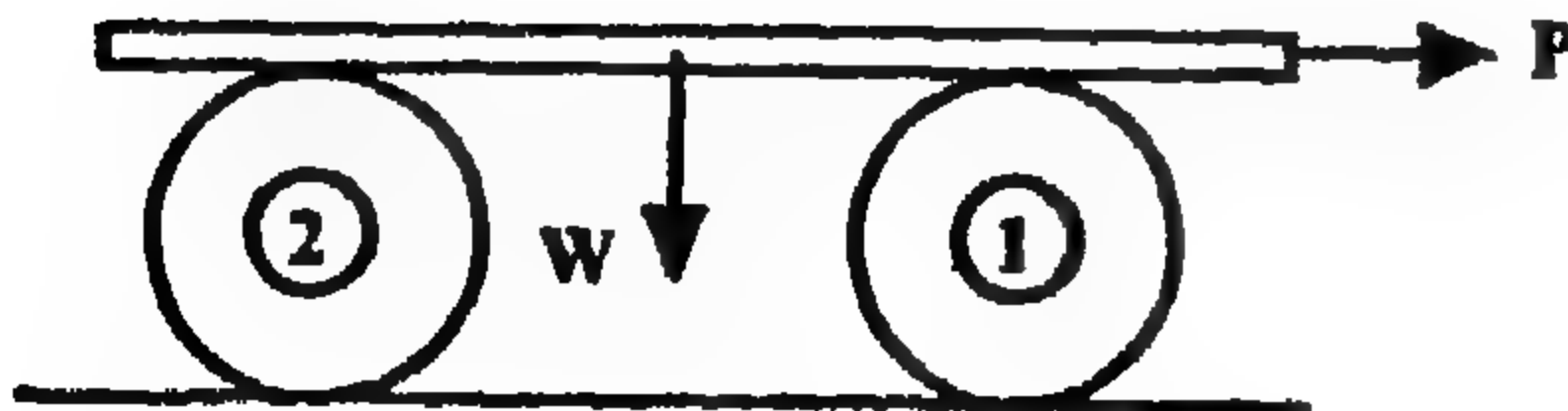
الجواب :  $b = 0.764 m$

٣ - لوح ثقيل وزنه  $W$  موضوع

فوق اسطوانتين خشنتين مهملتين

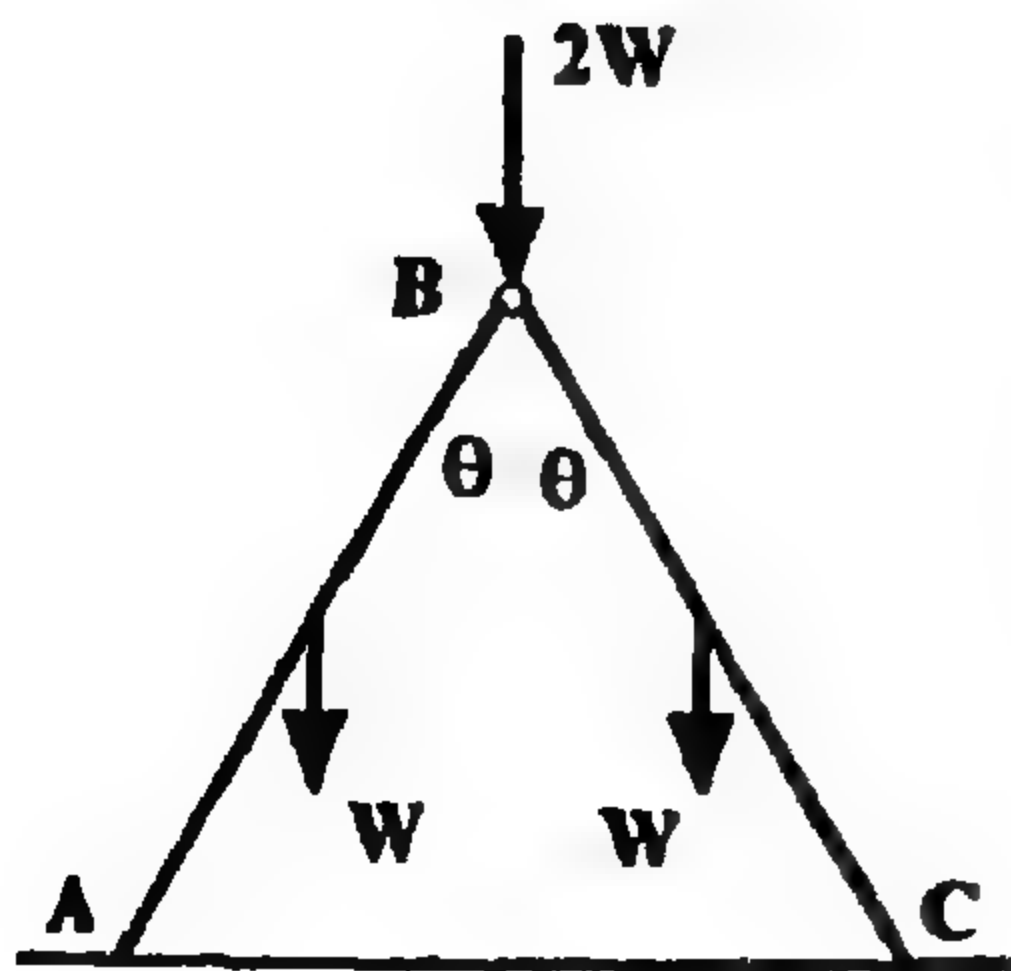
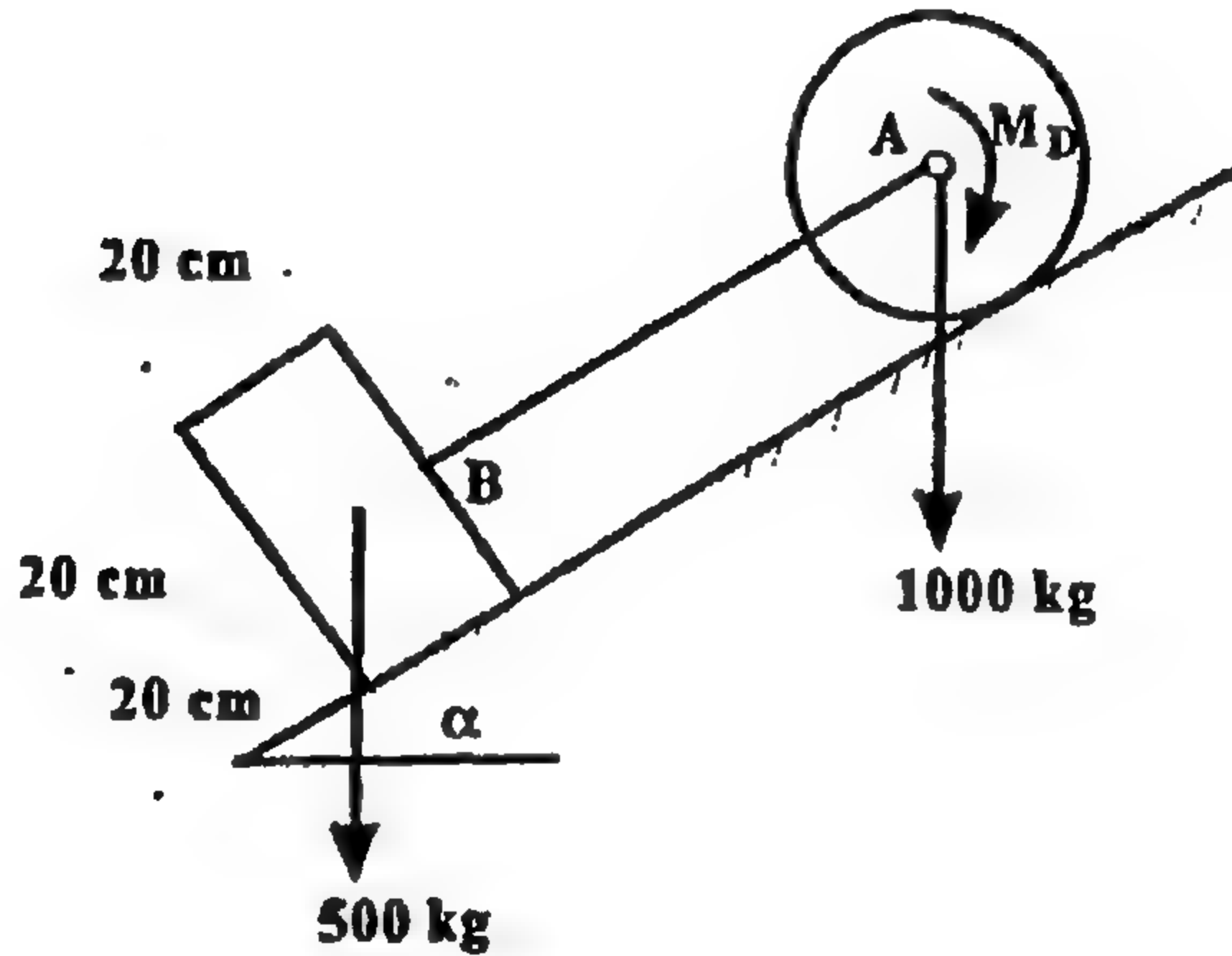
الوزن كما في الشكل ذراع

مقاومة التدحرج بين



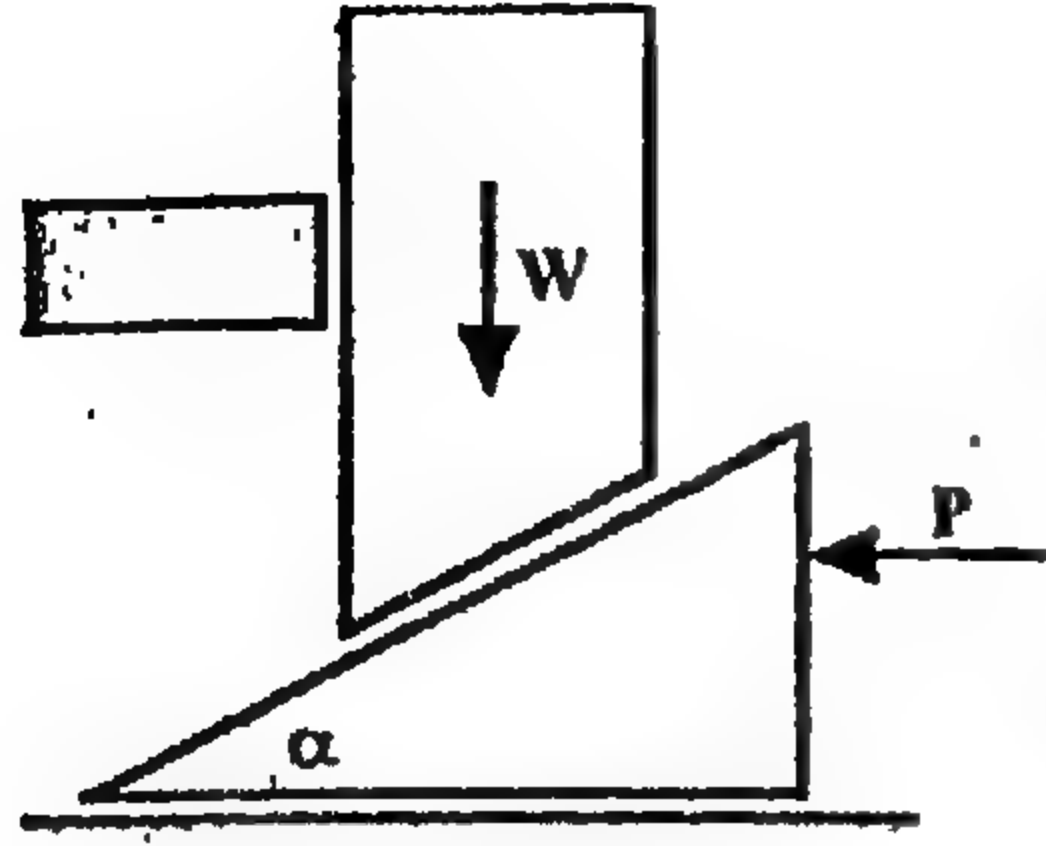
الإسطوانتين و اللوح  $a_2$  و بين الاسطوانتين و الأرض  $a_2$  و نصف قطر كلا من الإسطوانتين  $a$  و المطلوب تعيين أقل قوة  $P$  تكفي لسحب اللوح .

٤ - تدحرج عجلة نصف قطرها 20 cm ووزنها 1000 kg أعلى مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية  $\alpha$  حيث  $\tan \alpha = 0.1$  . و يربط مركز العجلة  $A$  بمختصف كتلة خشبية مستطيلة المقطع عند  $B$  ( وزن الكتلة 500 kg ) بواسطة خيط  $AB$  . فإذا كانت العجلة تدحرج تحت تأثير عزم إدارة  $M_D$  و نصف قطر دائرة احتكاك محورها  $A$  يساوي ذراع مقاومة التدحرج لها  $= 0.05$  cm . عين أقل و أكبر قيمة لمعامل احتكاك المستوى الخشن حتى لا تنزلق العجلة و لا تنقلب الكتلة الخشبية . و اذا اتخذ معامل الاحتكاك قيمة متوسطة عين عزم الإدارة اللازم لتحريك المجموعة حركة منتظمة على المستوى .



٥ - لوحان متطمان طول كل منهما  $2a$  يرتبطان مفصليا في  $B$  و يرتكزان في  $C, A$  على أرض خشنة معامل احتكاكها  $1/2$  . عين زاوية الميل  $\theta$  لكل من اللوحين على الراسي عند وشك الانزلاق . اذا كان هناك احتكاك مفصلي في  $B$  يساوي  $\frac{W a}{4}$  أوجد  $\theta$  في هذه الحالة عند وشك الانزلاق أيضاً .

٦ - تؤثر قوة أفقية  $P$  على منشور ثلاثي زاوته  $\alpha$  (  $\tan \alpha = 1/3$  ) لترفع وزنا  $W$  كما في الشكل أوجد  $P$  بدلالة  $W$  في كل من الحالات الآتية :

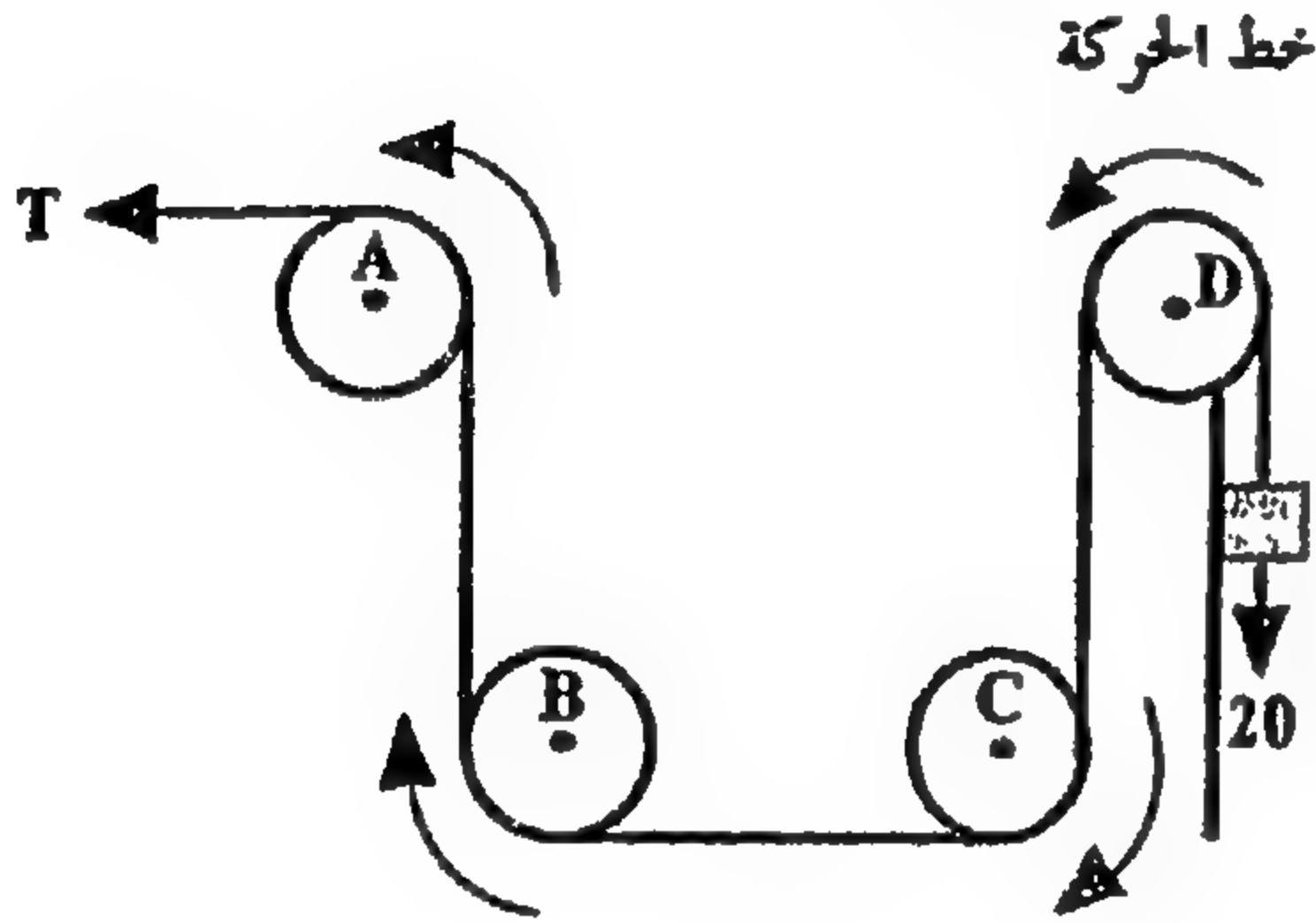


أ - جميع مواضع التلامس ملساء .

ب - جانبا المنشور خشنان بمعامل احتكاك قدره ٠,٢ .

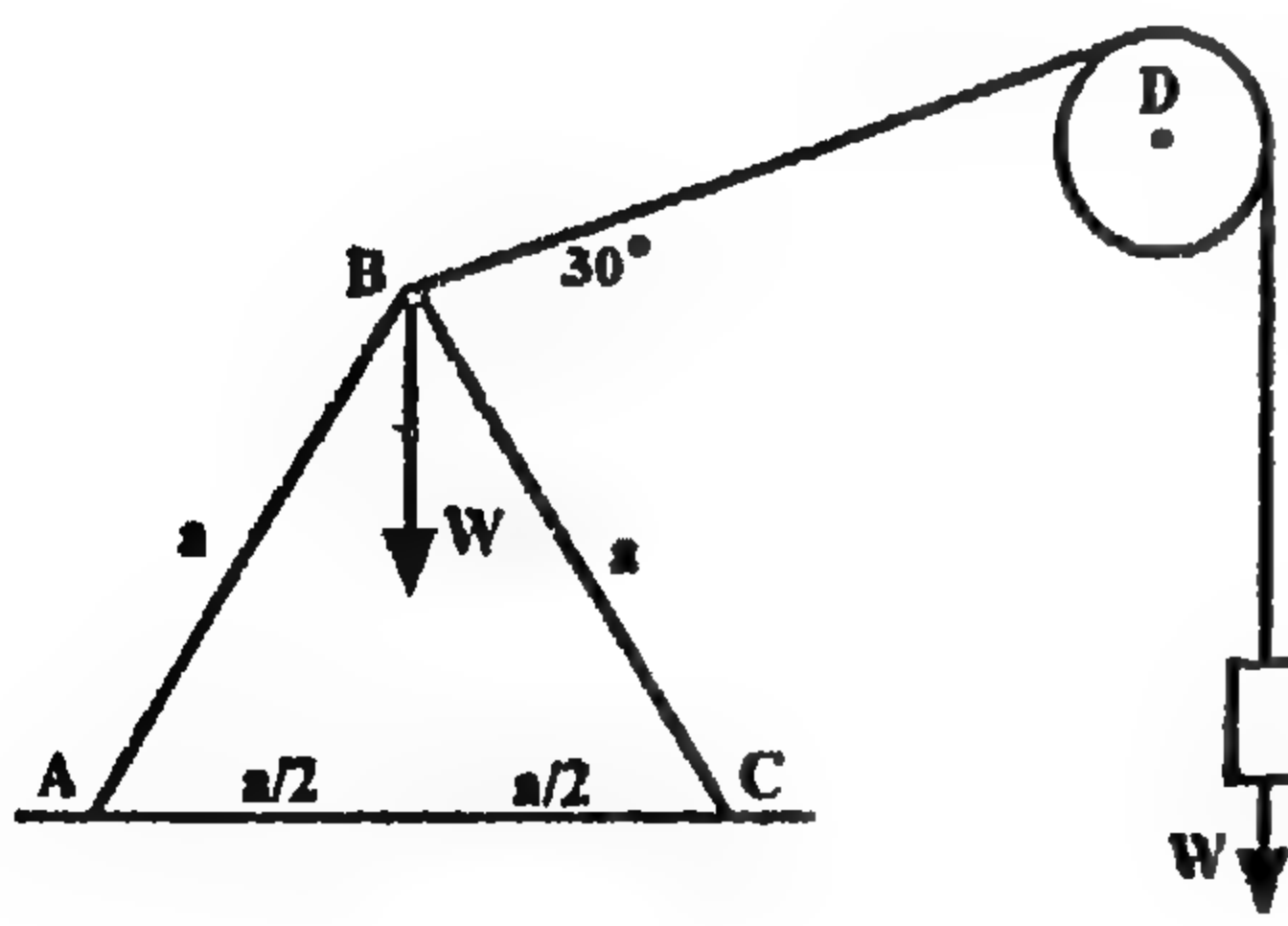
و إذا أزيلت  $P$  في الحالة الثانية هل ينزلق المنشور الى الخارج .

الجواب : أ -  $P = W/3$  ، ب -  $P = 0.57$  ، المنشور لا ينزلق .



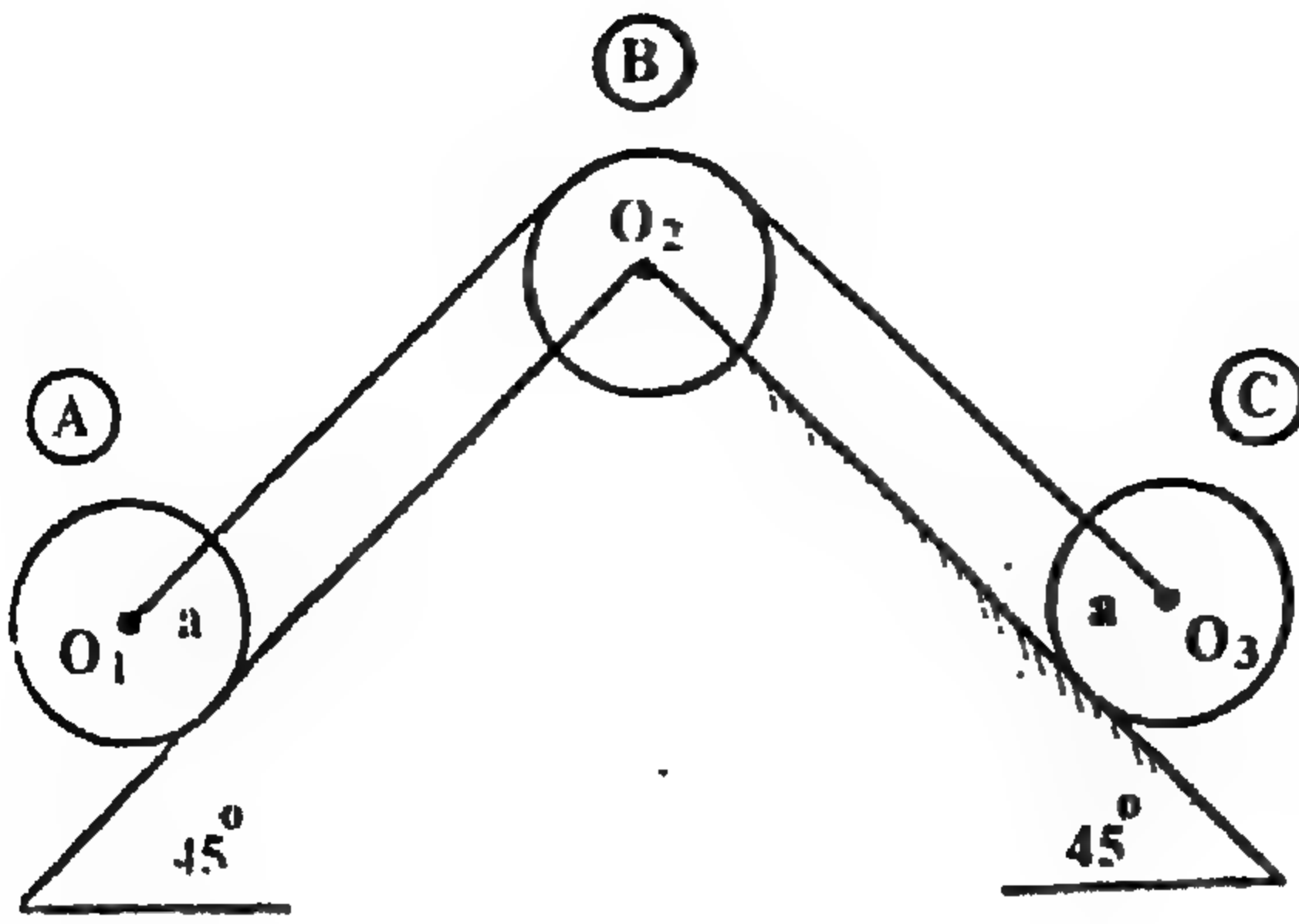
٧ - عين قيمة الشد للتركيبة المينة بالشكل اذا علمت أن معامل الاحتكاك بين الأسطوانتين والحبل  $\mu = \frac{1}{\pi}$  .

$$\mu = \frac{1}{\pi}$$



٨ - اذا كانت البكرة  $D$  في المجموعة المينة بالشكل خشنة و معامل احتكاك  $\mu = \frac{3}{2\pi}$  و ثابتة . عين وزن المنشور  $ABC$  بدلالة  $W$  لكي ينزلق و أثبت أنه لا يتقلب . معامل الاحتكاك بين المنشور و الأرض هو :  $\mu^* = \frac{\sqrt{3}}{8}$  .

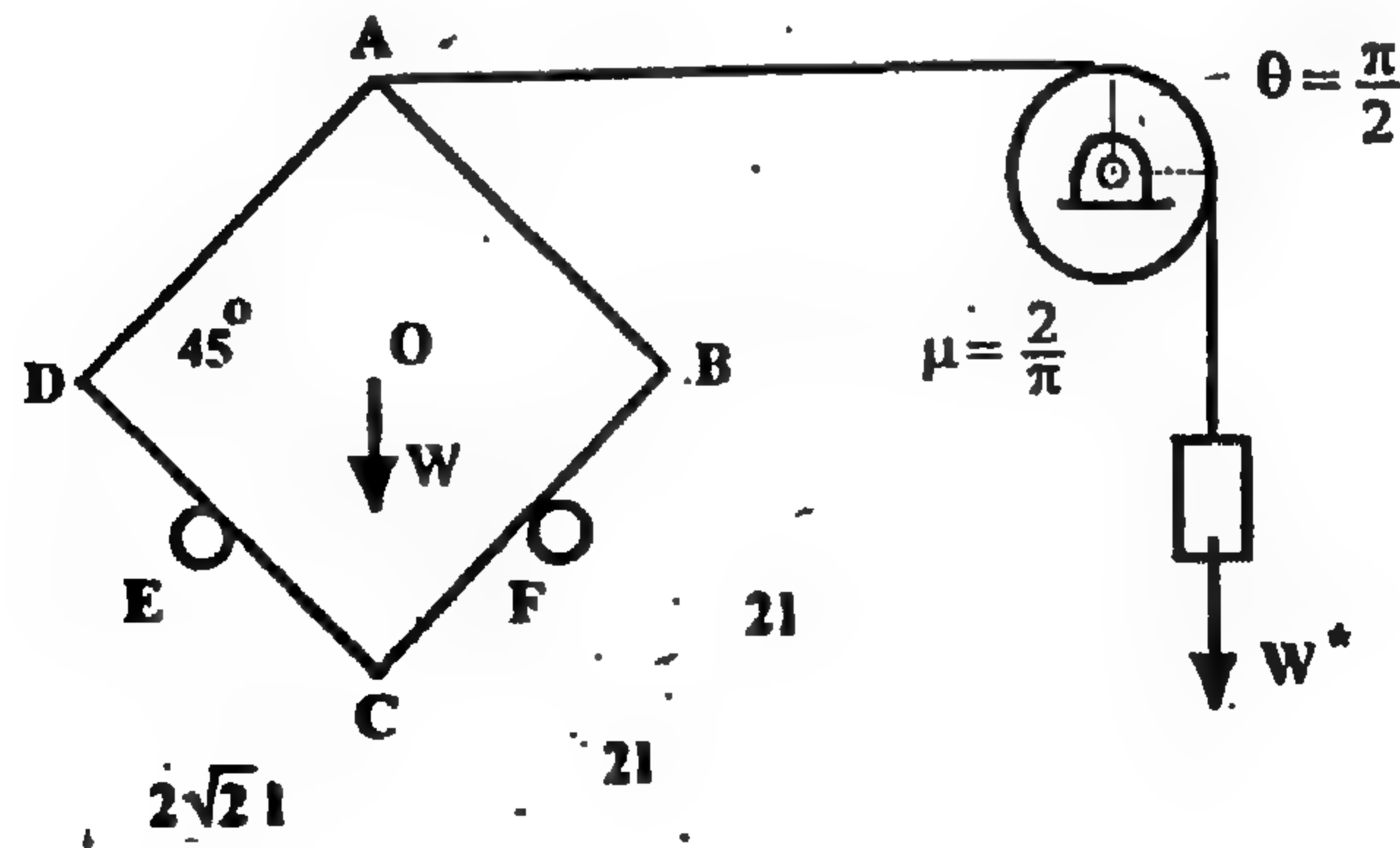




٩ - العجلتان A و C وزن الأولى A هو W و وزن الثانية C هو W' و نصف قطر كل منهما a يتدحرجان على مستويين مائلين خشبيين كما بالشكل حيث يرتبط عمودا العجلتين O1 و O3 بخيط خفيف يمر على بكره خشنة ثابتة B معامل احتكاكها

يساوي  $\frac{2}{\pi}$ . فإذا كان نصف قطر دائرة احتكاك كل من المحورين O1 و O3 يساوي ذراع مقاومة التدحرج لكل من العجلتين  $= \frac{a}{20}$ . عين أقل قيمة للوزن W' بدلالة الوزن W حتى تتدحرج العجلة C أسفل المستوى.

١٠ - لوحة مربعة ABCD طول ضلعها 4l وزنها W ، القطر AC رأسي و يرتكز في الوضع المبين على وتدّين خشبيين E و F في المستوى الأفقي واحد عند منتصف CB و DC و معامل الاحتكاك لكل من التدين مقداره  $(\mu = 1/2)$  ، و اذا ربطت اللوحة من A بخيط يمر على بكره خشنة و يتدلى من طرفه الآخر ثقل مقداره W' و معامل الاحتكاك بين البكرة و الخيط مقداره  $(\mu' = 2/\pi)$ . عين مقدار الثقل W' بدلالة اللوحة (W) عندما تكون اللوحة على وشك الانزلاق.



## مركز الثقل

## مركز الكتلة ومركز الثقل

يعتبر تعيين مركز الثقل من الخواص العامة في دراسة اتزان أي جسم كما يستفاد من تعيين مركز المساحة في معرفة ودراسة الخواص الخاصة بها وهو ما يلزم في دراسة نظرية الإنشاء وغيرها.

تعريف مركز الكتلة :

مركز الكتلة هو ذلك المركز الذي يتوسط تلك المجموعة من الكتل والتي لو ركزت جميعاً في هذا المركز لأصبح عزم الكتلة الكلية حول أي محور مساوياً لمجموع عزوم الكتل الفردية حول نفس المحور.

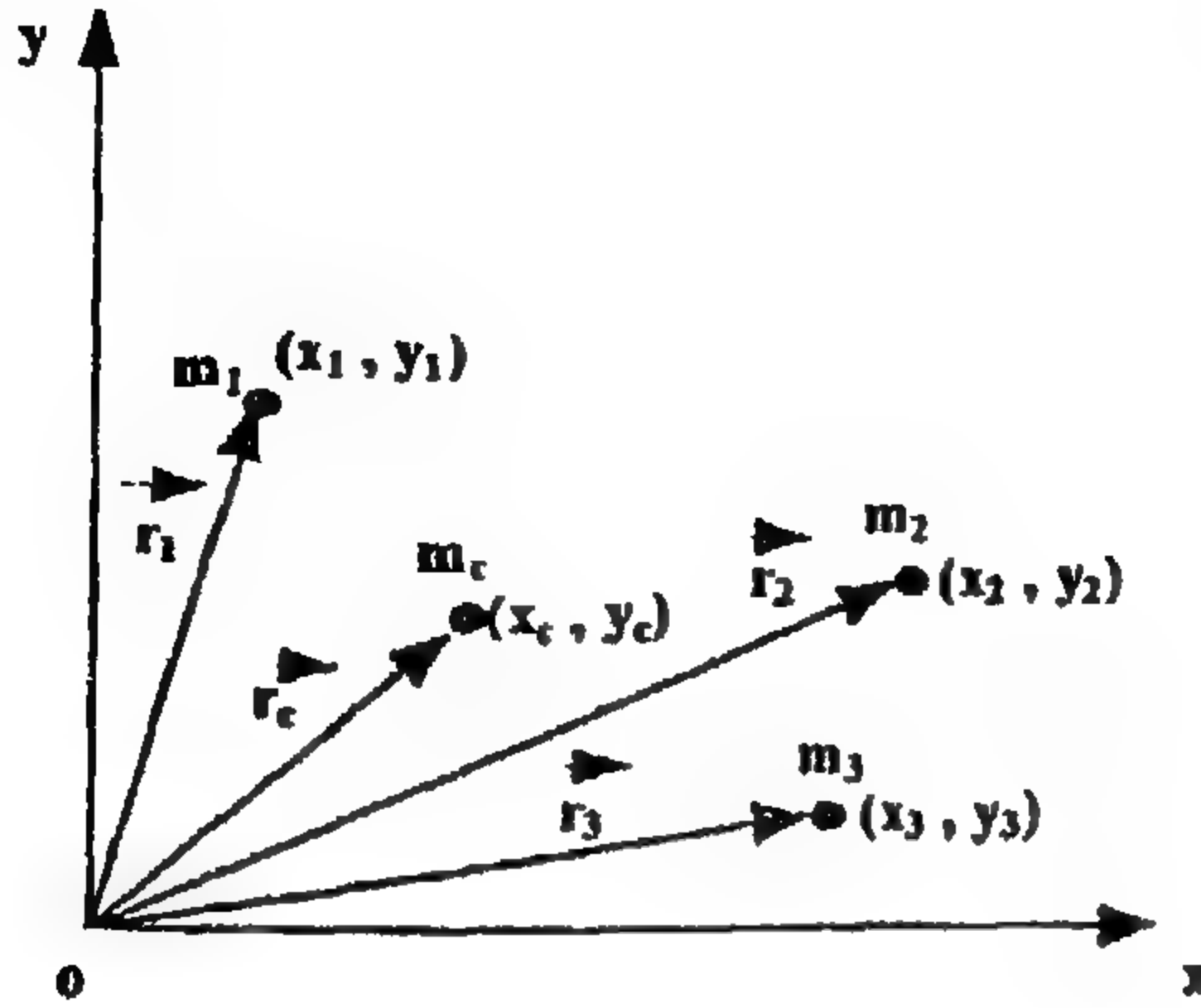
فإذا توالف لدينا عدد من الكتل ولتكن  $(m_1, m_2, m_3)$  وكان مركزها المتوسط هو  $C$  ، وتطبيقاً لهذا التعريف بأخذ العزوم حول المحورين الرأسي والأفقي شكل (١)

$$m_1x_1 + m_2x_2 + \dots = (m_1+m_2+\dots)x_c$$

$$m_1y_1 + m_2y_2 + \dots = (m_1+m_2+\dots)y_c$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} , y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \dots \dots \dots (1)$$

وبجمع هاتين المعادلتين  
التحليليتين في معادلة اتجاهية واحدة  
على الصورة



$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \dots\dots (2)$$

وبالنسبة لحالة الأجسام المتماسكة يكون توزيعها توزيع متصلا بحيث تقسم الكتلة إلى شرائح صغيرة  $\Delta m$  ويطبق عليها نفس التعريف السابق مع استخدام التكامل بدلا من المجموع.

$$x_c = \frac{\int x \, dm}{\int dm}, \quad y_c = \frac{\int y \, dm}{\int dm} \dots\dots\dots (3)$$

وبالمثل للإحداثى Z في الحالة الفراغية العامة .

أما مركز الثقل فهو مركز أوزان هذه الكتل ولما كانت الأوزان عبارة عن مجموعة من القوى المتوازية المناسبة في مقاديرها لمقادير الكتل ومعامل التناسب هو عجلة الجاذبية فإن مركز الثقل يطابق مركز الكتل .

## الأجسام المتجانسة :

في حالة ما اذا كان للجسم كثافة ثابتة مقدارها  $\rho$  لجميع أجزائه يمكن الاستعاضة عن الكتلة بالحجم V نظراً لتناسب الإثنين في هذه الحالة.

$$x_c = \frac{\int x \, dm}{\int dm} = \frac{\int x \rho \, dv}{\int \rho \, dv} = \frac{\int x \, dv}{\int dv} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$y_c = \frac{\int y \, dm}{\int dm} = \frac{\int y \rho \, dv}{\int \rho \, dv} = \frac{\int y \, dv}{\int dv}$$

ويمكن تسمية المركز C في هذه الحالة بمركز الحجم .

## الأجسام الرقيقة :

في حالة الأجسام القشرية الرقيقة المتناهية السمك فيكون الحجم  $V$  رقيقا متجانس السمك ولذا يستعاض عنه بالسطح  $S$  ويسمى المركز  $C$  في هذه الحالة مركز المساحة السطحية أو مركز السطح.

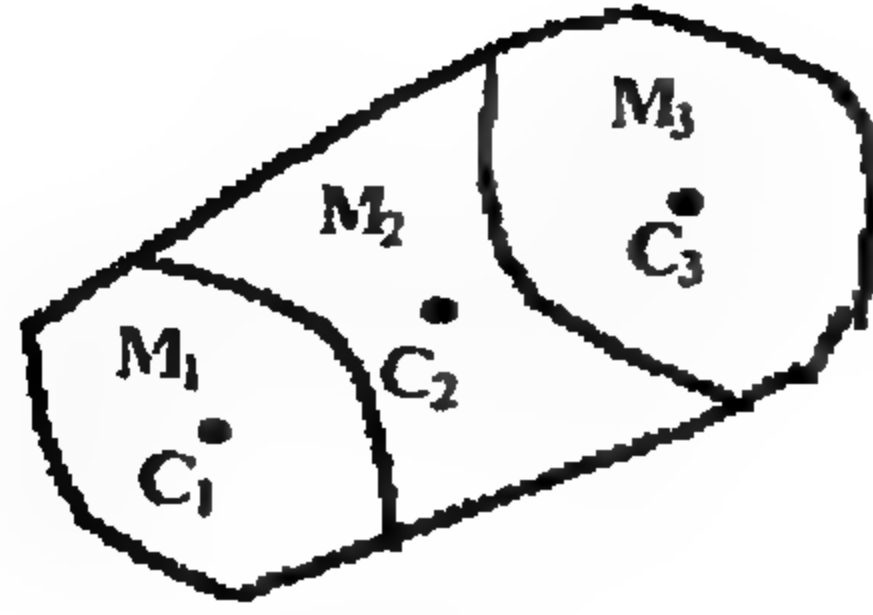
$$x_c = \frac{\int x \, ds}{\int ds} , y_c = \frac{\int y \, ds}{\int ds} \quad \dots\dots\dots (5)$$

## الأجسام الطولية

وفي حالة الأجسام الطولية أو الخطية المتجانسة المقطع يستعاض عن الحجم  $V$  بالطول  $L$  ويسمى المركز  $C$  في هذه الحالة بمركز المنحنى ويتمين بالمعادلتين .

$$x_c = \frac{\int x \, dl}{\int dl} , y_c = \frac{\int y \, dl}{\int dl} \quad \dots\dots\dots (6)$$

## ١ - نظرية مراكز الأجزاء :



شكل (٢)

إذا كان جسم ما مكونا من أجزاء معروفة الكتل والمراكز فإن مركز الجسم بأكمله يتعين كما لو كانت كتل الأجزاء مركزة في مراكزها (شكل ٢).

$$x_c = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{M_1 + M_2 + M_3}, \quad y_c = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2 + M_3 y_3}{M_1 + M_2 + M_3} \dots (7)$$

وإذا احتوى الجسم على بعض الثقوب فإن مادة الثقب تعتبر كتلة سالبة عند التعويض في المعادلتين السابقتين.

## المستويات المركزية والتماثل :

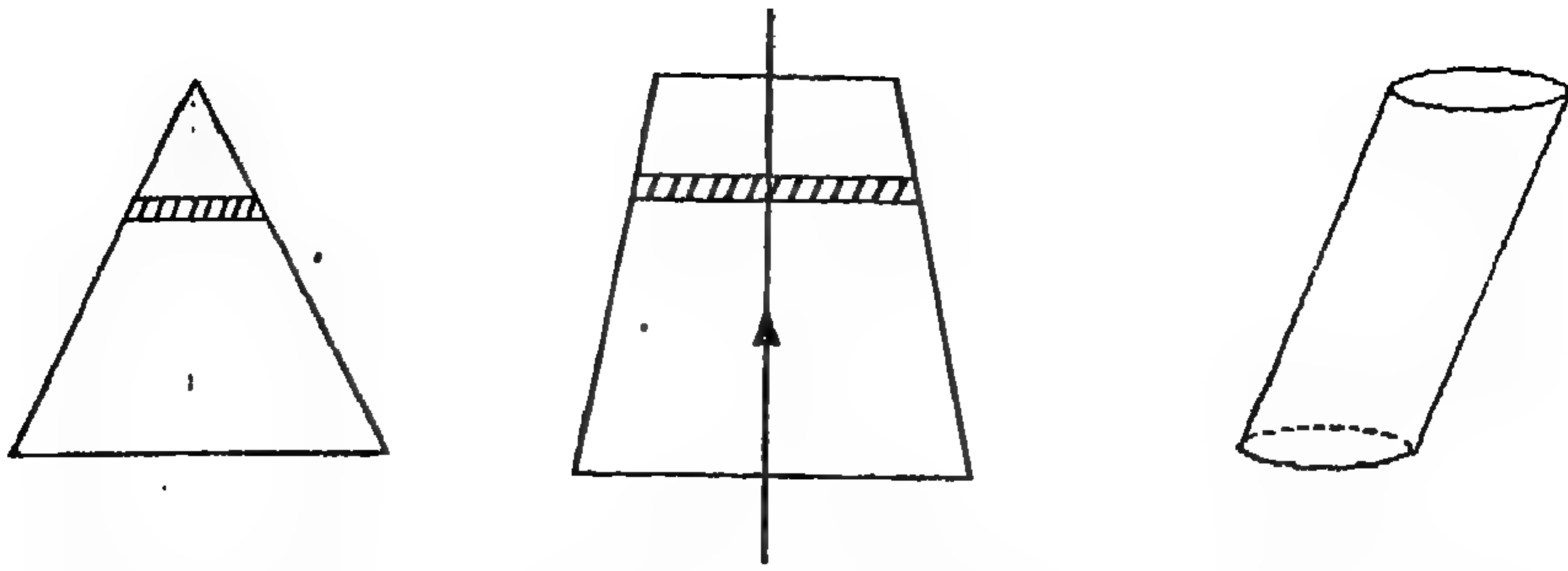
نفرض أن المستوى  $xy$  يمر بمركز الكتلة فيكون

$$Z_c = 0 \quad \therefore \int Z dm = 0$$

وعلى ذلك يجب أن يقطع المستوى  $xy$  الجسم لتواجد قيم موجبة وقيم سالبة للمتغير  $z$  بحيث يتلاشى التكامل .

وعلى ذلك إذا كان الجسم متماثلا بالنسبة لمستوى معين فلا بد أن يقع المركز في ذلك المستوى وكل محور تماثل يمر بالمركز .

وإذا كان هناك مركز تماثل (ملتقى محاور تماثل) فإن مركز الكتلة يقع عليه كمركز الكرة ومركز المربع .



مساحة مثلثية

مساحة على شكل شبه منحرف

سطح أسطوانى مائل

شكل (٣)

تسرى هذه القاعدة فى حالة ما إذا كان محور التماثل مائلا أو متعامدا (شكل ٣)

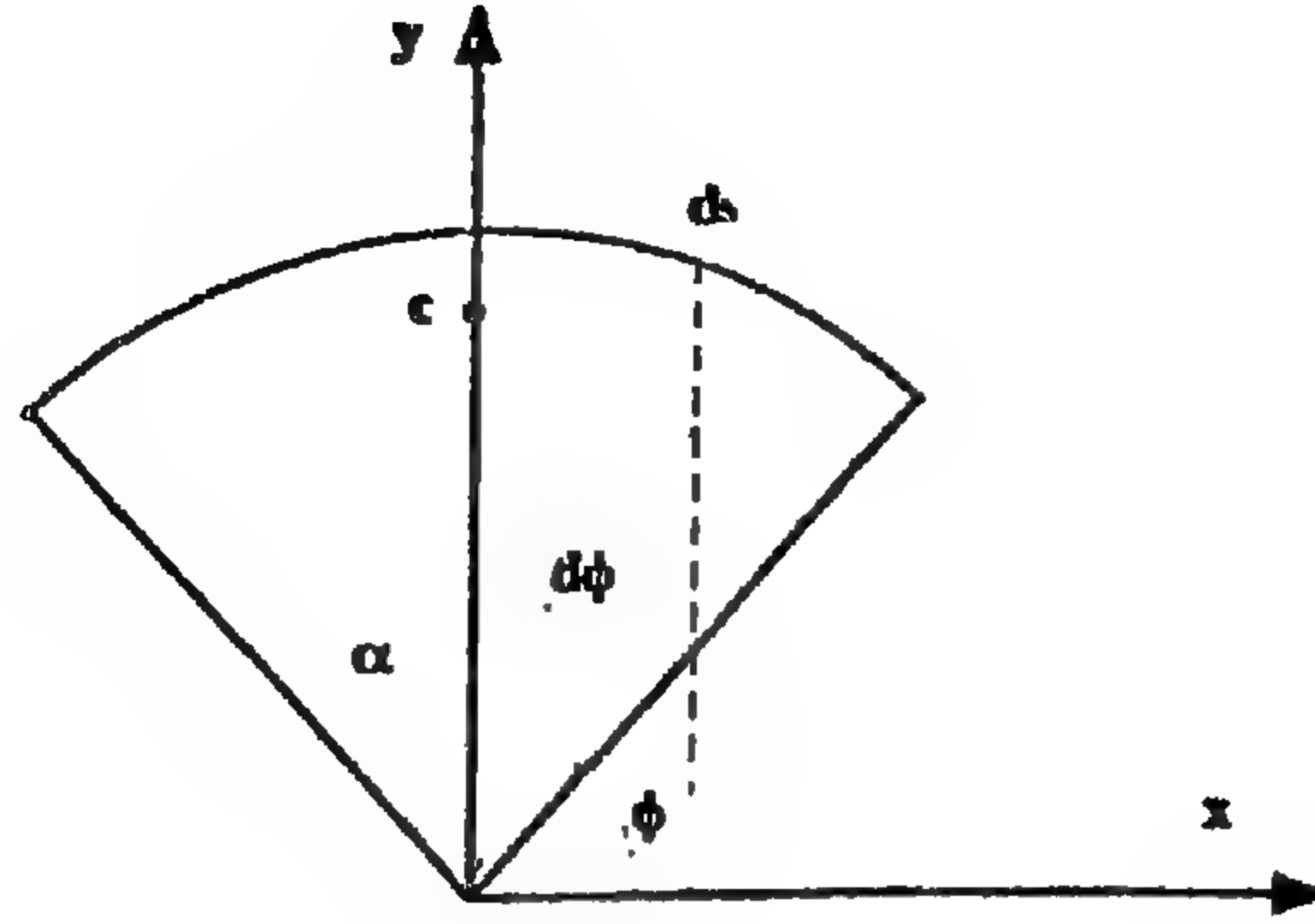
### بعض الأمثلة بالتكامل المباشر :

تسهل عمليات التكامل الواردة بالمعادلات (٤) و (٥) و (٦) إذا أحسنا تجزئ الجسم إلى عناصر تفاضلية معروفة المركز وبذلك يمكن تفادى التكاملات المعقدة ومن المهم اختيار المتغير المناسب لتظهر التكاملات فى الصورة المألوفة.

### (١) مركز قوس دائرى:

نفرض الزاوية المركزية للقوس  $2\alpha$  ونصف قطر الدائرة  $a$ . يتماثل القوس حول منتصف زاويته المركزية وهو المحور  $y$  (شكل ٤) ولذلك يقع مركز القوس  $C$  على المحور  $y$  وتتلشى  $x_c$  وأما  $y_c$  فتعنيها ثاية المعادلين (٥)

$$y_c = \frac{\int y \, ds}{\int ds} = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} (a \sin \phi) a \, d\phi}{a 2\alpha} = \frac{a}{\alpha} \sin \alpha$$



شكل (٤)

لربع دائرة تعطى النتيجة السابقة بتعويض  $\alpha$  بالتقدير الدائري

$$y_c = \frac{a \cdot (1/\sqrt{2})}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\pi}$$

ولنصف دائرة :

$$y_c = \frac{a \cdot 1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi}$$

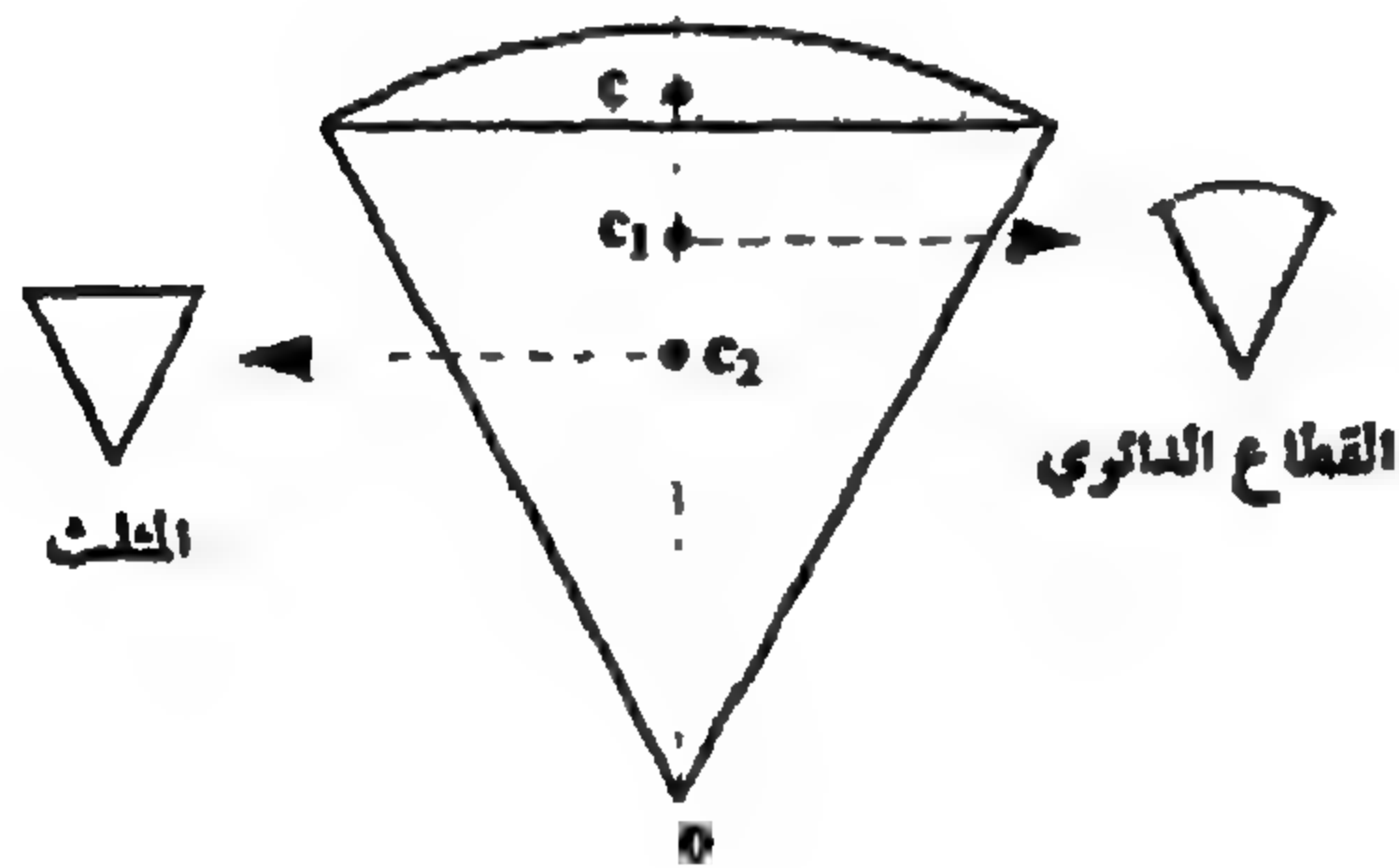
## (٢) مركز قطاع دائري:

بالقسيم إلى مثلثات صغيرة زاويتها المركزية  $d\phi$  وتطبيق ثانية المعادلتين (٥) نحصل على  $y_c$

$$y_c = \frac{\int y ds}{\int ds} = \frac{1}{s} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{2}{3} 2 \sin \phi \frac{a^2}{2} d\phi$$

$$y_c = \frac{2a \sin \alpha}{3 \alpha}$$

## (٣) مركز قطعة دائرية:



شكل (٥)

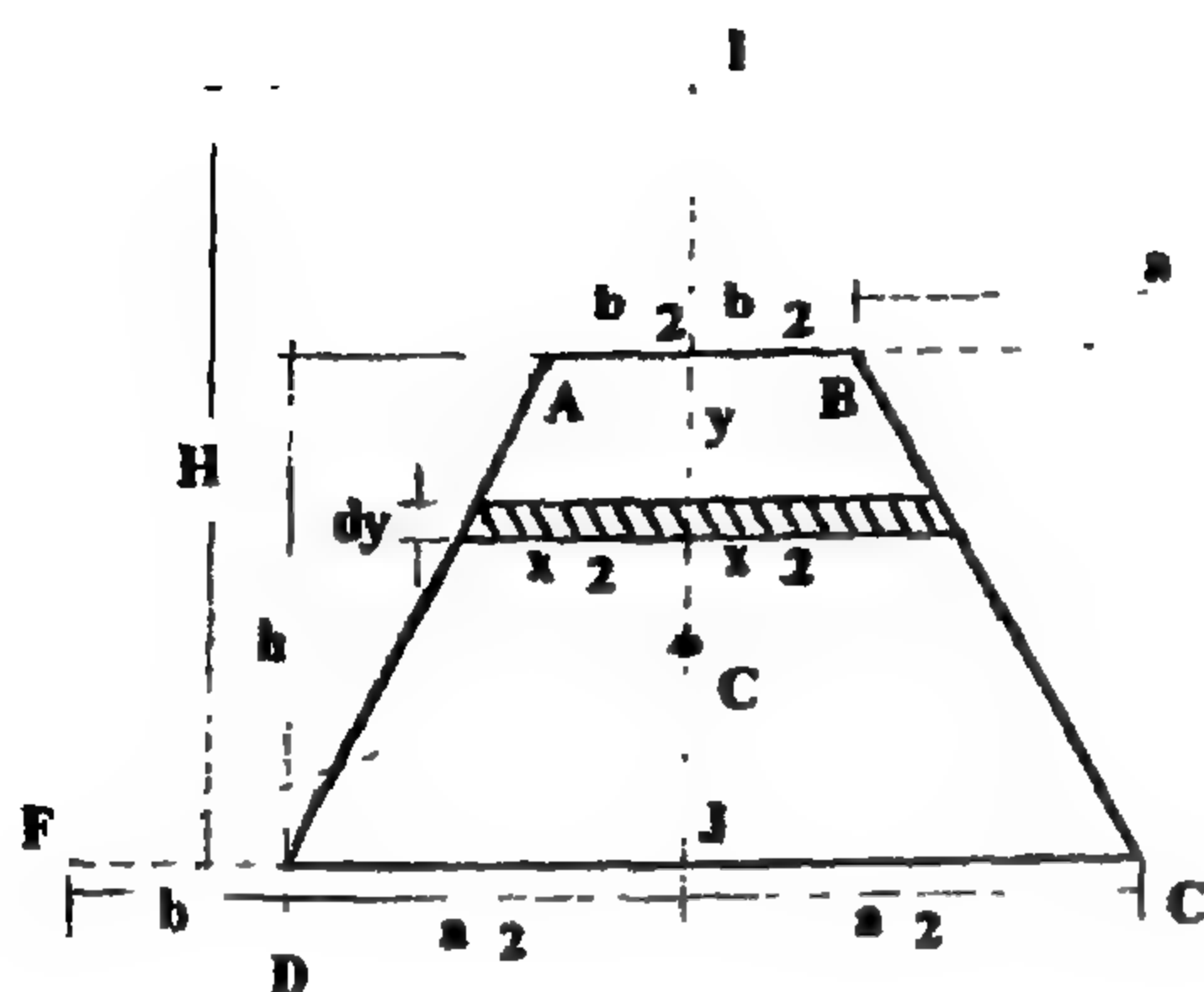
سنستعمل هنا نظرية  
مراكز الأجزاء الموضحة بالبند  
(١) وذلك باعتبار القطعة  
الدائرية الفرق بين القطاع  
الدائري والمثلث شكل (٥)

$$y_c (a^2 \alpha - a^2 \sin \alpha \cos \alpha) = a^2 \alpha \cdot \frac{2a \sin \alpha}{3 \alpha} - a^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{2a}{3} \cos \alpha$$

$$y_c = \frac{2a \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}$$



#### (٤) مركز شبه منحرف:



بأخذ شريحة  $x$  وارتفاعها  $dy$  الشكل وتطبيق المعادلتين (٥) لحصل على

$$y_c = \frac{\int_0^h y ds}{S} = \frac{\int_0^h x y dy}{S}$$

ومن تشابه المثلثات :

$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{H-y}{H}, \quad \frac{H-h}{H} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore x = a - \frac{a-b}{h} \cdot y$$

$$y_c = \frac{\left[ \frac{a y^2}{2} - \frac{a-b}{h} \frac{y^3}{3} \right]_0^h}{\frac{h}{2}(a+b)}$$

وبتعويض الحدين الأعلى والأدنى للتكامل نحصل بعد شئ الاختزال على  $y_c$  ويمكن تعيين المركز  $C$  بالرسم وذلك بعد  $BA$  إلى  $E$  بحيث  $BE = \alpha$  وبعد  $CD$  إلى  $F$  بحيث  $DF = b$  فإن المركز  $C$  هو نقطة تقاطع  $IJ$  و  $FE$  كما هو موضح بشكل (٦)

## (٥) مركز مساحة محدودة بقطع مكافئ:

(١) المساحة المحدودة بالقطع المكافئ  $(y^2=4ax)$  ومحور  $x$  والخط الرأسى  $x=b$

تقسم المساحة إلى شرائح رأسية (شكل ٧) مساحة كل منها  $y \Delta x$  تركيز مادة الشريحة فى مركزها  $C_1$  واحداثياته  $(x, y/2)$  ثم تؤخذ عزوم هذه المادة المركزة فى  $C_1$  وعزم المادة الكلية للقشرة الرقيقة التى تمثلها المساحة باعتبارها مركزة فى المركز العام  $C_1$  وذلك حول المحورين  $(x, y)$  لنحصل على معادلتين على النمط (٥)

$$x_{c_1} = \frac{\int x ds}{\int ds} = \frac{\int x y dx}{\int y dx}$$

$$y_{c_1} = \frac{\int \frac{y}{2} ds}{\int ds} = \frac{\int \frac{y}{2} y dx}{\int y dx}$$

وبالتعويض عن  $y$  من معادلة القطع المكافئ المعطاه نحصل على

$$x_{c_1} = \frac{\int_0^b 2\sqrt{a} x^{3/2} dx}{\int_0^b 2\sqrt{a} x^{1/2} dx} = \frac{(\frac{2}{5}) [x^{5/2}]_0^b}{(\frac{2}{3}) [x^{3/2}]_0^b} = \frac{3}{5} b$$

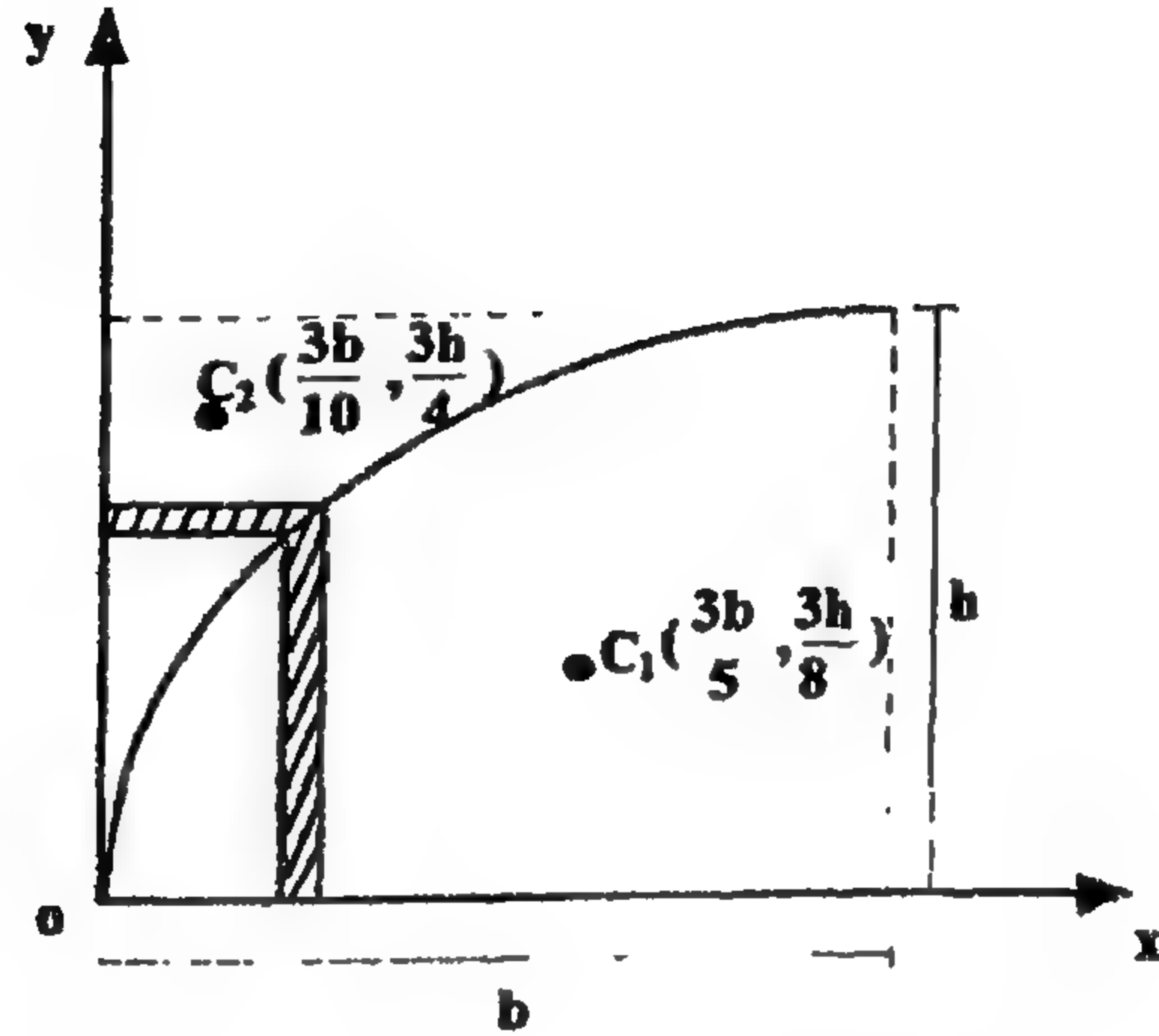
$$y_{c_1} = \frac{\int_0^b 2a x dx}{\int_0^b 2\sqrt{a} x^{1/2} dx} = \frac{a [x^{1/2}]_0^b}{(\frac{4}{3} \sqrt{a}) [x^{3/2}]_0^b} = \frac{3}{4} \sqrt{ab}$$

وبتعويض احدائى نقطة  $A$  فى معادلة القطع المكافئ نحصل على

$$h = 2\sqrt{2b} \quad , \quad y_{c_1} = \frac{3}{8} h$$

(ب) المساحة المحدودة بالقطع المكافئ  $(y^2 = 4ax)$  ومحور  $y$  والخط الأفقي  $y = h$

تقسم المساحة إلى شرائح أفقية كما في الشكل مساحة كل منها  $\Delta y$  وتركز مادة الشريحة في مركزها واحداً لياها  $(x/2, y)$  ثم تؤخذ العزوم حول المحورين كما في الحالة السابقة .



شكل (٧)

$$x_{c_2} = \frac{\int \frac{x}{2} ds}{\int ds} = \frac{\int_0^h \frac{x}{2} x dy}{\int_0^h x dy}$$

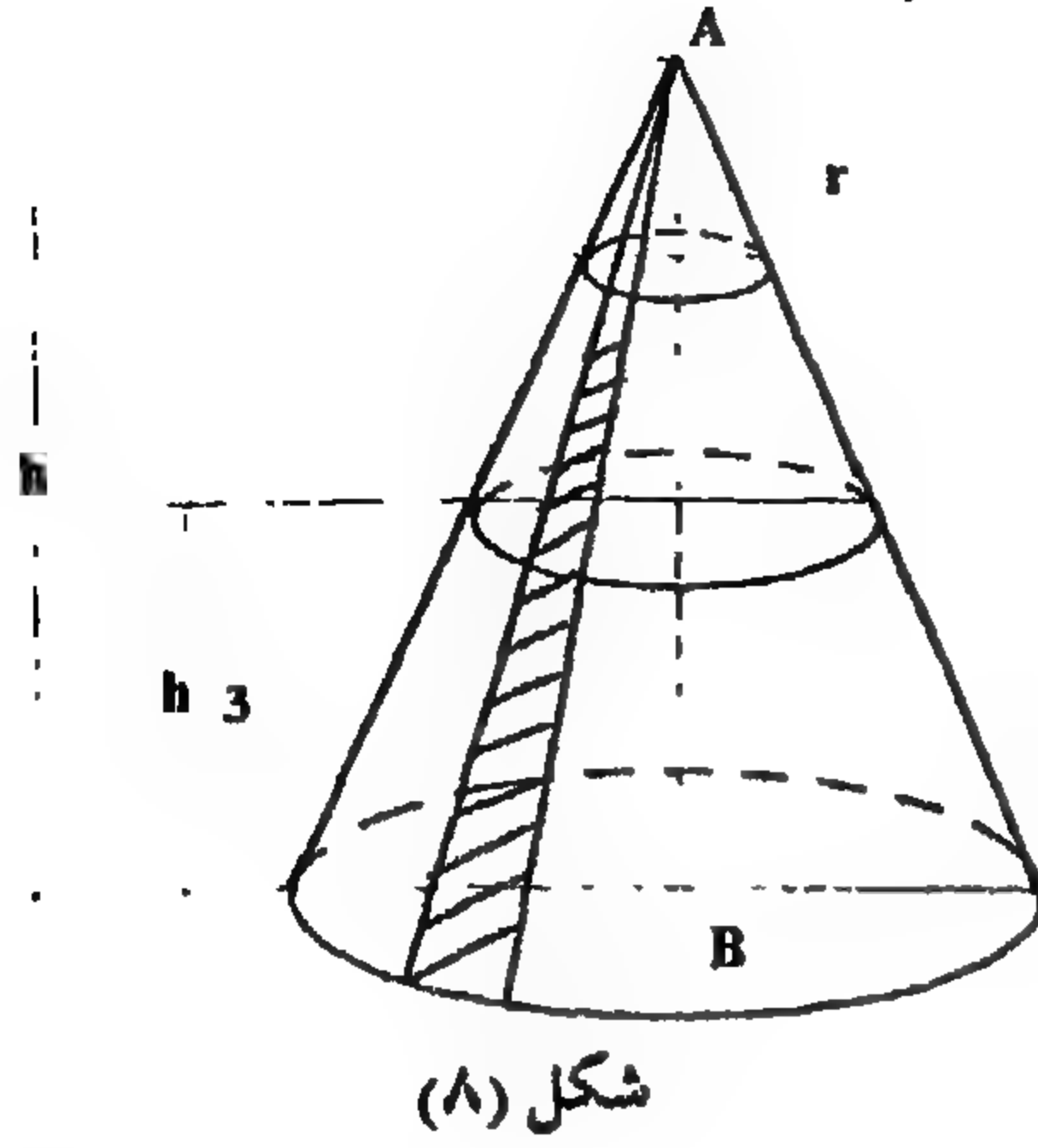
$$y_{c_2} = \frac{\int y ds}{\int ds} = \frac{\int_0^h y x dy}{\int_0^h x dy}$$

وبالتعويض عن  $y$  من معادلة القطع المكافئ نحصل بعد إجراء التكاملات وتعويض النهايات كما في الحالة (أ) على النتائج الآتية :

$$x_{c_2} = \frac{3}{10}b \quad , \quad y_{c_2} = \frac{3}{4}h$$

وننتج الحالتين مجمعة في شكل (٧)

## (٦) مركز سطح مخروطي أو هرمي:



بتقسيم السطح إلى مثلثات صغيرة كالمثلث المظلل بشكل (٨) فإن مركزها جميعا تقع على ارتفاع  $h/3$  من القاعدة وكذلك مركز السطح ولكن لا يقع مركز السطح على المحور BA إلا إذا كان المخروط

أو الهرم قائما مع توفر شروط التماثل المساحي بالنسبة إلى المحور وإذا قطعنا أجزاء من السطح المخروطي بمستو مواز للقاعدة حصلنا على مخروط ناقص يقع على مركزه على ارتفاع قدرة

$$y_c = \frac{h}{3} \cdot \frac{R + 2r}{R + r}$$

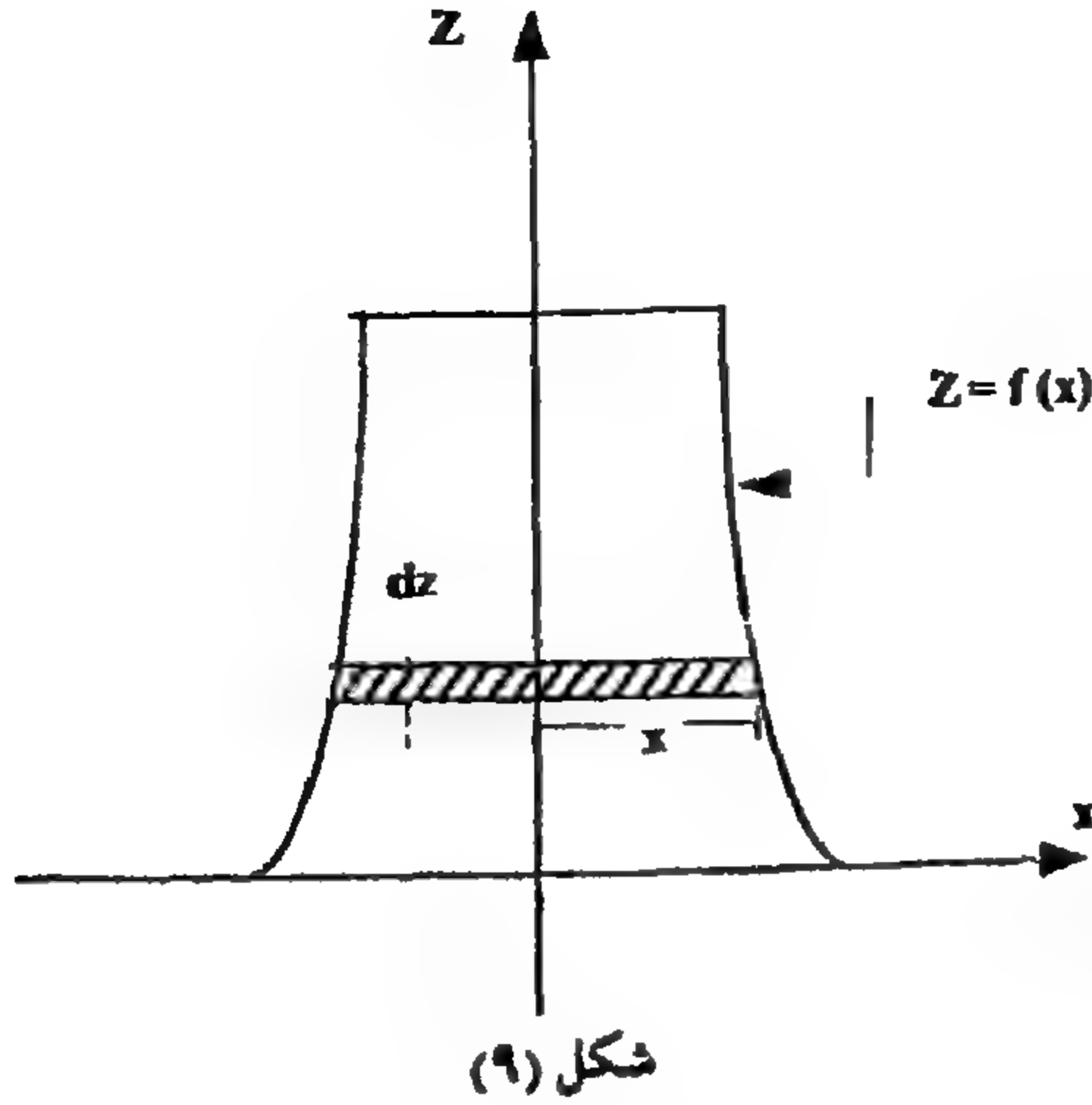
حيث  $R$  نصف قطر القاعدة الكبرى  $r$  نصف قطر القاعدة الصغرى .

والنتيجة السابقة يمكن برهنتها بتقسيم السطح إلى أشباه منحرفة وتطبيق نتيجة مركز شبه المنحرف التي حصلنا عليها بالحالة (٥).

## (٧) مركز الحجم المخروطي أو الهرمي:

يقع المركز على المحور المركزي على ارتفاع  $h/4$  من القاعدة والمحور المركزي هو الخط المار برأس المخروط ومراكز المقاطع المتشابهة الموازية للقاعدة .

## (٨) مركز الحجم الدوراني :



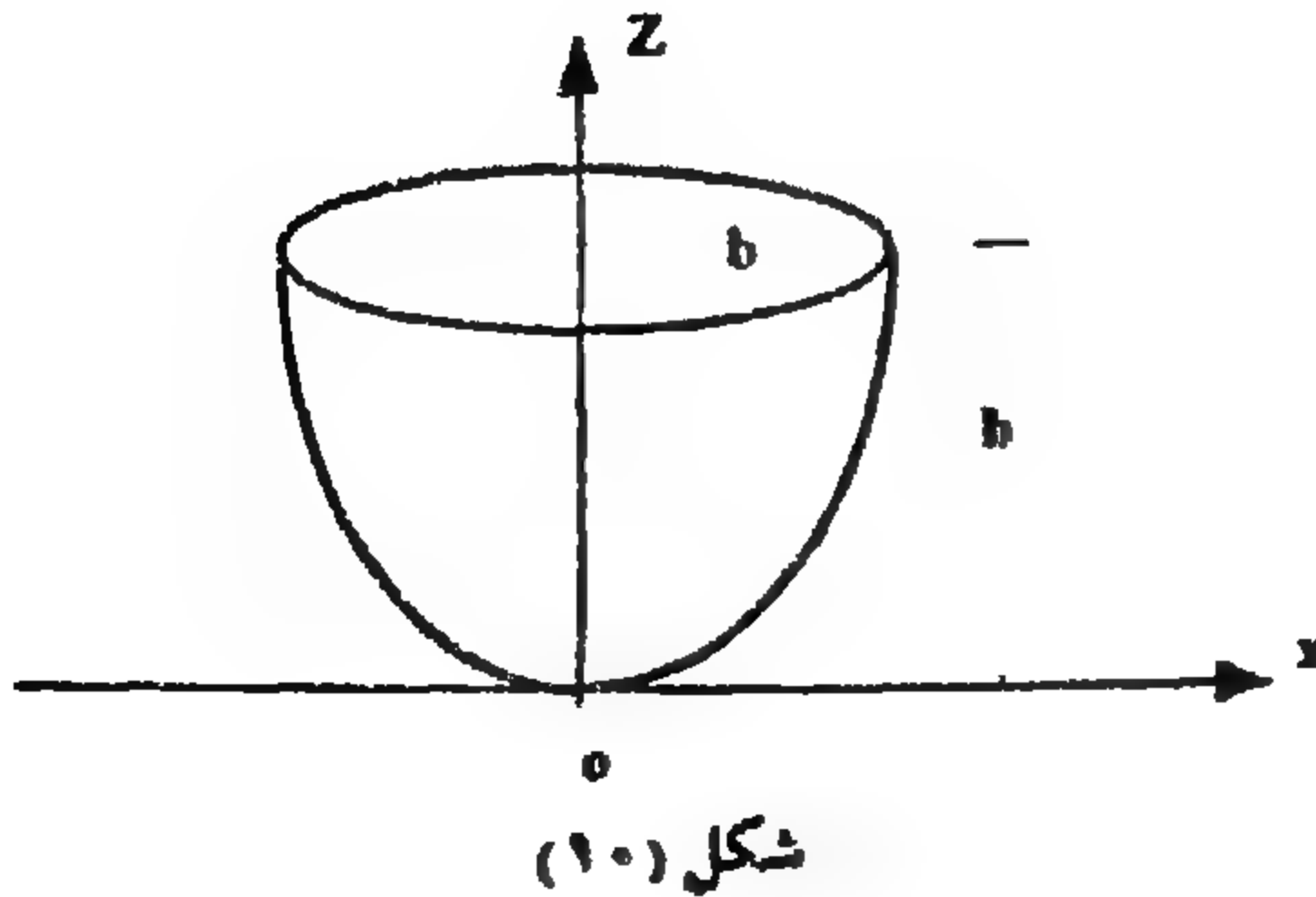
إذا أدير المنحنى  $f = z$  (x) حول المحور  $z$  فإنه ينتج جسم دوراني مقطعة العمودي على  $z$  دائري (شكل ٩)

يقع مركز ثقل هذا الجسم على محور التماثل  $z$  ويبقى تعيين إحداثية الرأس  $z$  لتعيين هذا الإحداثي يقسم الجسم إلى شرائح بواسطة مستويات أفقية متقاربة وتركز مادة الشريحة في مركزها وإحداثياتها ( $z$  و  $0$ ) وأما مقدار حجمها فهو

(٤)  $(\pi x^2 \Delta z)$  تؤخذ العزوم لمادة الشريحة المركزة حول المحور  $x$  فنحصل على معادلة على النمط

$$z_c = \frac{\int_{z_1}^{z_2} (\pi x^2 dz) \cdot z}{\int_{z_1}^{z_2} \pi x^2 dz}$$

أمثلة :

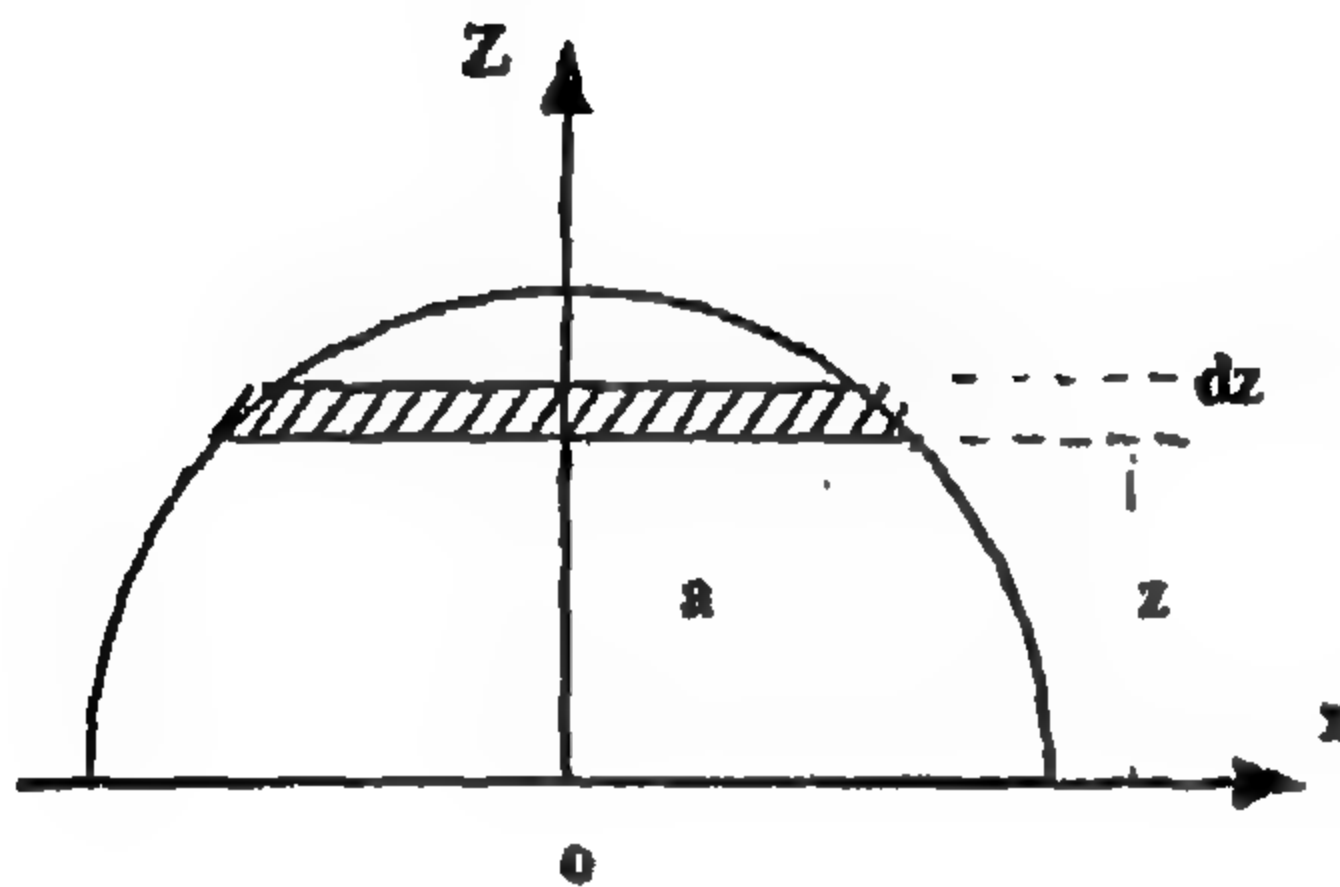


١ - عين مركز الحجم الدوراني الناشئ من دوران القطع المكافئ  $(x^2 = 4az)$  بسين  $z=0$  و  $z=h$  حول المحور  $z$  (الشكل)

$$z_c = \frac{\int_0^h (\pi x^2 dx) \cdot z}{\int_0^h \pi x^2 dz} = \frac{\int_0^h 4a z^2 dz}{\int_0^h 4a z dz}$$

$$= \frac{\left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^h}{\left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^h} = \frac{2}{3} h$$

أي أن مركز الحجم المكافئ الدوراني يقع في ثلثي ارتفاعه من ناحية الرأس .



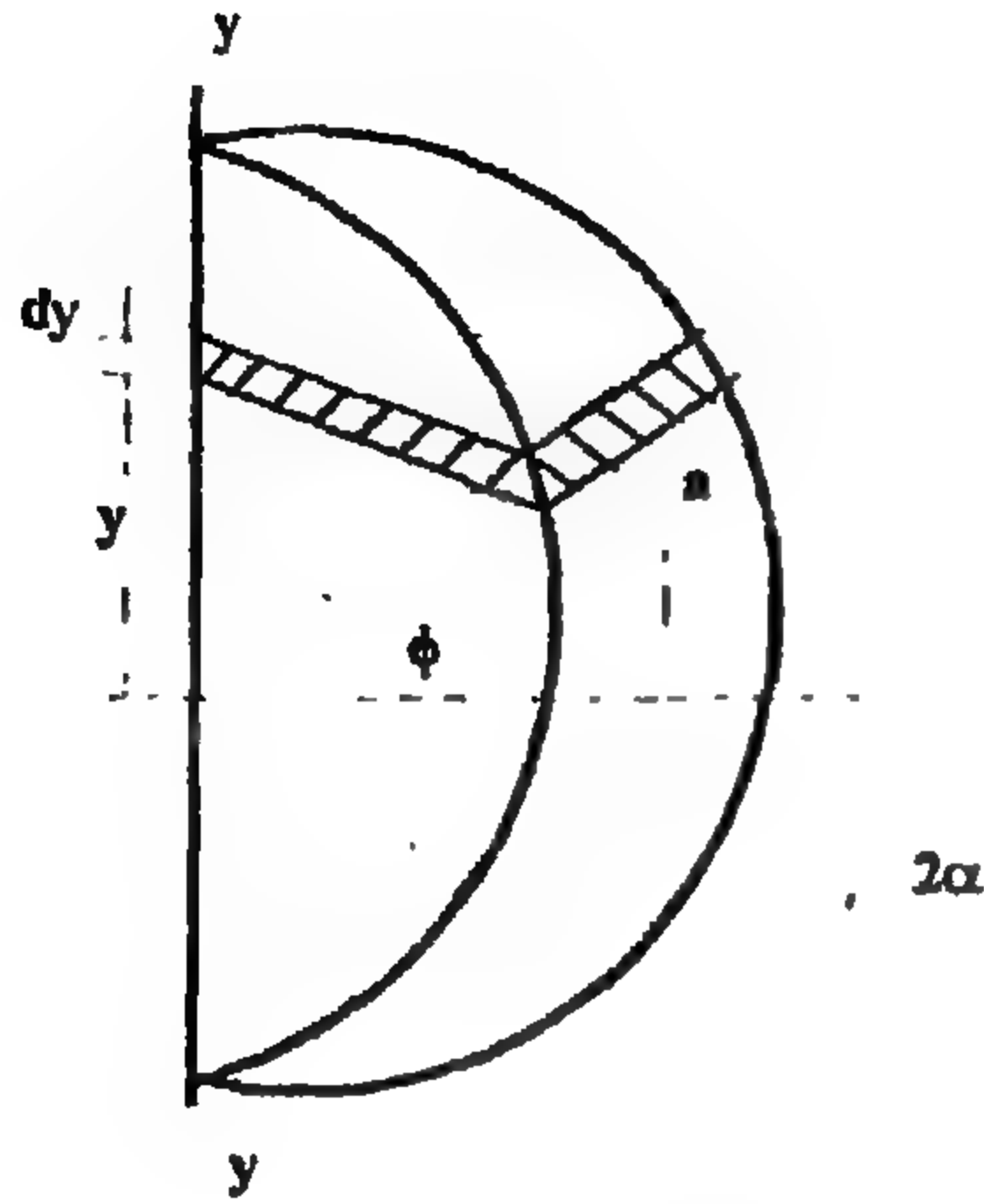
٢ - عين مركز الحجم لنصف كرة مصمتة نصف قطرها  $a$  (الشكل) وتقسّم نصف الكرة إلى شرائح أفقية كالمبينة بالرسم ونستخدم المعادلة (٩) لتحديد  $z_c$

$$z_c = \frac{\int_0^a (\pi x^2 dz) \cdot z}{\int_0^a \pi x^2 dz} = \frac{\int_0^a z(a^2 - z^2) dz}{\int_0^a (a^2 - z^2) dz}$$

$$= \frac{\left[ \frac{a^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^a}{\left[ a^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^a}$$

$$= \frac{3}{8} a$$

أى أن مركز ثقل نصف كرة مصمتة يقع على محور تماثله ويبعد عن مركز الكرة بمقدار  $\frac{8}{3}$  نصف القطر .



٣ - عين مركز شقة كروية مصمتة زاويتها المركزية  $2\alpha$  بتقسيم الشقة إلى شرائح أفقية كما هو مبين بالشكل يكون حجم كل شريحة

$$\Delta v = \alpha x^2 \cdot \Delta y$$

وبعد مركزها عن المحور yy هو

$$\frac{2x \sin \alpha}{3\alpha}$$

وبذلك يكون بعد مركز الشق e عن yy فى القطاع الأوسط معطى بالمعادلة

$$v \cdot e = \int_0^a \alpha x^2 dy \cdot \frac{2\alpha \sin \alpha}{3\alpha}$$

بالتعويض

$$x = a \cos \phi, \quad dy = a \cos \phi \, d\phi$$

$$\alpha \cdot \frac{4}{3} a^2 e = \frac{4}{3} a^4 \sin \alpha \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \phi \, d\phi$$

$$= a^4 \sin \alpha \cdot \frac{3\pi}{16}$$

$$e = \frac{3\pi a \sin \alpha}{16 \alpha}$$

بالتعويض عن  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  نحصل على بعد مركز نصف الكرة المصمتة

$$e_{\max} = \frac{3}{8} a$$

نما سبق أن أوجدناه بطريقة أخرى .

### (٩) مركز السطح الدوراني:

يقسم السطح إلى شرائح تحدها مستويات عمودية على محور تماثل السطح (شكل ٩) المساحة الجانبية لكل شريحة تساوي

$$\Delta S = 2\pi x \Delta s$$

حيث  $\Delta s$  طول جزء المنحنى الذي تتولد الشريحة من دورانه تركّز مادة كل شريحة في مركزها ؛ أي :  $(z, 0)$  ثم تؤخذ العزوم حول محور  $x$  للحصول على

$$Z_c = \frac{\int z ds}{\int ds} = \frac{\int 2\pi x ds \cdot z}{\int 2\pi x ds}$$

للسطح نصف الكروي المبين بشكل (٩) تعطى المعادلة (١٠) ما يأتي :

$$Z_c = \frac{\int z ds}{\int ds} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin \theta \cdot 2\pi a^2 \cos \theta d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a^2 \cos \theta d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin \theta d \sin \theta}{\left[ \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{a \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{1} = \frac{a}{2}$$



## نظرية بابوس:

أ- إذا دار جزء من منحنى مستوى حول محور فى مستوى زاوية قدرها  $\alpha$  فإن المساحة الجانبية للسطح الدوراني الناتج يساوى طول المنحنى مضروباً فى مسار مركزه . فإذا دار المنحنى AB حول المحور Z (شكل ١٢) زاوية قدرها  $\alpha$  وكان  $x_c$  بعد مركزه عن المحور Z فإن مساحة السطح الدوراني ABAB تعطى بالمعادلة ؟

$$S = \int \alpha x ds = \alpha \int x ds$$

ولكن مركز المنحنى يتعين بالمعادلة

$$x_c = \frac{\int x ds}{\int ds} = \frac{\int x ds}{L}$$

حيث  $L$  هى الطول الكلى للمنحنى، ومن المعادلتين السابقتين ينتج أن

$$S = L \cdot (\alpha x_c)$$

وهو ما يثبت الشق الأول من النظرية .

وإذا كانت  $\alpha$  دورة كاملة فإن

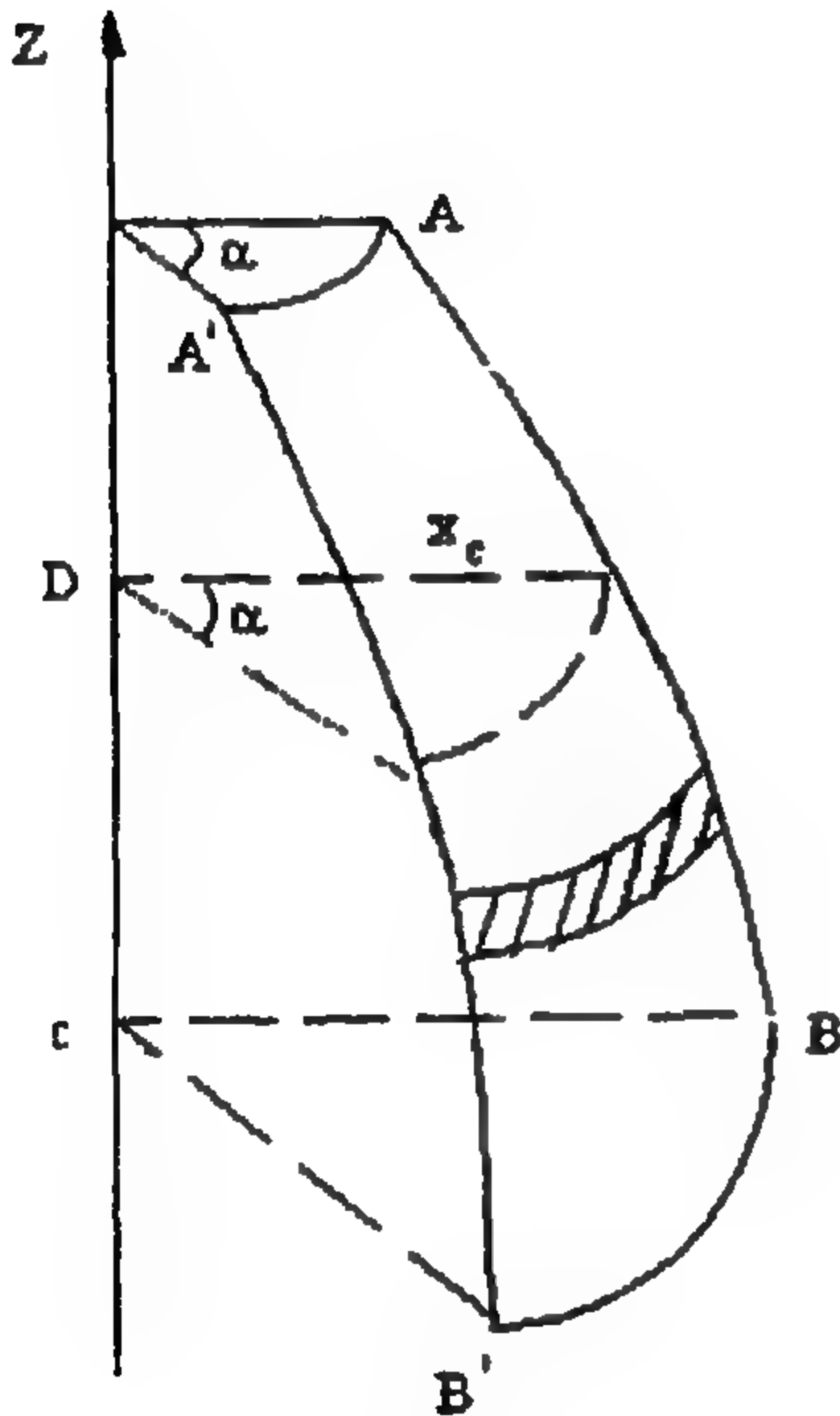
$$S = L \cdot (2\pi x_c)$$

و بتطبيق ذلك على قوس نصف دائرى نحصل على

$$S = 4\pi a^2 = 2\pi x_c \cdot \pi a$$

$$x_c = \frac{2a}{\pi}$$

وهو ما يمكن الحصول عليه بتطبيق المعادلة



ومن الواضح أن هذا الشق من النظرية يفيد في تعيين مركز منحني معلوم طوله ومساحة السطح المتولد من دورانه

ب - إذا دارت مساحة مستوية حول محور في مستويها فإن الحجم الدوراني الناتج يساوي المساحة مضروبا في مسار مركزها

بالإشارة إلى شكل (١٢) الحجم الناتج من دوران المساحة ABCD حول محور z تساوى

$$v = \int \alpha x dA$$

وفيها  $\alpha A$  جزء صغير من المساحة ABCD ولكن مركز هذه المساحة يتعين من المعادلة

$$x_c = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int x dA}{A}$$

ومن المعادلتين السابقتين ينتج أن

$$v = A \cdot (\alpha x_c)$$

وهو ما يثبت الشق الثاني من النظرية .

وإذا كانت  $\alpha$  دورة كاملة فإن

$$v = (2\pi x_c) \cdot A$$

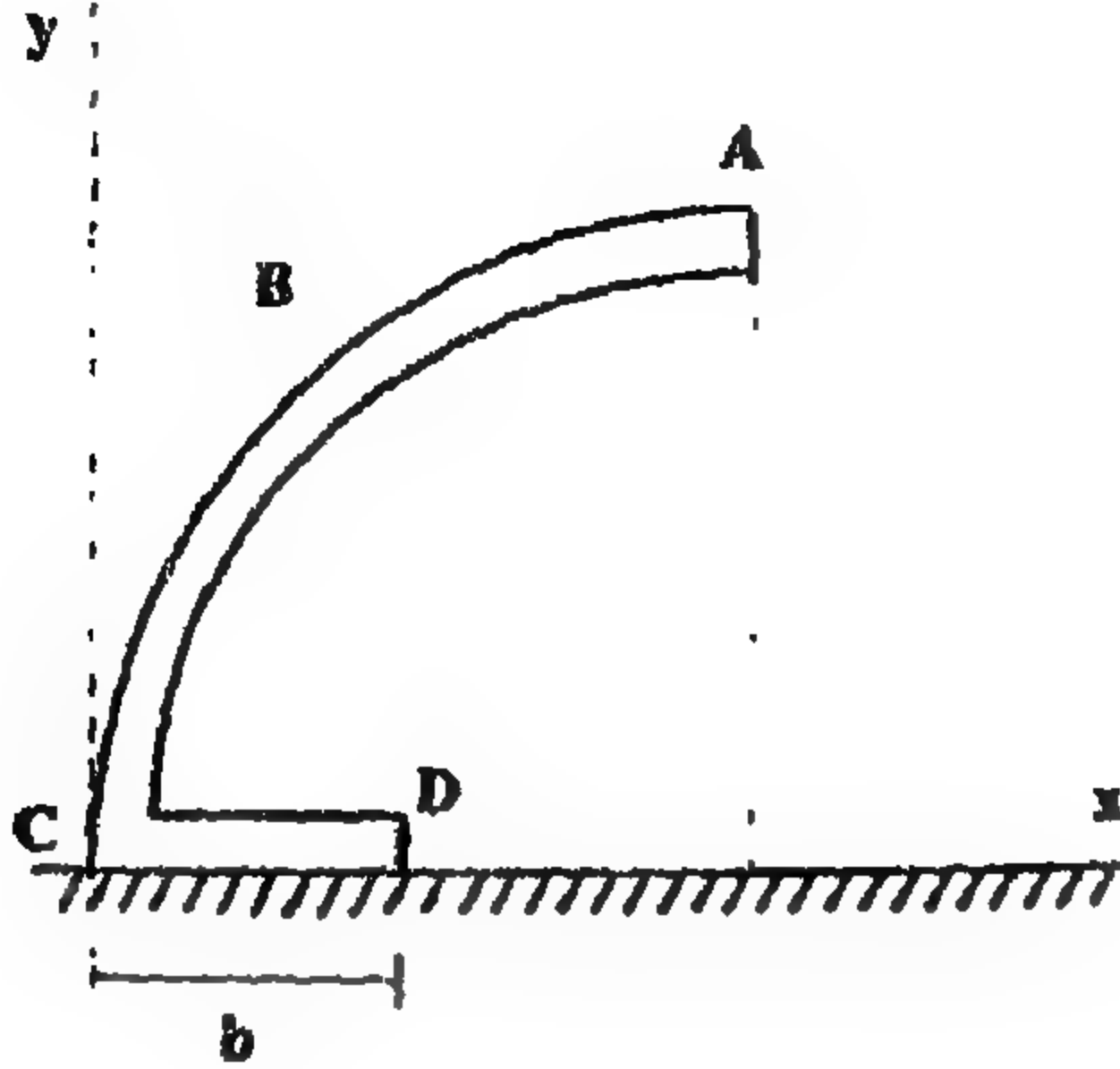
وبتطبيق ذلك على مساحة نصف دائرية ينتج أن

$$\frac{3}{4} \pi a^3 = 2\pi x_c \cdot \frac{\pi a^2}{2} \rightarrow \therefore x_c = \frac{4a}{3\pi}$$

وهذا هو مركز مساحة نصف دائرية .

ومن الواضح أن هذا الشق من النظرية يفيد في تعيين مركز مساحة مستوية معلومة إذا كان الحجم المتولد من دورانها معلوما .

## أمثلة محلولة



١ - مظلة مقطوعها يتألف من ربع دائرة ABC بنصف قطر ٣ أمتار وقاعدة مستقيمة CD . عين عرض القاعدة بحيث لا تنقلب المظلة حول D علماً بأن وزن وحدة الأطوال من مقطع المظلة =  $w$

الحل:

الجزء الدائري ABC

ليكن وزنه  $W_1$  ومركز ثقله  $G_1(x_1, y_1)$

$$W_1 = \frac{1}{4} 2\pi \cdot 3w = \frac{3}{2} \pi w$$

$$x_1 = r - \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \cdot \cos \alpha = 3 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 1.09 \text{ m}$$

$$y_1 = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \cdot \sin \alpha = 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} = 1.91 \text{ m}$$

الجزء المستقيم CD:

ليكن وزنه  $W_2$  ومركز ثقله  $G_2(x_2, y_2)$

$$W_2 = w b$$

$$x_2 = b, y_2 = 0$$

مركز ثقل الجزئين G

$$x_G = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2}{W_1 + W_2}$$

عند وشك الانقلاب حول نقطة D تمر محصلة وزني الجزئين بهذه النقطة .

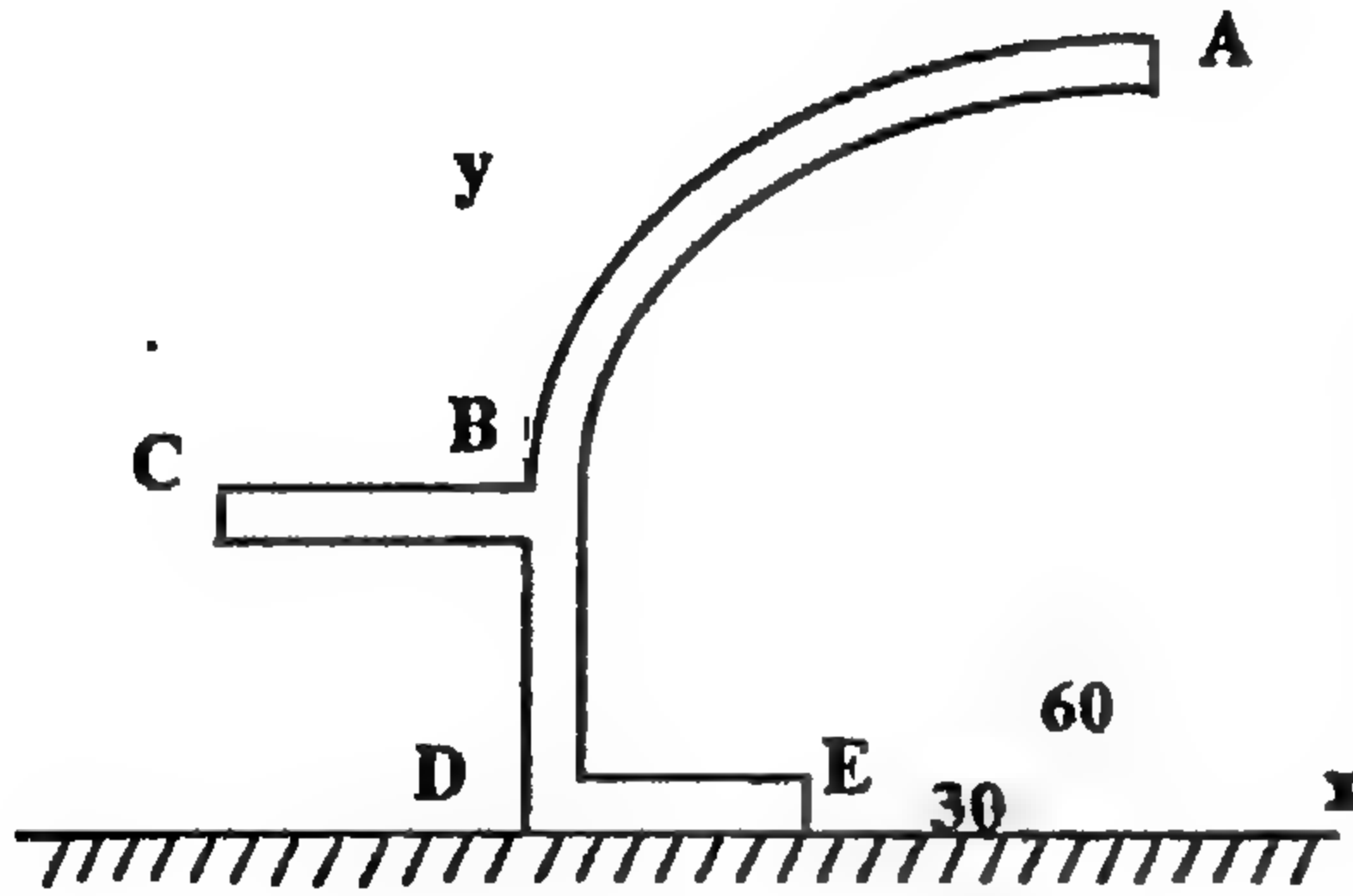
$$x_G = b = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2}{W_1 + W_2}$$

$$\therefore b \left( \frac{3}{2} \pi W + b W \right) = 1.09 \times \frac{3}{2} \pi W + b W \cdot \frac{b}{2}$$

$$\therefore b^2 + 3 \pi b - 3 \times 1.09 \pi = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في b ويعطى حلها بالطرق الجبرية المعروفة الجذر الموجب الآتي :

$$b = 1.00 \text{ m}$$



٢ - مظلة مقطوعها يتألف من جزء دائري AB بنصف قطر قدرة ٥ أمتار وباقي الأجزاء مستقيم كما في الشكل . عين مركز ثقل الجزء الدائري AB ثم عين عرض القاعدة DE بحيث لا تنقلب المظلة حول E علما بأن وزن وحدة

الأطوال من مقطع المظلة = w

الحل:

الجزء الدائري BA

ليكن وزنه  $W_1$  ومركز ثقله  $G_1(x_1, y_1)$

$$W_1 = 2\pi \times 5 \times \frac{60}{360} w = 5.22 w$$

$$x_1 = r \cos 30^\circ - \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \cos 60^\circ$$

$$= r \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{6}} \right] = 1.95 \text{ m}$$

الجزء الدائري BC

ليكن وزن  $W$  ومركز ثقل  $G$  ( $x, y$ )

$$W_2 = w$$

$$x_2 = -50 \text{ m}$$

الجزء الدائري BD ليكن وزن  $W$  ومركز ثقل  $G_3$  ( $x_3, y_3$ )

$$W_3 = 5 \times 0.5 w = 2.5 w$$

$$x_3 = 0$$

الجزء الدائري DE ليكن وزن  $W_4$  ومركز ثقل  $G_4$  ( $x_4, y_4$ )

$$W_4 = b w$$

$$x_4 = \frac{b}{2}$$

مركز ثقل المظلة كلها G

$$x_G = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2 + W_3 x_3 + W_4 x_4}{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}$$

عند وشك الانقلاب حول E تمر محصلة الأوزان بالنقطة E نفسها

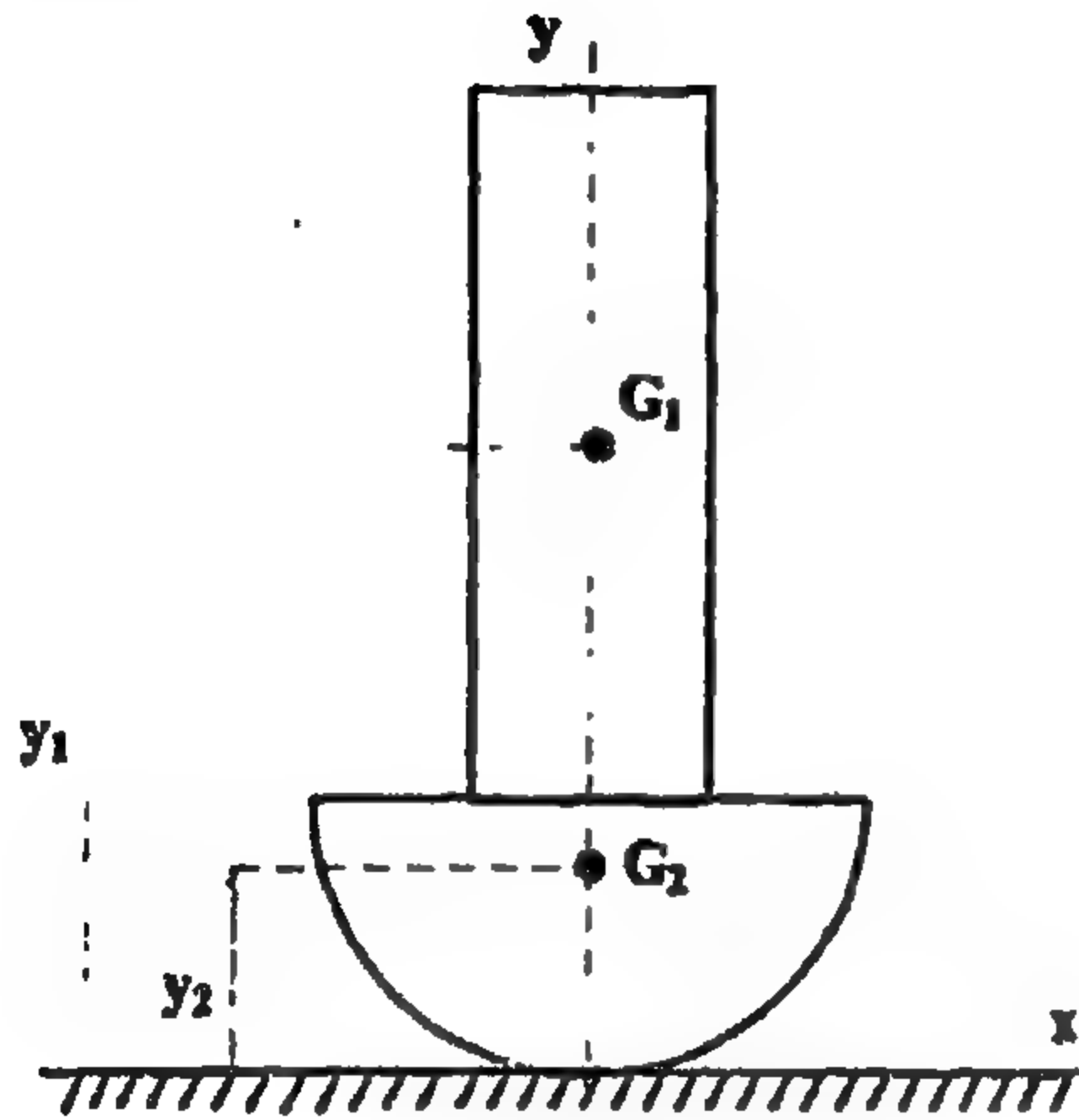
$$\therefore x_G = b = \frac{5.22 \times 1.95 - 1 \times 5 + 0 + b \cdot \frac{b}{2}}{5.22 + 1.0 + 2.5 + b}$$

وباختزال هذه العلاقة نحصل على المعادلة الآتية من الدرجة الثانية في  $b$

$$b^2 + 17.45 b - 19.4 = 0$$

ويعطى حل هذه المعادلة جبرياً الجذر الموجب الآتي

$$b = 1.00 \text{ m}$$



(٣) نصف كرة مصمتة نصف قطرها  $a$  مركب عليها اسطوانة من نفس مادتها وطولها  $\frac{8a}{3}$ . إذا وضع الجسم على أرض أفقية كان وضعه القائم وضعاً متزاناً مستقر. عين أكبر نصف قطر للأسطوانة في هذه الحالة

الحل:

نفرض أن نصف قطر الاسطوانة  $r$  وأن وزن الاسطوانة  $W_1$  ووزن نصف الكرة  $W_2$  وأن وزن وحدة الحجم من مادة الجسم  $W$

$$W_1 = \pi r^2 \cdot \frac{8a}{3} W$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 W$$

$G_1$  مركز ثقل الاسطوانة في منتصف ارتفاعها و  $G_2$  مركز ثقل نصف الكرة المصمتة على بعد

$\frac{3}{8} a$  من مركزها

$$\therefore y_1 = a + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} a = \frac{7}{3} a$$

$$y_2 = \frac{5}{8} a$$

رد الفعل العمودي من الأرض يمر بمركز نصف الكرة ولهذا إذا وقع مركز ثقل الجزئين  $G$  تحت مركز الكرة وميل الجسم كون رد فعل الأرض والوزن الكلي إزدوجا يعمل على إعادة الجسم إلى وضعة القائم وبالتالي يكون اتزانة مستقرا وبالعكس إذا وقعت  $G$  فوق مركز الكرة

أما إذا وقعت  $G$  على مركز الكرة بالضبط كان الاتزان مستمرا ولبي هذه الحال

$$W_1 y_1 + W_2 y_2 = (W_1 + W_2) a$$

$$\therefore \pi r^2 \cdot \frac{8a}{2} \cdot \frac{7}{3} a + \frac{2}{3} \pi a^3 \frac{5a}{8} = \left( \pi r^2 \cdot \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \pi a^3 \right) a$$

بإختزال هذه المعادلة نحصل على :

$$r = \frac{3}{8\sqrt{2}}$$









مكتبة  
Bibliotheca Alexandrina



1473636

